

А.М. Лукьянов, М.А. Лукьянов

# ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Допущено  
Федеральным агентством железнодорожного транспорта  
в качестве учебника для студентов техникумов и колледжей  
железнодорожного транспорта*

Москва  
2014

УДК 621.01  
ББК 30.12  
Л84

Рецензенты: главный научный сотрудник ОАО «ВНИИЖТ», д-р техн. наук, проф. *Е.Е. Коссов*; директор Московского колледжа железнодорожного транспорта *Н.Е. Разинкин*; преподаватель Московского колледжа железнодорожного транспорта *С.А. Виноградов*

**Лукиянов А.М., Лукиянов М.А.**

Л84      Техническая механика: учебник. — М.: ФГБОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2014. — 711 с.

ISBN 978-5-89035-700-7

Рассматриваются теоретические основы и методика расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций железнодорожного транспорта. Даны понятия, определения и справочные сведения в том объеме, который необходим для подготовки учащихся к работе над проектом по курсу «Детали машин». Наряду с классическими приемами оценки прочности даются основные понятия механики разрушения. обстоятельное изложение теоретического материала и подробное решение примеров дают возможность изучения предмета и для дневной, и для заочной форм обучения.

Предназначен для студентов техникумов и колледжей железнодорожного транспорта.

УДК 621.01  
ББК 30.12

ISBN 978-5-89035-700-7

© Лукиянов А.М., Лукиянов М.А., 2014  
© ФГБОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте», 2014

---

## Предисловие

В связи с переходом на двухуровневую систему образования увеличивается объем самостоятельной работы студентов и, как следствие, совершенствуется методика преподавания учебных дисциплин.

Курс «Техническая механика» для средних специальных учебных заведений железнодорожного транспорта относится к числу первых инженерных дисциплин, изучаемых студентами на младших курсах. Этот курс предусматривает изучение общих законов движения и равновесия материальных тел, основ расчета элементов конструкции на прочность, жесткость и устойчивость и состоит из трех разделов: теоретическая механика, сопротивление материалов и детали машин.

В указанных разделах обращено внимание на вопросы, которые будут изучаться в дисциплинах «Организация и технология строительства на железнодорожном транспорте», «Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования», «Техническая эксплуатация подвижного состава железных дорог».

Основная цель учебника — кратко и наглядно изложить основы предмета, дать студентам начальные знания анализа и методов расчета элементов конструкций железнодорожного транспорта, экспериментального исследования явлений и процессов, протекающих в них; помочь овладеть методами решения типовых задач; повысить эффективность самостоятельных занятий, оптимизировать время, затрачиваемое студентам на выполнение контрольных заданий.

Необходимо отметить следующие особенности предлагаемого учебника. Более полно изложены основные физические модели и методы решения упругопластических задач применительно к стержням конструкций железнодорожного транспорта. Основные вопросы курса подробно проиллюстрированы несложными примерами, способствующими приобретению навыков в решении более сложных задач.

Подготовленный к изданию материал составлен на основе действующей программы курса и многолетнего опыта преподавания

данной дисциплины авторами в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования — Московском государственном университете путей сообщения.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам Е.Е. Косову, Н.Е. Разинкину и С.А. Виноградову за полезные замечания, которые способствовали существенному улучшению учебника.

Все замечания и пожелания будут приняты авторами с благодарностью. Письма просим направлять по адресу: 105082, Москва, Бакунинская ул., д. 71, ФГБОУ «Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте».

---

## Раздел 1

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

В этом разделе курса даются определения основных понятий. На базе этих определений излагается теория. Из всего многообразия подходов и принципов механики освещены законы классической (ньютоновской) механики, общие теоремы динамики механической системы, принцип Даламбера, основы аналитической механики Лагранжа.

Положения теории иллюстрируются примерами и решениями типовых задач. Для усвоения теоретического материала рекомендуется выполнение индивидуальных курсовых заданий.

## Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ

### 1.1. Задачи теоретической механики

Теоретическая механика — наука о равновесии и движении материальных тел. Традиционно она подразделяется на три раздела.

*Статика* изучает правила сложения сил, преобразования и упрощения систем сил, а также условия равновесия неподвижных материальных тел под действием различных систем сил.

*Кинематика* изучает общие геометрические свойства движения материальных тел, не обращая внимания на причины, влияющие на характер движения.

*Динамика* изучает движение материальных тел с учетом действующих на них сил, от которых зависит характер этого движения.

Основные положения статики были установлены до нашей эры; законы динамики в наиболее полном виде сформулированы *Исааком Ньютоном* в его книге «Математические начала натуральной философии», опубликованной в 1687 году.

Построенная *Анри Пуанкаре* и *Альбертом Эйнштейном* в начале прошлого века общая теория движения материальных тел (при скоростях движения, сопоставимых со скоростью света), так называемая *теория относительности*, содержит как частный случай все законы *Ньютона*. Ввиду этого теоретическую механику, в основе которой лежат эти законы, справедливо называют *ньютоновской*, или *классической*.

Для решения практических задач вполне достаточна та точность, с которой законы классической механики описывают реальное движение. Это обстоятельство позволяет на стадии проектирования любого технического объекта предсказывать его поведение под действием разнообразных нагрузок.

Решение любой механической задачи состоит из ряда этапов. Сначала выбирают *расчетную схему (модель)* и для нее составляют разрешающие уравнения. Набор этих уравнений принято называть *математической моделью*. На следующем этапе составляют *расчетный алгоритм*, т.е. указывают последовательность выполнения математических операций, ведущих к решению задачи. В простейших случаях результат можно получить быстро и довольно простыми средствами. Следует обратить особое внимание на необходимость обязательного контроля полученного результата. Эта мера обеспечивает надежность результата вычислений и, как следствие, надежность создаваемого на базе этих результатов объекта.

Кроме проверки численных результатов, большое значение имеет понимание внутренних сил взаимодействия, или механического «смысла» работы конструкции.

Рассмотрим более детально выбор расчетной схемы или построение механической модели.

Механическое движение является простейшей формой движения. Оно состоит в изменении с течением времени взаимного расположения материальных тел или их частей в пространстве под действием нагрузок.

При решении довольно широкого круга задач о движении твердых тел бывает достаточно узнать, как движется всего лишь какая-нибудь одна точка этого тела, например, его центр масс. В этом случае можно не учитывать, что при движении, например, снаряда, он вращается вокруг своего центра масс. Тогда можно использовать простейшую механическую модель — *материальную точку*. Размеры тела и его форма при этом не учитываются. Единственной характеристикой является масса тела, которая принимается сосредоточенной в центре масс.

Положение материальной точки в пространстве определяется тремя параметрами — декартовыми координатами. Принято говорить при этом, что модель имеет *три степени свободы*. При наложении связей (ограничений) на движение число степеней свободы уменьшается.

Широко распространена в исследованиях модель *абсолютно твердого тела*, когда можно пренебречь изменением взаимного расположения отдельных частиц реального тела, иными словами, не учитывать *деформации*. Модель абсолютно твердого тела в трехмерном пространстве имеет *шесть степеней свободы*: три степени свободы имеет центр масс и три степени свободы соответствуют трем возможным вращениям тела относительно осей, проведенных через центр масс. Число степеней свободы уменьшается при наличии *связей*.

В разделе I все твердые тела будут считаться недеформируемыми.

Изучению поведения деформируемых тел посвящены разделы II и III, в которых изложены основы курсов «Соппротивление материалов» и «Детали машин».

## **1.2. Механическое взаимодействие материальных тел**

Материальные тела в природе и в технике находятся в постоянном взаимодействии. Планеты солнечной системы находятся в силовом поле, создаваемом массами планет и Солнца, и движутся по эллиптическим орбитам, подчиняясь закону всемирного тяготения, открытому Ньютоном. Самолеты и вертолеты взаимодействуют с воздушной средой. Морские корабли и речные суда взаимодействуют как с воздушной средой, так и с жидкостью водных пространств. Наземные экипажи (автомобили, поезда, дрезины и пр.) взаимодействуют с покрытием дорог или с рельсовым путем, а также с воздушной средой.

Детали (подвижные и неподвижные) станков, механизмов взаимодействуют между собой и в целом — подобно зданиям и сооружениям — с опорами и с воздушной средой.

В процессе взаимодействия материальных тел они могут изменять свое состояние и свойства. Выделяя механическое взаимодействие, мы сознательно игнорируем другие виды физического или химического воздействия. В случае необходимости изучение взаимодействия тел может быть дополнено рассмотрением этих сопутствующих воздействий.

Механическое движение является простейшим (наиболее просто наблюдаемым) видом движения материи.

*Количественной мерой механического взаимодействия материальных тел является сила.* Следует различать два вида силового взаимодействия. В поле тяготения или в магнитном поле силовое взаи-

модействие возникает между всеми частицами тел и распределено по их объему. Взаимодействие материальных тел с воздушной или водной средой, с опорными устройствами происходит по поверхности контакта. Таким образом, силы можно подразумевать либо приложенными по поверхности, либо считать их объемными.

### 1.3. Понятие силы и системы сил. Равнодействующая

Для теоретических построений требуется ввести абстрактное понятие — сосредоточенную силу.

*Сила — это мера механического взаимодействия материала тел между собой.* Она измеряется в ньютонах,  $1 \text{ Н} \approx 0,1 \text{ кг}$ .

Силовой вектор имеет линию действия, точку приложения, направление действия и модуль (числовую величину).

Силы, действующие на тело (или систему тел), делятся на *внешние* и *внутренние*. Внешние силы бывают активные и реактивные. *Активные силы* вызывают перемещение тела, *реактивные* стремятся противодействовать перемещению тела под действием внешних сил.

При рассмотрении равновесия твердых тел некоторые силы будут полностью заданы, другие требуется искать. При этом очень важно каждый раз уточнить, что именно нужно найти (линию действия силы, ее модуль и т.д.). Нечеткие представления в этом вопросе ведут к ошибкам при решении задач.

Довольно близко к понятию абстрактной сосредоточенной силы подходит взаимодействие ножек стола с полом или контакт отбойного молотка со скальной породой в шахте.

Для более адекватного описания взаимодействия тел вводится понятие системы сил.

*Системой сил называется совокупность сил, действующих на данное тело.*

Введем еще несколько понятий, необходимых для дальнейшего построения теории.

*Системы сил эквивалентны, если они оказывают одинаковое действие на твердое тело (не изменяют кинематическое состояние тела — покой или движение).*

Система сил, эквивалентная нулю, является *уравновешенной*.

*Равнодействующей системы сил называется такая сила, которая по своему действию эквивалентна всей системе сил.*

Рассмотрим три примера, когда на тело действует система, состоящая из двух сил (рис. 1.1). Пусть модули сил равны:  $F_1 = F_2$ .



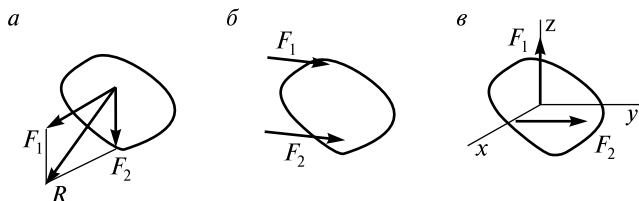


Рис. 1.1.1. Примеры действия на тело системы двух сил:  
*а* — линии действия сил сходятся в точке; *б* — линии действия сил образуют пару сил; *в* — линии действия сил скрещиваются

В примере на рис. 1.1, *а* линии действия сил сходятся в одной точке. Их действие можно заменить одной равнодействующей силой

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2. \quad (1.1)$$

В примере на рис. 1.1, *б* две равные силы, линии действия которых параллельны, образуют *пару сил*. Действие пары сил вызывает вращение тела. Далее будут рассмотрены свойства пары сил. Равнодействующая в этом случае не существует.

В примере на рис. 1.1, *в* линии действия сил скрещиваются, такая совокупность сил приводится к динамическому винту.

Более подробно о действии динамического винта можно узнать в учебниках по теоретической механике, которые указаны в списке литературы.

На основании рассмотренных примеров можно сделать вывод: *не всякая система сил имеет равнодействующую. Ее существование каждый раз нужно устанавливать.*

## 1.4. Аксиомы статики

### **Аксиома 1**

*В случае двух равных по модулю сил, действующих по одной прямой и противоположно направленных, тело находится в равновесии.*

### **Аксиома 2**

*Состояние тела не изменится, если к действующим на него силам добавить или от них отнять систему сил, эквивалентную нулю.*

### **Аксиома 3**

*Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке тела, по величине и направлению равна диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах.*

Вектор равнодействующей силы равен геометрической сумме векторов сил. Модуль равнодействующей находится по теореме косинусов:  $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}$ , где  $\alpha$  — угол между векторами сил. Очевидно и обратное утверждение: *любую силу можно разложить на две составляющие.*

#### **Аксиома 4**

*Всякому действию есть равное и противоположное противодействие.*

Взаимодействие может осуществляться как при непосредственном контакте, так и на расстоянии при наличии силового поля.

Сделаем три существенных замечания. Во-первых, указывая на наличие силы, всегда можно найти тело, которое с этой силой действует. Во-вторых, упомянутые силы приложены к разным телам, поэтому их совокупность нельзя считать уравновешенной. Если рассматривается система, в которую входят оба взаимодействующих тела, то эти силы являются *внутренними* в системе, и их сумма равна нулю. В-третьих, эта аксиома справедлива не только в статике, но и в динамике. Далее мы этим воспользуемся.

#### **Аксиома 5**

*Равновесие деформируемого тела не нарушится, если оно внезапно отвердеет.*

На основе этой аксиомы устанавливается связь между условиями равновесия деформируемых и абсолютно твердых тел. Условия равновесия сил, приложенных к твердому телу, необходимы для равновесия деформируемого тела. Но они не являются достаточными для равновесия деформируемого тела.

## **1.5. Простейшие теоремы статики**

### ***Теорема о переносе силы вдоль линии действия***

Действие силы на абсолютно твердое тело не изменится, если ее перенести в другую точку тела по линии действия.

Для доказательства рассмотрим тело под действием силы  $N$  в точке  $A$  (рис. 1.2). Приложим в точке  $B$  на линии действия силы  $N$  уравновешенную систему сил  $T = -S$ , причем модули всех трех сил одинаковы:  $N = T = S$ . На основе аксиомы 2 состояние тела не изменится. Теперь на основе той же аксиомы отбросим уравнове-

шенную систему сил  $N = -S$  (на рис. 1.2 они перечеркнуты). В результате на тело действует сила  $T$ , эквивалентная силе  $N$ . Теорема доказана.

В случае деформируемого тела эта теорема несправедлива. Итак, в абсолютно твердом теле сила является вектором *скользящим*, в деформируемом твердом теле точки приложения сил фиксированы.

### **Теорема о трех силах**

*Для равновесия твердого тела под действием трех сил необходимо, чтобы линии действия этих сил пересекались в одной точке.*

Для доказательства теоремы рассмотрим тело под действием двух сил  $F_1$  и  $F_2$ , линии действия которых пересекаются (рис. 1.3). Перенесем эти силы в точку пересечения (на основе теоремы) и сложим в соответствии с третьей аксиомой:

$$R = F_1 + F_2.$$

В соответствии с первой аксиомой силу  $R$  можно уравновесить силой, лежащей на линии ее действия. Следовательно, линия действия третьей силы  $F_3$  должна пересекаться с первыми двумя в одной точке. Теорема дает только необходимое условие, для достаточности должна полностью выполняться первая аксиома ( $F_3 = -R$ ). Данная теорема дает возможность найти направление одной из сил, если на тело действует три силы и две из них известны.

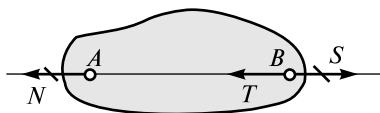


Рис. 1.2. Перенос силы вдоль линии действия в твердом теле

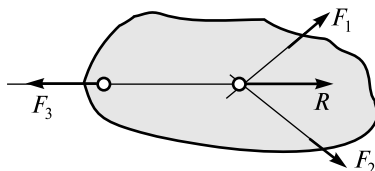


Рис. 1.3. К теореме о трех силах

## **1.6. Механические связи и их реакции. Аксиома связей**

Тела делятся на свободные и связанные.

*Свободные тела* — это такие, перемещение которых не ограничено.

Все законы и теоремы статики справедливы для свободного твердого тела.

*Связанные тела* — это тела, перемещение которых ограничено другими телами.

Рассмотренные ранее материальные тела являются свободными, изолированными от контактов с другими телами. На практике приходится иметь дело с несвободными телами. Выделяя для рассмотрения некоторое тело, необходимо «освободить» его от действия других тел. Эти другие тела, ограничивающие движение рассматриваемого тела, называют *механическими связями*. В ответ на действие рассматриваемого тела в связях возникают *реакции*. Выделение рассматриваемого тела осуществляется с помощью *аксиомы связей*.

#### **Аксиома 6 (аксиома связей)**

*Состояние тела не изменится, если взамен отброшенных связей к нему приложить возникающие в этих связях реакции.*

Аксиома действует как в статике, так и в динамике. Почти все теоремы и правила теоретической механики формулируются для твердых тел, освобожденных от связей. Для правильного использования аксиомы при решении любой задачи необходимо иметь четкое представление о том, какие реакции возникают в конкретных связях.

Приведем примеры различного вида связей и характеристики их реакций. Прежде всего рассмотрим реакцию гладкой поверхности, ограничивающей движение рассматриваемого тела (рис. 1.4, *а*). Она направлена по нормали к общей касательной плоскости. На рис. 1.4, *б* показано тело, к которому приложена реакция взамен удаленной связи. Будем удаление связей проводить мысленно и показывать реакцию прямо на заданной схеме. В случае шероховатой поверхности необходимо учитывать силы трения. Этот вопрос будет подробно рассмотрен в главе 4.

Для обеспечения неподвижности твердых тел необходимо наложить ограничения на степени свободы, которыми эти тела обладают. Для начала рассмотрим неподвижность в плоскости. При этом

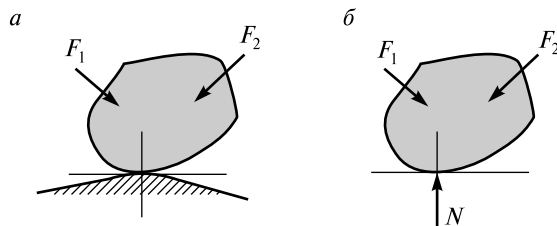


Рис. 1.4. Реакция гладкой поверхности:  
*а* — заданная схема; *б* — расчетная схема при удаленной связи

у тела имеются три степени свободы: движение по двум взаимно перпендикулярным направлениям и вращение в плоскости вокруг некоторой точки.

При рассмотрении равновесия материальных тел выбирают расчетную схему, при этом реальные механические связи моделируют с помощью идеализированных опорных устройств. На рис. 1.5 показана балка, опирающаяся на шарнирные опоры.

Шарнирно-неподвижная опора в точке  $A$  налагает два ограничения: на перемещение вдоль осей  $X$  и  $Y$ . Поэтому в ответ на действие нагрузок  $F_1$  и  $F_2$  в этой опоре возникает реакция  $R_A$ . Ее линия действия проходит через центр шарнира; неизвестен модуль реакции и угол наклона линии действия. Разлагая  $R_A$  по осям, будем искать две реакции  $X_A$  и  $Y_A$ . В шарнирно-подвижной опоре в точке  $B$  возникает только одна реакция  $R_B$ , направленная перпендикулярно плоскости, по которой опора может перемещаться. Шарниры в опорах, как правило, считаются идеальными, т.е. трение не учитывается.

Реакции гибких связей (тросов, нитей, канатов) направлены по линии их натяжения.

Шарнирные опоры можно реализовать не только с помощью массивных тел, как показано на рис. 1.5. Связи могут быть наложены с помощью стержней с шарнирами на концах (рис. 1.6). Весом этих стержней в сравнении с заданными нагрузками можно пренебрегать. Реакции таких невесомых стержней направлены по линиям, соединяющим центры шарниров. Опорные устройства в точке  $A$  на рис. 1.5 и 1.6 физически эквивалентны, они налагают два ограничения на перемещение. Реакция этой шарнирно-неподвижной

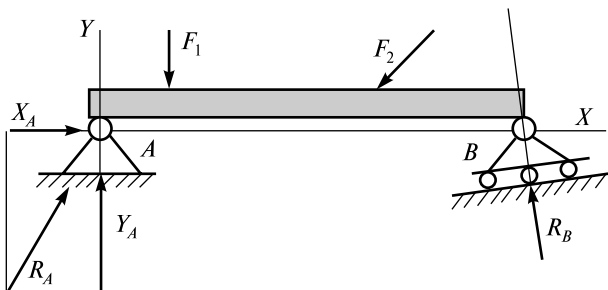


Рис. 1.5. Неподвижно закрепленная твердая балка: на шарнирно-неподвижной опоре в точке  $A$ ; на шарнирно-подвижной опоре в точке  $B$

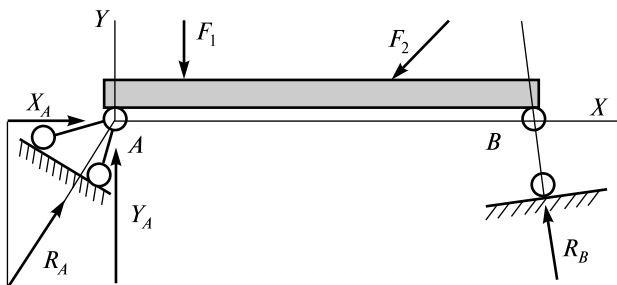


Рис. 1.6. Неподвижное закрепление недеформируемой («твердой») балки с помощью невесомых стержней с шарнирами на концах



Рис. 1.7. Равновесие невесомого стержня

опоры проходит через центр шарнира в точке  $A$ . Можно искать в опоре  $A$  (рис. 1.6) две неизвестные силы, действующие вдоль стержней, но лучше их равнодействующую разложить на компоненты по осям  $X, Y$ , как на рис. 1.5.

Докажем, что направление реакции невесомого стержня идет по линии, соединяющей центры шарниров. Рассмотрим равновесие жесткого невесомого стержня  $CD$  с криволинейной осью (рис. 1.7). Приложенные к его концам силы на основе первой аксиомы при равновесии должны лежать на одной прямой ( $F_1 = -F_2$ ). Следует сказать, что не обязательно наличие шарниров (как некоторых конструкций) на концах стержней. Достаточно присутствие упругой прокладки (резина, поролон и т.п.), чтобы обеспечивалась возможность небольшого поворота стержня вокруг его конца.

Приведенными примерами далеко не исчерпывается набор различных механических связей. В процессе изучения курса статики мы будем знакомиться с другими, не менее важными способами закрепления твердых тел с целью обеспечения их неподвижности.

## Глава 2. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ

Реальные материальные тела, находящиеся в пространстве, испытывают действие сил. Практические задачи расчета тела, как правило, сводятся к рассмотрению расчетных схем, в которых фигурируют плоские системы сил.

При анализе плоской системы сил, когда линии действия всех сил, приложенных к телу, лежат в одной плоскости, большую роль играет не только величина сил, но и взаимное их расположение. Желая открыть дверь, мы прикладываем усилие к дверной ручке, которая расположена на некотором расстоянии от оси, вокруг которой должна повернуться дверь.

По следствию из аксиом статики, все силы системы можно переместить вдоль линии действия, и все силы окажутся приложенными в одной точке.

Система сил, линии, действия которых пересекаются в одной точке, называется *сходящейся*.

Рассмотрим основные свойства плоской системы сил.

## 2.1. Момент силы относительно точки

На начальном этапе рассмотрения введем понятие момента силы относительно точки (рис. 2.1).

*Модулем момента  $M$  силы  $F$  относительно точки на плоскости* называется произведение модуля силы на плечо  $h$  (кратчайшее расстояние от моментной точки до линии действия силы):

$$M_A(F) = \pm Fh. \quad (2.1)$$

Момент является величиной векторной. Условимся *положительным считать момент, который стремится повернуть тело вокруг моментной точки против хода часовой стрелки* (см. рис. 2.1, при взгляде с положительного конца оси  $Z$ ). Единица измерения момента — Ньютон, умноженный на метр (Н·м).

Отметим свойства момента силы.

1. *Величина момента не зависит от переноса силы вдоль линии действия.*

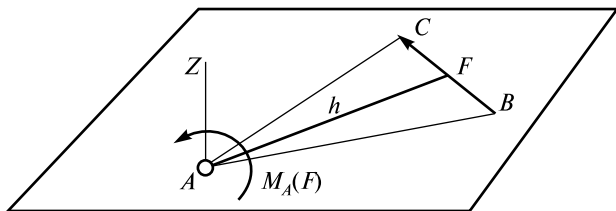


Рис. 2.1. Момент силы относительно точки на плоскости

2. Численно момент равен удвоенной площади треугольника, в основании которого лежит сила ( $F$ ), а высотой служит плечо  $h$  ( $\Delta ABC$  на рис. 2.1).

3. Момент силы обращается в ноль, если плечо или модуль силы равны нулю.

## 2.2. Аналитический способ задания сил

Понятие силы, введенное ранее в гл. 1, требует указания ее модуля, линии действия и точки приложения. В дальнейшем будем пользоваться аналитическим способом задания сил. При этом задают проекции силы на оси декартовой ортогональной системы координат и координаты точки ее приложения.

Ограничиваясь расположением сил в плоскости, установим связь между модулем силы и ее проекциями. На рис. 2.2 показана эта связь:

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \cos(90^\circ - \alpha) = F \sin \alpha, \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}. \quad (2.2)$$

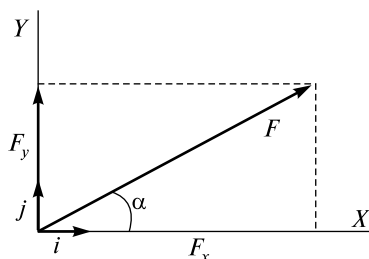
Силу  $F$  можно представить как геометрическую сумму двух компонент с помощью единичных векторов (ортов):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}.$$

Равнодействующая двух сил, определенная выражением (1.1)

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad (2.3)$$

может быть найдена через заданные проекции составляющих. Проецируя равенство (2.3) на оси координат, получаем:



$$\begin{aligned} R_x &= F_{1x} + F_{2x}, \\ R_y &= F_{1y} + F_{2y}; \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рис. 2.2. Проекция силы на ось



## 2.3. Теорема о моменте равнодействующей

Большую роль в статике играет *теорема Вариньона*:

$$M_A(\mathbf{R}) = \sum_{i=1}^n M_A(\mathbf{F}_i).$$

*Момент равнодействующей силы относительно некоторой точки равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.*

Для доказательства рассмотрим момент силы  $\mathbf{F}_1$  относительно точки  $A$  (рис. 2.3). Численно он равен, как уже отмечалось, удвоенной площади  $\triangle ABC$  (на рис. 2.3 она заштрихована). Проведем ось  $AH$ , перпендикулярную отрезку  $AB$ , и спроектируем силу  $\mathbf{F}_1$  на эту ось. Очевидно, что  $M_A(\mathbf{F}_1) = F_1 h = F_{1x} AB$ . Вычислим сумму моментов сил  $\mathbf{F}_1$  и  $\mathbf{F}_2$ :

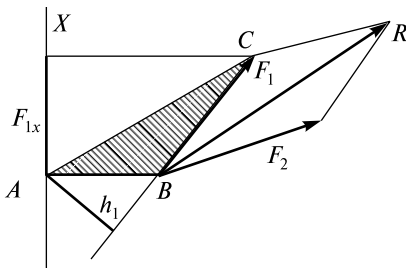


Рис. 2.3. К выводу теоремы о моменте равнодействующей

$$\sum_{i=1}^2 M_A(\mathbf{F}_i) = AB(F_{1x} + F_{2x}) = ABR_x = M_A(\mathbf{R}).$$

Доказательство проведено для двух сил, но его можно распространить на любое число сил.

## 2.4. Пара сил и ее свойства

Наряду с понятием силы в механике имеется фундаментальное понятие пары сил. *Парой сил называется совокупность двух равных по модулю сил ( $F$ ), лежащих на параллельных линиях и направленных противоположно друг другу.*

Основной характеристикой пары сил является ее момент; он равен произведению модуля одной из сил на плечо пары:

$$M = \pm Fd. \quad (2.5)$$

*Плечом  $d$*  называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

Момент пары будем считать положительным, если пара стремится повернуть тело против хода часовой стрелки.

Отметим свойства пары сил.

1. Пара сил не может быть заменена одной силой, т.е. она не имеет равнодействующей.

2. Момент пары сил не зависит от переноса сил вдоль своих линий действия (в пределах данного тела).

3. Пара сил производит на тело вращательное действие.

4. Сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю.

5. Две пары сил называют эквивалентными, если они оказывают одинаковое действие на тело.

6. При действии нескольких пар сил на тело момент результирующей пары равен алгебраической сумме моментов этих пар.

7. Алгебраическая сумма моментов сил пары относительно любой точки не зависит от положения этой точки и равна моменту пары.

Последнее свойство можно доказать непосредственным вычислением (рис. 2.4):

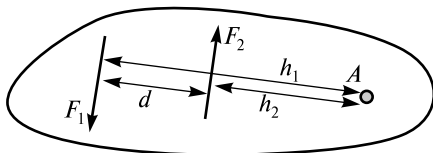


Рис. 2.4. Момент пары не зависит от точки приложения

$$\begin{aligned}\sum M_A(F_i) &= F_1 h_1 - F_2 h_2 = \\ &= F(h_1 - h_2) = Fd.\end{aligned}$$

Аналогично можно доказать справедливость и предпослед-

него свойства, т.е.  $M = \sum_{i=1}^n M_i$ .

Рассмотрим теорему об эквивалентности пар.

Две пары сил эквивалентны, если они имеют одинаковые алгебраические моменты.

Рассмотрим твердое тело (рис. 2.5), на которое действует пара сил  $(F_1, F_2)$ . Переместим силы этой пары вдоль линий их действия в точки  $A$  и  $B$ . Проведем две параллельные линии

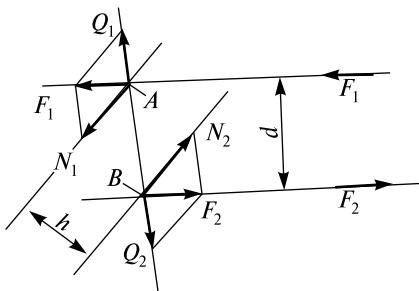


Рис. 2.5. К теореме об эквивалентности пар сил

через точки  $A$  и  $B$ . Теперь разложим силы  $F_1$  и  $F_2$ , каждую на две составляющие:

$$F_1 = N_1 + Q_1, \quad F_2 = N_2 + Q_2.$$

Силы  $Q_1$  и  $Q_2$  являются уравновешенной системой, их можно отбросить на основе аксиомы. Вместо пары сил  $(F_1, F_2)$  мы получили другую пару сил  $(N_1, N_2)$ . Для сравнения величин алгебраических моментов этих пар вычислим момент силы  $F_1$  относительно точки  $B$ , пользуясь теоремой Вариньона:

$$M_B(F_1) = M_B(N_1) + M_B(Q_1).$$

Учитывая, что  $M_B(Q_1) = 0$ , и пользуясь формулой (2.5), получаем равенство алгебраических моментов двух пар:

$$Fh = Nd.$$

## 2.5. Теорема о параллельном переносе силы

Для анализа различных систем сил нам придется переносить их к одному центру. С этой целью необходимо выяснить, при каких условиях это можно выполнить. Пусть на твердое тело в точке  $B$  действует сила  $F$  (рис. 2.6). В произвольно выбранной точке  $A$  приложим две взаимно уравновешенные силы, модули которых равны модулю силы  $F$ , и они направлены параллельно линии действия силы  $F$ . Теперь можно рассматривать силу  $F$ , приложенную в точке  $A$ , и пару сил  $(F, F')$ . Момент этой пары  $M$  равен  $Fh$ , т.е. численно равен моменту силы  $F$  относительно точки  $A$ :  $M = M_A(F)$ .

Известна **теорема Пуансо**.

*Силу, действующую на твердое тело, можно перенести параллельно самой себе в другую точку этого тела, добавив при этом пару сил,*

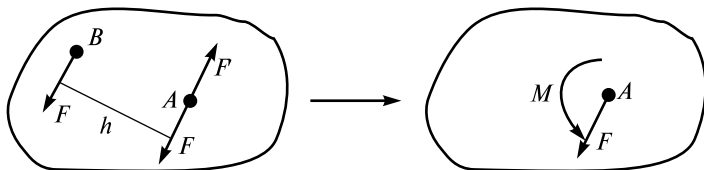


Рис. 2.6. Параллельный перенос силы

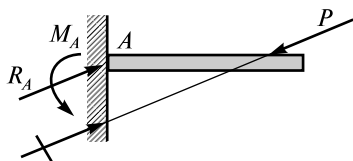


Рис. 2.7. Формирование реакции жесткой заделки

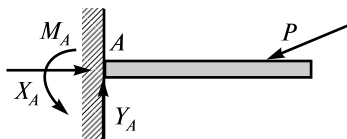


Рис. 2.8. Компоненты реакции жесткой заделки

момент которой равен моменту переносимой силы относительно новой точки приложения.

Применим полученную теорему к практической задаче. Рассмотрим реакции, возникающие при жестком защемлении бруса в стене. Это часто встречается в строительстве (балконы, козырьки над входными ступенями и т.д.).

Пусть на брус, являющийся твердым телом, действует произвольная нагрузка, которая может быть сведена к одной силе  $P$  (рис. 2.7). В соответствии с первой аксиомой она может быть уравновешена равной ей, но противоположно направленной силой.

Для полного определения этой реакции необходимо указать ее модуль, направление (угол наклона к стене) и точку приложения (расстояние от оси бруса).

Пользуясь теоремой Пуансо, переносим реакцию в точку  $A$  (центр тяжести торцевого сечения бруса). При этом появляется реактивная пара сил с моментом  $M_A$ . Реактивную силу  $R_A$  целесообразно разложить по осям координат. В результате в жесткой заделке имеем три неизвестных величины (рис. 2.8)  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $M_A$ .

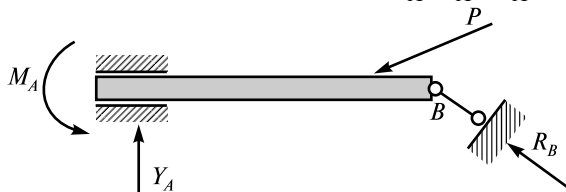


Рис. 2.9. Опорные реакции при наличии «плавающей заделки»

Отметим, кстати, что на практике встречается способ закрепления, условно называемый «плавающая заделка» (рис. 2.9). При этом в сравнении с жесткой заделкой (рис. 2.7) в точке  $A$  отсутствует запрет на горизонтальное смещение, он скомпенсирован опорным устройством в точке  $B$ . Тогда реакции опор выглядят так, как показано на рис. 2.9.

## 2.6. Приведение произвольной плоской системы сил к одному центру

Рассмотрим твердое тело, находящееся под действием системы  $n$  сил, произвольно расположенных в плоскости. Процедуру приведения системы сил к одному центру  $A$  рассмотрим на примере трех сил (рис. 2.10). Пользуясь теоремой о параллельном переносе, соберем заданные силы в точке  $A$ , зачеркивая их векторы на исходных позициях. При этом возникают пары сил, моменты которых равны моментам переносимых сил относительно центра  $A$ .

Складывая геометрически векторы сил и алгебраически моменты пар, получаем:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad \text{— главный вектор системы сил;}$$

$$M_A = \sum_{i=1}^n M_A(\mathbf{F}_i) \quad \text{— главный момент системы сил.}$$

Результат приведения формулируется в виде еще одной **теоремы Пуансо**.

*Произвольную плоскую систему сил, действующих на твердое тело, можно привести к одному центру, получив при этом главный вектор и главный момент.*

Две системы сил, имеющие равные главные векторы и главные моменты, эквивалентны, т.е. оказывают одинаковое действие на абсолютно твердое тело. Для деформируемого твердого тела это утверждение несправедливо.

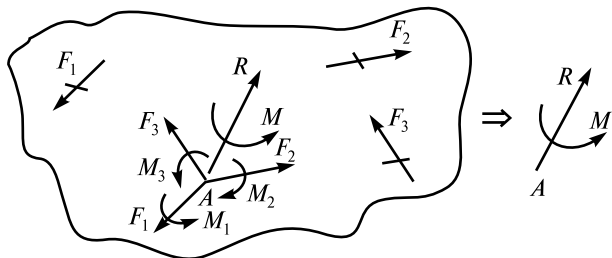


Рис. 2.10. Приведение плоской системы сил к одному центру

Рассмотрим частные случаи приведения.

1. *Главный момент оказался равным нулю, главный вектор отличен от нуля.* Система сил приводится к равнодействующей силе, линия ее действия проходит через центр приведения.

2. *Главный момент отличен от нуля, главный вектор оказался равным нулю.* Система сил приводится к одной паре сил. Этот результат не зависит от выбора центра приведения (главный вектор является инвариантом системы сил). Ввиду этого у момента результирующей пары можно опустить индекс:

$$M = \sum_{i=1}^n M_A(F_i).$$

3. В общем случае, когда оба силовых фактора отличны от нуля, систему сил можно привести к равнодействующей силе. На основании теоремы о параллельном переносе силы (см. рис. 2.6) можно перенести главный вектор из точки  $A$  в точку  $B$ , где исчезнет главный момент  $M_A$ . Расстояние между точками

$$AB = M_A / R.$$

4. Оба силовых фактора оказались равными нулю:

$$R = 0, \quad M_A = 0. \quad (2.6)$$

Вывод: система сил, действующих на твердое тело, уравновешена.

## **2.7. Равновесие твердого тела под действием плоской системы сил**

Как видно из выражения (2.6), для равновесия необходимо обращение в нуль главного вектора и главного момента системы сил. Главный вектор плоской системы сил можно представить в виде двух компонент по осям координат, поэтому условия равновесия можно записать в виде:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad M_A = \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0. \quad (2.7)$$

Можно доказать, что условия (2.7) не только необходимы, но и достаточны, для того чтобы система сил была уравновешена. Имеет место теорема:

*Для равновесия твердого тела под действием плоской системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы проекций всех сил на две координатные оси и сумма моментов всех сил относительно любой точки.*

Условия (2.7) справедливы для произвольно выбранной точки  $A$  и двух взаимно перпендикулярных осей. Существуют также две дополнительные формы записи условий равновесия плоской системы сил:

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad M_A = \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0, \quad M_B = \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0; \quad (2.8)$$

$$M_A = \sum_{i=1}^n M_A(F_i) = 0, \quad M_B = \sum_{i=1}^n M_B(F_i) = 0, \quad M_C = \sum_{i=1}^n M_C(F_i) = 0. \quad (2.9)$$

Использование этих дополнительных форм возможно с некоторым ограничением. Ось  $X$  не должна быть перпендикулярна линии  $AB$ , а три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  не должны лежать на одной прямой. При этом будет исключена опасность ошибки в том возможном случае, когда система сил не уравновешена, но имеет равнодействующую, линия действия которой проходит через точки  $A$  и  $B$ .

При решении задач о равновесии твердых тел силы, действующие на тело, будут входить в две категории: заданные нагрузки и возникающие в опорных устройствах реактивные силы и пары сил. Ввиду этого условия равновесия превращаются в уравнения равновесия.

Успешное решение практических задач зависит от умения выбирать рационально составленную систему уравнений. В конце решения требуется выполнить его проверку.

**Пример 2.1.** Твердое тело, имеющее вид бруса, весом которого можно пренебречь, жестко зашпелено в точке  $A$  (рис. 2.11). Нагрузка состоит из силы  $P = 10$  кН и пары сил с моментом  $M = 8$  кН·м. Длина бруса  $a = 2$  м. Требуется определить реакции, возникающие в заделке.

**Решение.** Рассмотрим равновесие бруса, мысленно отбрасывая связь (заделку). Опорные реакции жесткой заделки ищем в виде, показанном на рис. 2.8.

В этом случае основная форма записи условий равновесия дает возможность найти каждую из неизвестных величин независимо от остальных. Составляем уравнения и находим искомые реакции:

$$\begin{aligned}\sum Y &= 0; & Y_A - P \sin 45^\circ &= 0; & Y_A &= 7,07 \text{ кН.} \\ \sum X &= 0; & X_A + P \cos 45^\circ &= 0; & X_A &= -7,07 \text{ кН.} \\ \sum M_A &= 0; & M_A - P a \sin 45^\circ + M &= 0; & M_A &= 6,14 \text{ кН} \cdot \text{м.}\end{aligned}$$

Сделаем *проверку* правильности полученного решения. С этой целью желательно составить такое уравнение, в которое войдут все найденные величины, а заданная нагрузка будет, по возможности, исключена. Возьмем в качестве моментной точку  $K$  (см. рис. 2.11).

$$\sum M_K = -Y_A l + X_A l + M_A + M = -14,14 + 14,14 = 0.$$

**Пример 2.2.** Жесткая балка, вес которой можно не учитывать, закреплена на двух опорах. Нагрузка задана в виде распределенных по линейному закону вертикальных сил с максимальной интенсивностью  $q = 2 \text{ кН/м}$ , а также силы  $P = 5 \text{ кН}$ . Длина балки  $AB$  равна  $L = 6 \text{ м}$ . В точке  $A$  запрещено движение по направлению (наклон  $45^\circ$ ) опорного невесомого стержня, в точке  $B$  имеется шарнирно-неподвижная опора (рис. 2.12).

*Решение.* Рассмотрим равновесие балки. Воспользуемся второй дополнительной формой условий равновесия (2.9):

$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0; & Y_B 6 - P \sin 45^\circ \cdot 2 - Q \cdot 4 &= 0; & Q &= qL/2; & Y_B &= 5,18 \text{ кН;} \\ \sum M_B &= 0; & -R_A \cos 45^\circ \cdot 6 + P \sin 45^\circ \cdot 4 + Q \cdot 2 &= 0; & R_A &= 6,17 \text{ кН;} \\ \sum M_C &= 0; & X_B 6 + P \sin 45^\circ \cdot 4 + P \cos 45^\circ \cdot 6 + Q \cdot 2 &= 0; & X_B &= 7,89 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Равнодействующая  $Q$  распределенной нагрузки вычислена по формуле  $Q = gL/2$ , а точка ее приложения находится на расстоянии  $2/3L$  от вершины заштрихованного треугольника.

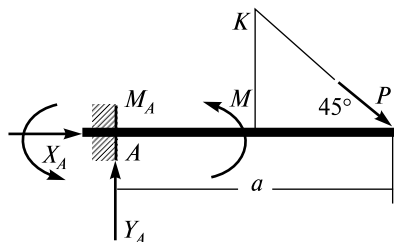


Рис. 2.11. Равновесие защемленного бруса

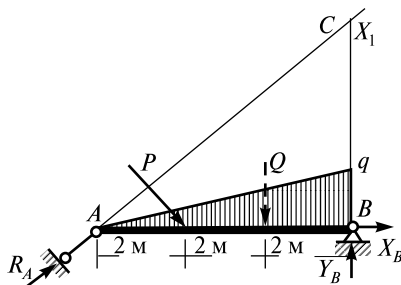


Рис. 2.12. Равновесие однопролетной балки



Для проверки вычислим сумму проекция всех сил на ось  $AX_1$ :

$$\sum X_1 = R_A - Q \frac{\sqrt{2}}{2} + Y_B \frac{\sqrt{2}}{2} + X_B \frac{\sqrt{2}}{2} = 9,83 - 9,82 = 0,01 \neq 0.$$

Относительная погрешность равна:  $(0,01/9,83) \cdot 100 = 0,1 \%$ .

**Пример 2.3.** Консольная балка закреплена тремя опорными стержнями (рис. 2.13). На нее действует сила  $P = 10$  кН и пара сил с моментом  $M = 17,3$  кН·м. Требуется найти реакции в опорных стержнях, не учитывая собственный вес балки.

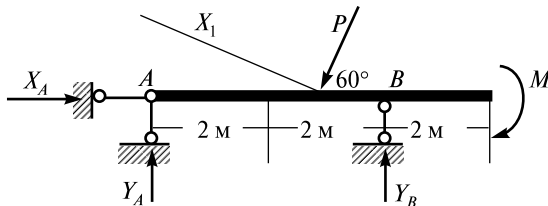


Рис. 2.13. Равновесие однопролетной балки с консолью

*Решение.* Для нахождения трех неизвестных реакций составим три уравнения равновесия в соответствии с первой дополнительной формой (2.8):

$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0; \quad -P \cos 30^\circ \cdot 2 - M + Y_B \cdot 4 = 0; \quad Y_B = 8,65 \text{ кН}; \\ \sum M_B &= 0; \quad P \cos 30^\circ \cdot 2 - M - Y_A \cdot 4 = 0; \quad Y_A = \frac{17,3 - 17,3}{4} = 0; \\ \sum X &= 0; \quad X_A - P \cos 60^\circ = 0; \quad X_A = 5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для проверки решения вычислим сумму проекций всех сил на ось  $X_1$ , перпендикулярную линии действия силы  $P$ :

$$\sum X_1 = -X_A \cos 30^\circ + Y_A \sin 30^\circ + Y_B \sin 30^\circ = -4,330 + 4,325 = -0,005 \neq 0.$$

Относительная ошибка (по модулю) равна:  $(0,005/4,33) \cdot 100 = 0,12\%$ .

Составляющая  $Y_A$  реакции в точке A оказалась равной нулю, т.е. вертикальный опорный стержень не нагружен. Не следует думать, что он напрасно поставлен. Прежде всего, он нагружен собственным весом консольной балки, который мы не учитывали (на него придется 1/4 этого веса). Кроме того, характер заданной нагрузки может измениться, и стержень будет работать в полную меру.

Подчеркнем, что свободное твердое тело в плоскости имеет *три степени свободы*; опорные устройства должны обеспечивать его неподвижность, т.е. быть целесообразно поставлены.

В трех рассмотренных задачах мы пренебрегали собственным весом балок (бруса). Очевидно, что никаких принципиальных трудностей не предвидится, если собственный вес известен. Его можно учесть при составлении уравнений равновесия. Но на практике часто собственный вес заранее неизвестен, его можно принять условно, по аналогии с каким-то сходным случаем. После определения внутренних сил в сечениях рассчитывают размеры поперечных сечений, а затем уже находят собственный вес рассматриваемого объекта. Далее производится повторный расчет с учетом собственного веса.

## 2.8. Равновесие системы твердых тел

На практике приходится рассматривать равновесие объектов, являющихся совокупностью нескольких твердых тел, соединенных связями в одну систему. Рассмотрим этот вопрос на примере системы, состоящей из двух твердых тел.

**Пример 2.4.** Два бруса соединены цилиндрическим шарниром в точке  $C$ . В точке  $A$  имеется жесткая заделка, в точке  $B$  — шарнирно-подвижная опора (рис. 2.14). Требуется определить реакции опор в точках  $A$  и  $B$  при заданных величинах:  $P = 2$  кН,  $M = 8$  кН·м,  $q = 2$  кН/м.

*Решение.* Рассмотрим равновесие всей системы. Мысленно отбросим связи и приложим возникающие реакции. Имеем четыре неизвестных величины. Поскольку вся заданная нагрузка лежит в плоскости, можно составить только три уравнения равновесия. Они необходимы, но недостаточны. Причина этого заключается в том, что рассматриваемая в равновесии система не является неизменяемой, в шарнире  $C$  возможно взаимное вращение брусьев.

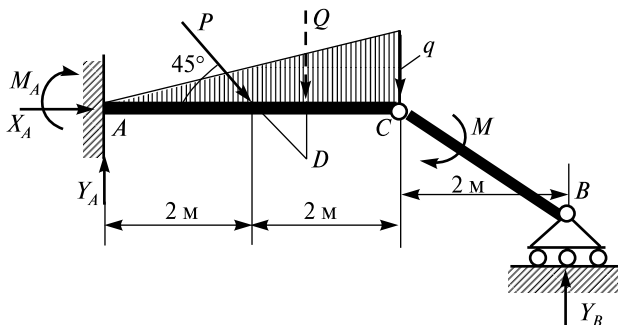


Рис. 2.14. Равновесие системы двух твердых тел

Для дальнейшего рассмотрения задачи применим *метод сечений*, которым мы уже пользовались. Сечение выполним по шарниру С, т.е. расчленим систему на два твердых тела. Рассмотрим правую часть системы (рис. 2.15).

В шарнирном соединении возникли еще две неизвестные реакции, итого имеем шесть неизвестных. Но для двух твердых тел можно составить шесть уравнений равновесия; задача решается.

Нетрудно найти реактивные силы в правой части:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0; \quad X_C = 0; \quad \sum Y = 0; \quad Y_B = -Y_C; \\ \sum M_C &= 0; \quad Y_B \cdot 2 - M = 0; \quad Y_B = 4 \text{ кН}, \quad Y_C = -4 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь левую часть системы (рис. 2.16). Реакция  $Y_C$  имеет знак минус, значит, она на рис. 2.15 в действительности направлена вниз. Поэтому к левой части системы прикладывается сила  $Y_C$ , направленная вверх.

Составляем уравнения равновесия для левой части системы:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0; \quad X_A + P \cos 45^\circ = 0; \quad X_A = -P \frac{\sqrt{2}}{2} = -1,41 \text{ кН}; \\ \sum M_C &= 0; \quad M_A - Y_C \cdot 4 + P \sin 45^\circ \cdot 2 + Q \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = 0; \quad M_A = 2,513 \text{ кН} \cdot \text{м}; \\ \sum Y &= 0; \quad Y_A + Y_C - P \sin 45^\circ - Q = 0; \quad Y_A = 1,41 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Для проверки решения рассмотрим всю систему (см. рис. 2.14) и составим сумму моментов относительно точки  $D$  (где пересекаются линии действия силы  $P$  и равнодействующей  $Q$ ):

$$\sum M_D = M_A + Y_A \cdot 2,667 + X_A \cdot 0,667 + M - Y_B (4 - 0,667) = 14,27 - 14,27 \approx 0.$$

Проверка выполняется.

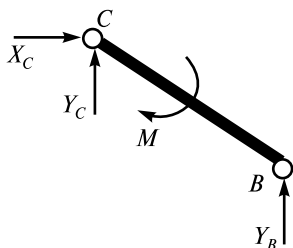


Рис. 2.15. Правая часть системы

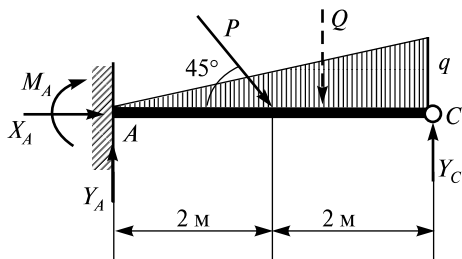


Рис. 2.16. Равновесие левой части системы

## Глава 3. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

### 3.1. Центр системы параллельных сил

Рассмотрим пространственную систему параллельных сил с фиксированными точками приложения (рис. 3.1). Сложим две силы, получим их равнодействующую:  $R_{1-2} = F_1 + F_2$ . Затем сложим эту равнодействующую с третьей силой:

$$R_{1-3} = R_{1-2} + F_3.$$

Эту операцию можно неограниченно продолжать. В результате получим равнодействующую всей системы сил:

$$R = \sum F_i.$$

Линия действия равнодействующей проходит через точку  $C$ . Если повернуть все силы относительно точек их приложения на одинаковый угол (в одну и ту же сторону), то равнодействующая снова пройдет через точку  $C$ . Эта точка является центром параллельных сил. Сформулируем соответствующее определение.

*Центром системы параллельных сил называется точка, через которую проходит линия действия равнодействующей независимо от изменения ориентации всей системы сил.*

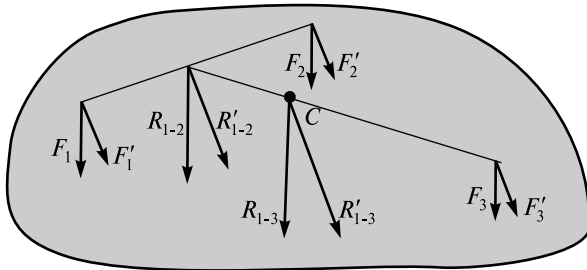


Рис. 3.1. К определению понятия центра параллельных сил

Найдем положение центра системы параллельных сил, точки  $C$  (рис. 3.2). Воспользуемся теоремой *Вариньона*:

$$r_c R = \sum r_i F_i. \quad (3.1)$$

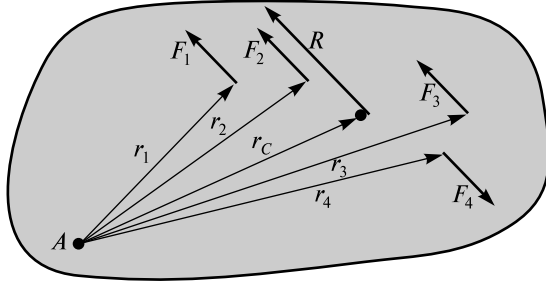


Рис. 3.2. К определению положения центра параллельных сил

В векторной алгебре отсутствует возможность деления на вектор. Поэтому применим искусственный прием. Введем в рассмотрение единичный вектор  $\mathbf{e}$ , направленный параллельно системе сил. Тогда выражение (3.1) можно записать в виде

$$\mathbf{r}_c \mathbf{e} R - \sum \mathbf{r}_i \mathbf{e} F_i = \mathbf{e} \left[ (\mathbf{r}_c R) - \sum \mathbf{r}_i F_i \right] = 0. \quad (3.2)$$

Выражение (3.2) является векторным произведением двух векторов. Известно, что его обращение в нуль возможно только тогда, когда либо один из сомножителей равен нулю, либо они коллинеарные. Введенный нами вектор  $\mathbf{e}$  имеет модуль, равный единице. Коллинеарность перемножаемых векторов, если она возникла, можно устранить поворотом всей системы сил. Отсюда следует, что содержимое квадратной скобки в (3.2) равно нулю. Получаем результат

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum \mathbf{r}_i F_i}{R}. \quad (3.3)$$

Формулой (3.3) определяется радиус-вектор центра параллельных сил. Если какие-то силы направлены в противоположную сторону (как сила  $\mathbf{F}_4$  на рис. 3.2), то они входят в выражение (3.3) со знаком минус.

В проекциях на декартовы оси можно записать формулы для координат центра параллельных сил:

$$x_C = \frac{\sum x_i F_i}{R}, \quad y_C = \frac{\sum y_i F_i}{R}, \quad z_C = \frac{\sum z_i F_i}{R}. \quad (3.4)$$

Положение центра параллельных сил приходится определять во многих практических случаях (давление грунта на подпорную стенку, давление ветра на сооружение, подъемные силы, действующие по закону Архимеда на днище корабля, и т.п.).

### 3.2. Центр тяжести твердого тела

На все материальные тела, находящиеся на поверхности земли (как движущиеся, так и покоящиеся относительно земли), действуют силы притяжения (в соответствии с законом всемирного тяготения), направленные к центру земли. За счет вращения земли к этим силам добавляется небольшая поправка, величина которой зависит от широты местности. С учетом этой поправки вес тела, или сила тяжести, направлена не точно к центру земли. Но этим отклонением можно пренебречь. Рассматривая материальные тела небольших размеров (по сравнению с радиусом земли), можно утверждать, что поверхность земли плоская и на все частицы тела действует система параллельных сил тяжести. *Центр этой системы параллельных сил называется центром тяжести тела.*

В соответствии с выражениями (3.4) радиус-вектор и координаты центра тяжести твердого тела будут выражаться формулами:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum \mathbf{r}_i P_i}{P}; \quad (3.5)$$

$$x_C = \frac{\sum x_i P_i}{P}, \quad y_C = \frac{\sum y_i P_i}{P}, \quad z_C = \frac{\sum z_i P_i}{P}, \quad (3.6)$$

где  $P = \sum P_i$  — вес твердого тела. Ось  $OY$  перпендикулярна плоскости чертежа.

### 3.3. Способы определения положения центра тяжести

При практическом определении положения центра тяжести конкретных материальных тел учитывают такие важные обстоятельства, как однородность материала и симметрия конфигурации тела.

Способы определения положения центра тяжести рассмотрим на примерах.

*Способ разбиения плоской фигуры на простые элементы*

**Пример 3.1.** Требуется найти центр тяжести плоской фигуры, которая вырезана из однородной пластины постоянной толщины. Ее размеры показаны на рис. 3.3.

**Решение.** Разбиваем заданную фигуру на три прямоугольника. Центры тяжести этих простейших элементов находятся в точках пересечения диагоналей.

Поскольку фигура плоская, требуется найти только две координаты. Ввиду однородности материала и постоянства толщины пластины вместо веса можно рассматривать площади элементов:

$$x_C = \frac{\sum x_i A_i}{A}; \quad y_C = \frac{\sum y_i A_i}{A}.$$

Здесь  $A_i$  — площади элементов фигуры;  
 $A$  — площадь всей заданной фигуры.

Процесс вычислений приведен в табл. 3.1.

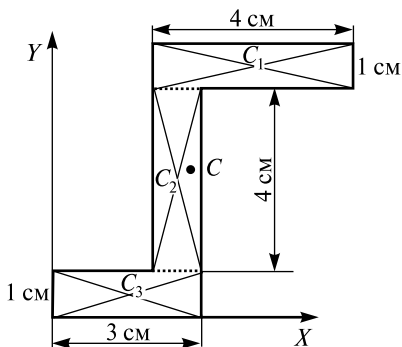


Рис. 3.3. Плоская фигура

Таблица 3.1

Процесс вычислений центра тяжести

№	$A_i$	$x_i$	$y_i$	$x_i A_i$	$y_i A_i$
1	4	4	5,5	16	22
2	4	2,5	3	10	12
3	3	1,5	0,5	4,5	1,5
	$\Sigma A_i = 11$			$\Sigma x_i A_i = 30,5$	$\Sigma y_i A_i = 35,5$

$$x_C = \frac{\sum x_i A_i}{A} = \frac{30,5}{11} = 2,77 \text{ см}; \quad y_C = \frac{\sum y_i A_i}{A} = \frac{35,5}{11} = 3,23 \text{ см}.$$

Точка  $C$  показана на рис. 3.3.

Выражения  $\sum x_i A_i$  и  $\sum y_i A_i$  называются *статическими моментами площадей относительно осей координат*.

Статический момент имеет размерность длины в третьей степени и выражается в  $\text{м}^3$  ( $\text{см}^3$ ). В зависимости от положения оси, относительно которой вычисляется статический момент, он может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной*.

Если сечение имеет ось или центр симметрии, то определение положения центра тяжести упрощается — он лежит соответственно на оси симметрии или на пересечении этих осей.

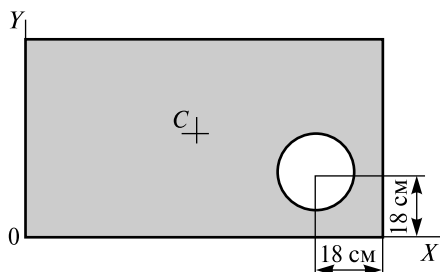


Рис. 3.4. Пластина с вырезом

### Способ отрицательных площадей

Использование этого способа рассмотрим на конкретном примере.

**Пример 3.2.** Из однородной прямоугольной пластины с размерами 100-50 см вырезан круг радиуса 9 см (рис. 3.4). Найти центр тяжести оставшейся части.

*Решение.* Найдем площади двух элементов:

$$A_1 = 100 \cdot 50 = 5000 \text{ см}^2, \quad A_2 = \pi r^2 = 3,14 \cdot 9^2 = 254,5 \text{ см}^2.$$

Используем те же формулы, что и в примере 3.1. Вырезанную площадь считаем отрицательной:

$$x_C = \frac{\sum x_i A_i}{A} = \frac{50 \cdot 5000 - 72 \cdot 254,5}{5000 - 254,5} = 48,8 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{\sum y_i A_i}{A} = \frac{25 \cdot 5000 - 18 \cdot 254,5}{5000 - 254,5} = 25,4 \text{ см}.$$

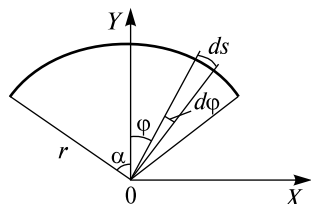
Точка C показана на рис. 3.4. Она смещена от центра прямоугольника вверх на 0,4 см и влево на 1,2 см.

Если использовать симметрию прямоугольника и выбрать исходные оси координат с началом в его центре, то в ответе получатся как раз эти смещения.

### Использование способа интегрирования

**Пример 3.3.** Найти центр тяжести дуги окружности (рис. 3.5).

*Решение.* Разобьем дугу на бесконечно малые элементы. Ось Y совместим с осью симметрии. Тогда положение центра тяжести определяется выражениями:



$$x_C = 0, \quad y_C = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} y ds}{S}.$$

где  $S = \int_{-\alpha}^{\alpha} ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} r d\phi = 2r\alpha$  — длина дуги окружности.

Рис. 3.5. Дуга окружности



Вычисляем

$$y_C = \frac{\int y ds}{S} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r \cos \varphi r d\varphi}{2r\alpha} = \frac{2r^2 \sin \alpha}{2r\alpha} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}.$$

Если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то получаем  $y_C = r \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) : \frac{\pi}{2} = \frac{2r}{\pi}$ .

**Пример 3.4.** Найти центр тяжести кругового сектора (рис. 3.6).

*Решение.* Разобьем сектор на бесконечно малые треугольники. Их центры тяжести расположены на пересечении медиан треугольников; они ложатся на дугу окружности радиуса  $2r/3$ . Поэтому можно воспользоваться формулой (3.7):

$$y_C = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}.$$

Если  $\alpha = \pi/2$  (сектор — половина круга), то получаем

$$y_C = \frac{4r}{3\pi}.$$

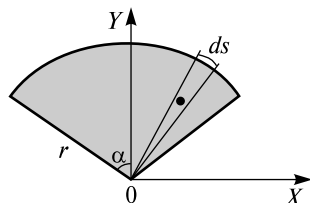


Рис. 3.6. Круговой сектор

### Использование способа взвешивания

**Пример 3.5.** Найти центр тяжести твердого тела, составленного из нескольких тел (рис. 3.7).

*Решение.* Предполагая, что у составного тела есть две плоскости симметрии, можно найти положение центра тяжести, выполнив два взвешивания. Первое взвешивание дает возможность найти вес  $P$ . Второе взвешивание необходимо выполнить, закрепив шарнирно одну точку тела (см. рис. 3.7). Записав условие равновесия

$$\sum M = 0, \quad Px_C - NL = 0,$$

измерив расстояние  $L$  и учитывая показание весов  $N$ , получаем искомую координату

$$x_C = \frac{NL}{P}.$$

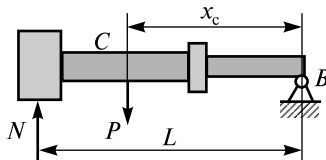


Рис. 3.7. Использование способа взвешивания

В примере 3.5 рассмотрено составное тело, элементы которого имеют

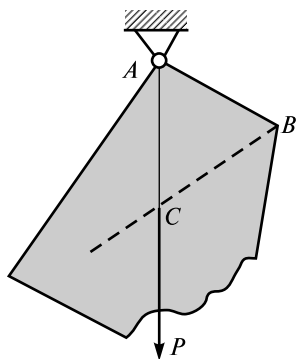


Рис. 3.8. Использование способа подвешивания твердого тела

простую конфигурацию. При этом можно найти центр тяжести аналитическим путем, как это сделано в примере 3.1. Но способ взвешивания особенно эффективен в случае сложной системы. Например, его можно применить к определению положения центра тяжести самолета. Это очень важно для организации управления полетом.

### *Использование способа подвешивания*

Если твердое тело подвесить, прикрепив трос к одной его точке, то центр тяжести будет расположен на вертикали. Этим обстоятельством можно воспользоваться для фиксации положения центра тяжести.

На рис. 3.8 показано плоское твердое тело с границами, которые трудно описать аналитически. Подвесив его за точку  $A$ , можно провести на теле вертикаль, пользуясь отвесом. Затем опыт можно повторить, подвесив тело за точку  $B$ . Пересечение вертикалей укажет положение центра тяжести  $C$  тела.

Способ подвешивания можно использовать для проверки результатов вычислений в рассмотренных примерах. С этой целью следует изготовить модели рассматриваемых тел.

## **Глава 4. ТРЕНИЕ**

### **4.1. Основные замечания**

При контакте двух материальных тел возникает явление, которое называется *трением*. Природа этого явления изучается в физике, поскольку, кроме механических причин, в этом явлении участвуют причины внутримолекулярного, термического, электрического характера.

В машинах и механизмах для уменьшения влияния трения между деталями вводят слой смазки.

### **4.2. Трение при скольжении**

Рассмотрим простой пример — равновесие твердого тела на шероховатой наклонной плоскости (рис. 4.1).

При малых значениях угла  $\alpha$  тело весом  $P$  находится в покое по отношению к наклонной неподвижной плоскости. Для объяснения этого факта необходимо ввести в рассмотрение, кроме нормальной реакции  $N$ , силу  $F$ , возникающую между двумя телами. Таким образом, вводится новое понятие.

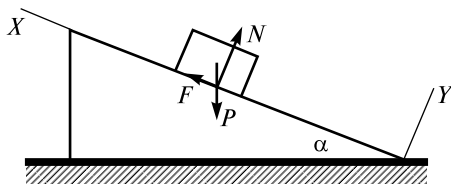


Рис. 4.1. Равновесие тела на шероховатой плоскости

*Количественной мерой трения при скольжении является сила трения.*

Найдем реакции наклонной плоскости:

$$\begin{aligned} \sum X = 0, \quad F - P \sin \alpha = 0, \quad F &= P \sin \alpha; \\ \sum Y = 0, \quad N - P \cos \alpha = 0, \quad N &= P \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Как видим, сила трения входит в число неизвестных и определяется из уравнений равновесия.

При увеличении угла наклона  $\alpha$  наступает такой момент, когда равновесие нарушается; это состояние называется предельным; начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

Все исследователи явления трения при скольжении изучали предельное состояние равновесия. Схема *опытов Морена* (рис. 4.2) приводится во всех учебниках механики. Увеличивая постепенно размер груза  $Q$ , можно зафиксировать максимальное значение силы трения, когда наступает предельное состояние равновесия.

Наибольшей известностью пользуются результаты *опытов Кулона*, который сформулировал законы сухого трения при скольжении:

1. *Сила трения — реактивная, она возникает в ответ на действие.*

2. *Сила трения направлена в сторону, противоположную движению (или возможному движению).*

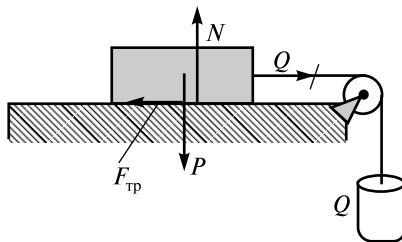


Рис. 4.2. Схема опытов Морена

3. Максимальное значение силы трения наблюдается в состоянии предельного равновесия; оно пропорционально нормальной реакции:

$$F_{\max} = fN.$$

4. Коэффициент пропорциональности  $f$  называется коэффициентом трения при скольжении. Его величина находится опытным путем и зависит, главным образом, от материала взаимодействующих тел, а также от их физического состояния (температуры, влажности, качества обработки поверхностей контакта).

Приведенные в табл. 4.1 данные относятся к предельному состоянию. Если началось движение, то величина коэффициента трения в зависимости от скорости движения немного снижается.

Таблица 4.1

Коэффициенты трения при скольжении

Материал	$f$
Дерево по дереву	0,4...0,7
Пеньковый канат по дереву	0,500
Кожаный ремень по чугуну	0,300
Сталь по стали	0,150
Бронза по чугуну	0,160
Бронза по железу	0,190
Сталь по льду	0,027

Рассматривая тело, показанное на рис. 4.1, в предельном состоянии равновесия  $F = F_{\max} = fN$ , найдем из выражений (4.1)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{\max}}{N} = \frac{fN}{N} = f.$$

Угол, тангенс которого равен коэффициенту трения, называется *углом трения*. Этот же угол является углом естественного откоса: сыпучее тело (песок, зерно, и т.п.) может занимать объем, поверхности которого будут наклонены под углом  $\alpha$  к горизонтальной плоскости.

**Пример 4.1.** Свободная материальная точка, масса которой 3 кг, движется согласно уравнению  $S = 5t^2 + 3t$ . Определить величину движущей силы.

*Решение.* Определим ускорение точки как вторую производную от пути, оно будет равно  $10 \text{ м/с}^2$ , тогда согласно основному закону динамики  $F = ma$ ;  $F = 3 \cdot 10 = 30 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2$ .

**Пример 4.2.** К двум материальным точкам массой,  $m_1 = 5$  кг и  $m_2 = 10$  кг приложены одинаковые силы. Сравните величины ускорений.

*Решение.* Известно, что ускорение обратно пропорционально массам:

$$a_1 / a_2 = m_2 / m_1, \text{ откуда } a_1 = 2a_2.$$

**Пример 4.3.** Груз весом  $P$  лежит на шероховатой наклонной неподвижной плоскости. Трос, перекинутый через блок, натягивается грузом  $Q$  (рис. 4.3). Пренебрегая весом троса, определить значения веса  $Q$ , при которых обеспечивается равновесие всей системы.

*Решение.* В зависимости от соотношения сил  $P$  и  $Q$  система может находиться в равновесии или двигаться. Предположим, что груз  $P$  опускается по наклонной плоскости. Тогда сила трения направлена вверх по наклону. Перерезав мысленно трос, покажем его натяжение, равное весу груза  $Q$ . На рис. 4.3 изображено это состояние системы. Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum Y = 0, \quad N - P \cos \alpha = 0, \quad N &= P \cos \alpha; \\ \sum X = 0, \quad F + Q - P \sin \alpha = 0, \quad Q &= P \sin \alpha - F = P \sin \alpha - Pf \cos \alpha. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что груз  $Q$  опускается, увлекая за собой и груз  $P$ . Тогда сила трения повернется в другую сторону, и решение будет иметь такой вид:

$$Q = P \sin \alpha + F = P \sin \alpha + Pf \cos \alpha.$$

В результате имеем ответ — равновесие системы возможно, если сила  $Q$  находится в интервале

$$P(\sin \alpha - f \cos \alpha) < Q < P(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

При выходе из этого интервала, т.е. при наступлении предельных состояний, начинается движение системы в одном из возможных направлений.

**Пример 4.4.** Кронштейн, нагруженный вертикальной силой  $P = 600$  Н, прикреплен к стене двумя болтами (рис. 4.4). Определить затяжку болтов, необходимую для укрепления кронштейна на стене. Коэффициент трения между кронштейном и стеной  $f = 0,3$ . Расчет произвести в

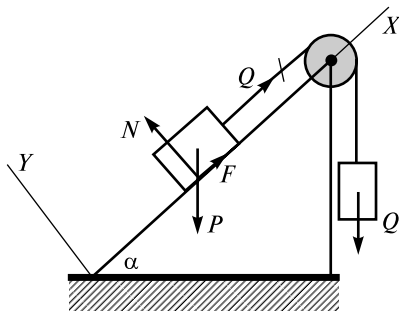


Рис. 4.3. Равновесие системы

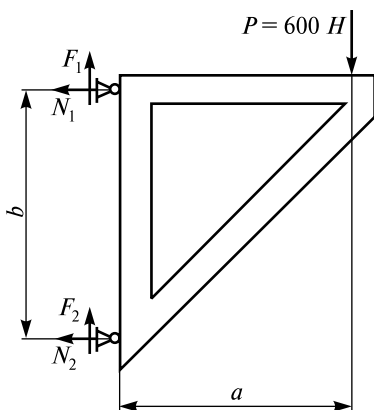


Рис. 4.4. Учет сил трения

предположении, что затянут только верхний болт и болты не работают на срез. Дано  $b/a > f$ .

*Решение.* Точка 2 прижимается к стене с силой  $N_2$ , создающей силу трения  $F_2$ . Из уравнения равновесия:

$$\sum m_1 = 0, Pa - N_2 b = 0.$$

Определим  $N_2$ :

$$N_2 = Pa/b.$$

Сила трения будет:

$$F_2 = fN_2 = fPa/b.$$

Составим еще одно уравнение равновесия и определим растягивающее усилие в болте  $N_1$ :

$$\sum x = 0, N_1 - N_2 = 0, N_1 = Pa/b.$$

$N_1$  создать  $F_1$  не может, поэтому усилие в затяжке болта должно компенсировать растяжение  $N_1$  от  $P$ .

$F_1$  найдем из условия равновесия проекций сил на вертикальную ось:

$$\sum y = 0, F_1 + F_2 - P = 0.$$

$$F_1 = P - F_2 = P - f(Pa)/b = P(1 - fa/b).$$

Тогда вторая составляющая силы затяжки составит:

$$F_1 = fN_1^*, \text{ откуда } N_1^* = F_1/f = P(1 - fa/b)/f = P(1/f - a/b).$$

Тогда усилие затяжки

$$N_\Sigma = N_1 + N_1^*;$$

$$N_\Sigma = Pa/b + P(1/f - a/b) = Pa/b + P \cdot 1/f - Pa/b = P/f = 600/0,3 = 2000 \text{ Н.}$$

### 4.3. Трение качения

Рассмотрим равновесие цилиндрического катка на шероховатой поверхности (рис. 4.5). В рамках концепции абсолютно твердого тела контакт цилиндрического катка с плоской поверхностью осуществляется по линии; на рис. 4.5,  $a$  — след этой линии, т.е. точка. В этой точке действует нормальная реакция поверхности  $N$ . Ввиду шероховатости поверхности (в ответ на действие активной силы  $Q$ ) возникает горизонтально расположенная реакция  $F$ .

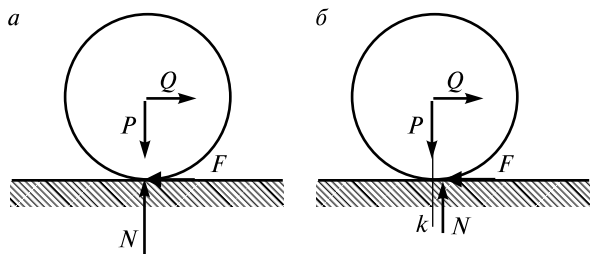


Рис. 4.5. Равновесие катка на шероховатой поверхности (а); след области контакта (б)

В точке опоры катка сходятся линии действия трех сил, следовательно, момент силы  $Q$  относительно этой точки не равен нулю при любой, самой незначительной ее величине. На практике этого не наблюдается — нужны заметные старания для начала качения катка.

Для объяснения ситуации нужно отказаться от концепции абсолютно твердого тела и обратить внимание на упругость материала катка и податливость шероховатой поверхности. Взаимное смятие двух взаимодействующих объектов приводит к тому, что их контакт осуществляется по некоторой области, на рис. 4.5, б — след этой области, небольшой отрезок. Реактивные силы, действующие в этой области, приводятся к равнодействующей, смещенной в сторону возможного качения катка.

Сосредоточим внимание на предельном состоянии, когда каток может начать качение. Обозначив смещение нормальной реакции в состоянии предельного равновесия через  $k$ , можно записать условия этого равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, \quad F = Q; & \sum Y &= 0, \quad N = P; \\ \sum M_C &= 0, & Nk - Fr &= 0; & F &= \frac{k}{r} N. \end{aligned} \quad (4.2)$$

*Параметр  $k$  называется коэффициентом трения при качении, он имеет размерность длины.* По величине  $k$  намного меньше радиуса катка  $r$ , поэтому в уравнении моментов не учтено влияние  $k$  на размер плеча силы  $F$  относительно точки  $C$ .

В табл. 4.2 приведены некоторые экспериментальные данные.

Таблица 4.2

## Коэффициенты трения при качении

Материал	$k$ , мм
Дерево по дереву	0,5...0,8
Дерево по стали	0,3...0,4
Сталь мягкая по стали (колесо по рельсу)	0,05
Сталь закаленная по стали (шариковый подшипник)	0,01

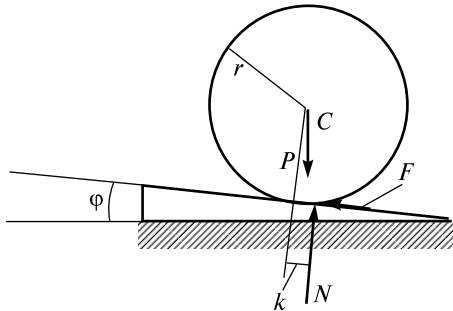
Как видно из выражения (4.2), сила трения при качении меньше, чем сила трения при скольжении:

$$F = \frac{k}{r} N < fN. \quad (4.3)$$

Выражение (4.3) очень важно для железнодорожной техники. Так, например, подшипники качения имеют преимущество перед подшипниками скольжения. Подвижной состав железнодорожного транспорта давно переведен на подшипники качения.

Определим угол наклона  $\varphi$  плоскости, при котором еще возможно равновесие находящегося на ней катка или колеса (рис. 4.6).

Проектируя силы на оси и используя выражение (4.2), получаем:



$$N = P \cos \varphi, \quad F = P \sin \varphi,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{N} = \frac{k}{r}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left( \frac{k}{r} \right).$$

Колеса грузового вагона имеют радиус 475 мм. Принимая по табл. 4.2  $k = 0,05$  мм, находим  $\varphi = 0,006^\circ$ . Практически никакого наклона допускать нельзя. Поэтому под колеса стоящих (даже на горизонтальном пути) вагонов укладывают «башмаки».

Рис. 4.6. Предельное равновесие катка

Рис. 4.6. Предельное равновесие катка



## Глава 5. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

### 5.1. Основные понятия

*Раздел механики, занимающийся изучением движения материальных тел без учета их масс и действующих на них сил, называется кинематикой.*

Движение является формой существования материи. Ввиду этого можно только условно считать какое-то тело неподвижным. Для многих процессов, происходящих на нашей планете, Землю можно считать неподвижной.

При рассмотрении *материальной точки* имеем дело с *геометрической точкой*, поэтому будем ее называть просто *точкой*.

Движение любого объекта можно наблюдать только по отношению к другому объекту. Поэтому следует различать *наблюдаемую*, или *рассматриваемую точку*, а также тело, на котором находится (как правило, мысленно) наблюдатель. Это второе тело называют телом отсчета или *системой отсчета*.

Для возможности измерения расстояний и сопоставления взаимного расположения точки и системы отсчета выбирается *система координат*. Ввиду краткости курса будем во всех задачах использовать, как правило, декартову систему координат.

Линию, по которой движется точка, будем называть *траекторией*. Траектория может быть прямой и кривой, плоской и пространственной линией.

Положение точки на траектории в любой момент времени можно указать, задав *закон движения*.

При движении точка за определенный промежуток времени проходит некоторый *путь*, который измеряется вдоль траектории в направлении движения. При движении точки из любого начального положения *путь* может только возрасти, следовательно, *путь* — *величина положительная*.

### 5.2. Скорость и ускорение точки при векторной и координатной формах выражения закона движения

Векторная величина, характеризующая в данный момент быстроту и направление движения по траектории, называется *скоростью*.

За единицу скорости принимают метр в секунду (м/с). Иногда скорость измеряют км/ч:  $1 \text{ км/ч} = 1000/3600 = 0,278 \text{ м/с}$ .

Скорость — вектор  $V(t)$ , в любой момент направленный по касательной к траектории в сторону направления движения.

Если точка за равные промежутки времени проходит равные расстояния, то движение называется *равномерным*.

Соответственно, если точка за равные промежутки времени проходит неравные расстояния, то движение называется *неравномерным*.

Векторная форма записи  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  и координатная форма записи закона движения  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  связаны между собой:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — орты (единичные векторы) системы координат (в отличие от скаляров векторные величины, как и в статике, изображаем *полужирным шрифтом*).

При векторной форме записи закона движения вектор скорости  $V(t)$  и вектор ускорения  $\mathbf{a}(t)$  вводятся в рассмотрение как первая и вторая производные от радиус-вектора  $\mathbf{r}(t)$  движущейся точки  $M$ :

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}. \quad (5.2)$$

При координатной форме записи закона движения из выражений (5.1) и (5.2) вытекают следующие формулы для компонент векторов скорости и ускорения:

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \frac{dz}{dt}; \quad (5.3)$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt}. \quad (5.4)$$

*Ускорение точки — это векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению.*

За единицу ускорения принимают обычно  $1 \text{ м/с}^2$ . Нормальное ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости к центру дуги. Касательное ускорение характеризует изменение скорости по величине и всегда направлено по касательной к траектории; при ус-

корении его направление совпадает с направлением скорости, а при замедлении оно направлено противоположно направлению вектора скорости.

**Пример 5.1.** Определить траекторию по заданному закону движения, если точка движется согласно уравнению

$$y = b \cos kt, \quad x = a \sin(kt/2).$$

**Решение.** Определим уравнение траектории точки. Для этого из второго уравнения выразим  $\sin(kt/2)$ , он будет равен  $x/a$ . В первом выражении стоит функция косинуса двойного угла. Согласно известному тригонометрическому выражению  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$  получим

$$y = b(1 - 2 \sin^2(kt/2)).$$

Подставив в данное выражение ранее определенное значения  $\sin(kt/2)$ , получим

$$y = b(1 - 2(x/a)^2) = b - 2(b/a^2)x^2.$$

Таким образом, получена квадратичная функция, графиком которой является парабола (рис. 5.1).

**Пример 5.2.** Определить и показать на рисунке траекторию движения точки, движущейся по закону:  $x = 3 - 2 \sin(4t)$ ,  $y = 3 \cos(4t) - 2$ . Найти величину и направление векторов скорости и ускорения для моментов времени  $t_0 = 0$  и  $t_1 = \pi/8$ .

**Решение.** Для получения уравнения траектории необходимо исключить время  $t$  из уравнений движения, выразив  $\sin(4t)$  и  $\cos(4t)$  из заданных уравнений движения. Используем известную из тригонометрии зависимость:  $\sin^2(4t) + \cos^2(4t) = 1$ . Получаем для траектории уравнение

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Известно, что это уравнение эллипса с полуосями  $b_x = 2$  и  $b_y = 3$ .

Центр эллипса  $C$  смещен от начала координат, его координатами являются те числа, которые вычитаются из значений текущих координат, стоящих в скобках:  $x_c = 3$ ,  $y_c = -2$ . Теперь нетрудно изобразить эллипс (см. рис. 5.2).

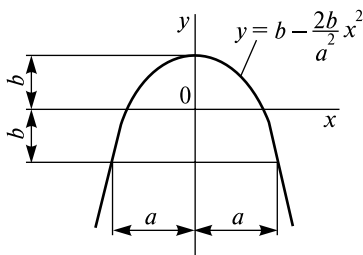


Рис. 5.1

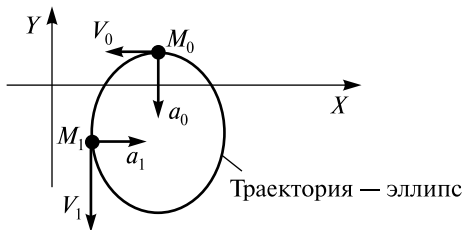


Рис. 5.2

В соответствии с формулами (5.3) и (5.4) находим компоненты скорости и ускорения и модули этих векторов:

$$V_x = -8 \cos(4t), \quad V_y = -12 \sin(4t), \quad V = 4\sqrt{4\cos^2(4t) + 9\sin^2(4t)};$$

$$a_x = 32 \sin(4t), \quad a_y = -48 \cos(4t), \quad a = 16\sqrt{4\sin^2(4t) + 9\cos^2(4t)}.$$

На рис. 5.2 показаны два фиксированных положения движущейся точки ( $t_0 = 0$  и  $t_1 = \pi/8$ ), а также векторы скорости и ускорения.

### 5.3. Скорость и ускорение точки при естественной форме выражения закона движения

*Естественной* называют форму выражения закона движения точки, когда известна траектория и зависимость от времени дуговой координаты, отсчитываемой от некоторой точки на траектории. Как видно (рис. 5.3), элемент дуги может быть выражен через дифференциалы координат:  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ , а закон движения  $s = s(t)$  находится интегрированием:

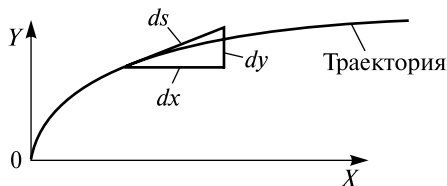
$$s = \int_0^s ds, \quad \text{или} \quad s = \int_0^s \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (5.5)$$

В качестве пояснения попытаемся определить закон движения в естественной форме для условий примера 5.2.

Вычисляем дифференциалы координат:

$$dx = -8 \cos(4t) dt, \quad dy = -12 \sin(4t) dt.$$

Тогда закон движения в естественной форме можно записать в виде интеграла



$$s = \int_0^s ds = \int_0^s \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^t 4\sqrt{4\cos^2(4t)^2 + 9\sin^2(4t)^2} dt.$$

Рис. 5.3. Траектория точки и дифференциалы координат

Интегралы подобного типа не могут быть выражены через элементарные функции. Эти функции тщательно изучены и называются *эллиптическими функциями*. Для них имеются подробные таблицы. В частности, эллиптические интегралы требуются для вычисления расстояний, проходимых планетами Солнечной системы (или искусственными спутниками Земли).

Если точка движется по окружности, то числовые множители при тригонометрических функциях будут одинаковыми и подынтегральное выражение существенно упрощается. При движении по прямолинейной траектории также легко найти закон движения в виде конечного аналитического выражения.

Скорость точки может быть определена как производная по времени от закона движения:

$$V = ds / dt = \dot{s}. \quad (5.6)$$

Ускорение точки, касательная и нормальная составляющие вычисляются по выражениям:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \dot{V}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad (5.7)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны траектории.

Значение *полного* ускорения определяется как геометрическая сумма векторов

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (5.8)$$

**Пример 5.3.** Построить траекторию движения точки  $M$  и определить радиус кривизны траектории (рис. 5.4), если точка движется согласно уравнениям (расстояния в метрах, время в секундах):

$$x = 2t, \quad y = 8t^3.$$

**Решение.** Исключая время  $t$  из уравнений движения, получаем уравнение кубической параболы  $y = x^3$ , причем при построении траектории

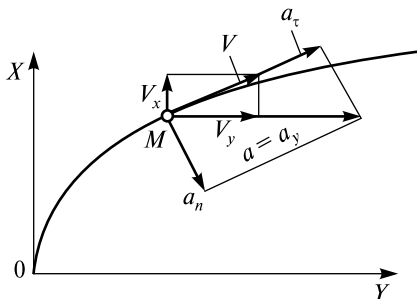


Рис. 5.4

следует учесть ограничение, накладываемое первым из уравнений движения:  $x \geq 0$ . Ввиду этого ограничения собственно траекторией является только положительная ветвь параболы (неиспользуемая ветвь на рис. 5.4 не показана).

Пользуясь формулами (5.3) и (5.4), находим выражения компонентов и модулей векторов скорости и ускорения точки  $M$ :

$$V_x = \dot{x} = 2, \quad V_y = \dot{y} = 24t^2, \quad V = 2\sqrt{1+144t^4};$$

$$a_x = \dot{V}_x = 0, \quad a_y = \dot{V}_y = 48t, \quad a = 48t.$$

Теперь, используя формулы (5.7), находим касательную и нормальную составляющие вектора ускорения, а также радиус кривизны траектории:

$$a_\tau = \dot{V} = \frac{d}{dt} \left( 2\sqrt{1+144t^4} \right) = \frac{576t^3}{\sqrt{1+144t^4}};$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{48^2 t^2 - \frac{576^2 t^6}{1+144t^4}} = \frac{48t}{\sqrt{1+144t^4}},$$

$$\rho(t) = \frac{V^2}{a_n} = \frac{(1+144t^4)^{3/2}}{12t}.$$

В табл. 5.1 приведены числовые значения кинематических параметров движущейся точки для трех значений времени  $t$ . Обратим внимание на тот факт, что радиус кривизны траектории при  $t = 0$  обращается в бесконечность. Это соответствует точке перегиба на кривой, в начале координат у кубической параболы меняется знак кривизны.

Таблица 5.1

**Числовые значения кинематических параметров**

$t, c$	$V_x$	$V_y$	$V, \text{ м/с}$	$a_x$	$a_y$	$a, \text{ м/с}^2$	$a_\tau$	$a_n$	$\rho, \text{ м}$
0	2	0	2	0	0	0	0	0	$\infty$
0,1	2	0,24	2,014	0	4,8	4,8	0,572	4,76	0,833
1	2	24	24,08	0	48	48	47,83	3,99	145,5

## Глава 6. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Произвольное движение абсолютно твердого тела может быть представлено как сложение двух или нескольких простейших движений. Поэтому необходимо рассмотреть эти простейшие движения, а затем приступить к изучению их совокупности.

### 6.1. Поступательное движение

*Поступательным называют движение твердого тела в том случае, когда любая прямая, принадлежащая телу, сохраняет параллельность самой себе.*

Из всех разновидностей движений тел поступательное наиболее простое. В качестве примеров такого движения можно указать перемещение в пространстве произвольного твердого тела (рис. 6.1) или кабинки на колесе обозрения, ползуна кривошипно-ползункового механизма. Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным.

Нетрудно доказать, что *траектории* всех точек тела при поступательном движении *конгруэнтны* (полностью совпадают при наложении в пространстве), векторы скоростей и ускорений любых произвольно выбранных точек в данный момент времени *одинаковы*:

$$V_A = V_B, \quad a_A = a_B.$$

При выполнении таких условий нет необходимости рассматривать движение различных точек тела, достаточно выбрать *одну* и получить для нее траекторию, скорость и ускорение. Обычно поступательное движение тела задается движением его центра тяжести

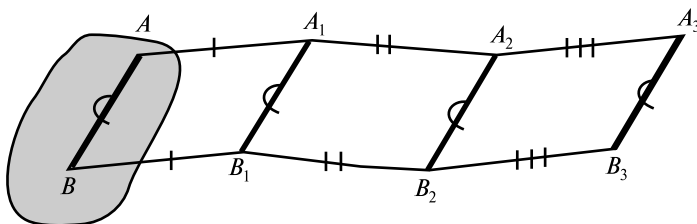


Рис. 6.1. Поступательное движение твердого тела

ти. В этом случае полностью оправдывается существование и широкое использование описанной во введении модели материальной точки. Задача о поступательном движении твердого *тела*, сводится к задаче движения точки, с которой мы уже познакомились.

## 6.2. Вращательное движение твердого тела

*Вращательным называют такое движение твердого тела, при котором по крайней мере две точки, принадлежащие телу, остаются неподвижными.*

В качестве примеров можно привести створку окна или двери, ротор двигателя, любую другую деталь, укрепленную на неподвижной оси. Разумеется, реально неподвижных точек не две, а бесчисленное множество. Однако меньше двух не должно быть.

*Линия, на которой лежат неподвижные точки, называется осью вращения.* Траектории всех точек тела, как нетрудно догадаться, являются *окружностями*, центры которых лежат на оси вращения. Такие окружности называются *концентрическими*.

Твердое тело при вращательном движении имеет *одну степень свободы*. Положение тела в любой момент времени задается *законом вращательного движения*:

$$\varphi = \varphi(t).$$

Интенсивность вращательного движения всего твердого тела как единого целого может быть описана *угловыми кинематическими характеристиками*, вычисляемыми последовательным дифференцированием по времени — угловой скоростью  $\omega$  и угловым ускорением  $\varepsilon$ :

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}. \quad (6.1)$$

Угловые кинематические характеристики  $\omega$  и  $\varepsilon$  являются векторами, расположенными на оси вращения (рис. 6.2). Если векторы направлены в одну сторону, вращение называется *ускоренным*, в противном случае — *замедленным*.

Ввиду того что произвольная точка  $M$  твердого тела при вращательном движении имеет в качестве траектории окружность, удобно воспользоваться для нее законом движения в естественной форме (рис. 6.3):  $\sigma(t) = r\varphi(t)$ .



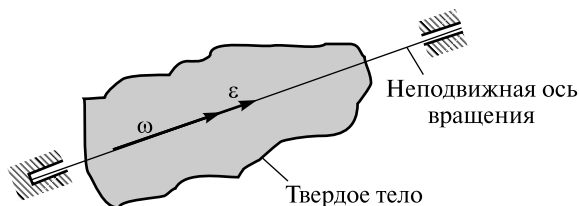


Рис. 6.2. Твердое тело находится в ускоренном вращательном движении

С помощью формул (5.2) — (5.4) можно определить скорость, компоненты и модуль полного ускорения.

Для скорости и компонент ускорения могут быть получены векторные выражения:

$$V = \omega r, a_t = \varepsilon r, a_n = \omega V. \quad (6.2)$$

Этими выражениями мы в дальнейшем воспользуемся.

**Пример 6.1.** На блок радиуса  $R = 0,6$  м намотан нерастяжимый трос, к которому прикреплен груз  $P$  (рис. 6.4). Груз опускается вниз по закону  $x = 10t^3$ . Требуется определить скорость и ускорение точки  $B$ , лежащей на расстоянии  $r = 0,3$  м от оси вращения.

*Решение.* Груз движется поступательно, по прямолинейной траектории. Скорость и ускорение груза как точки находим последовательно дифференцируя закон движения:

$$V = \dot{x} = 30t^2; \quad a = \dot{V} = 60t.$$

Вместе с грузом поступательно движется часть троса до того места, где трос сходит с блока. Поэтому скорость точки обода блока в этом месте равна скорости груза. Через эту скорость можно найти угловую скорость блока и угловое ускорение (путем дифференцирования):

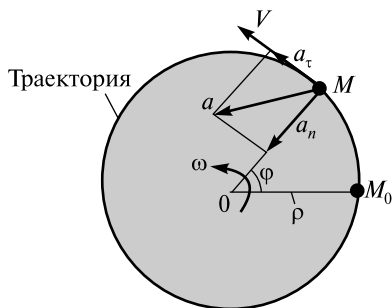


Рис. 6.3. Траектория, скорость и ускорение точки  $M$  тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси

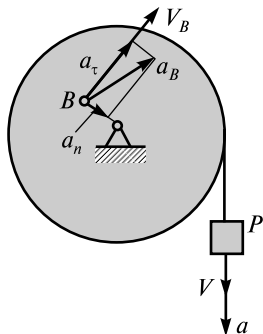


Рис. 6.4. Поступательное движение груза и вращательное движение блока вокруг неподвижной оси

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{30t^2}{0,6} = 50t^2, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = 100t.$$

Вычисляем для точки  $B$  требуемые скорость и ускорение:

$$V_B = \omega r = 50t^2 \cdot 0,3 = 15t^2, \quad a_\tau = \varepsilon r = 100t \cdot 0,3 = 30t;$$

$$a_n = \omega^2 r = (50t^2)^2 \cdot 0,3 = 750t^4, \quad a_B = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

На рис. 6.4 показаны направления векторов. Числовые значения их модулей в момент времени  $t = 0,3$  с такие:

$$V = 2,7 \text{ м/с}; \quad a = 18 \text{ м/с}^2; \quad V_B = 1,35 \text{ м/с};$$

$$a_\tau = 9 \text{ м/с}^2; \quad a_n = 6,075 \text{ м/с}^2; \quad a_B = 10,86 \text{ м/с}^2.$$

Как видно из рис. 6.4, движение груза посредством нерастяжимого троса вызывает вращательное движение блока. Это простейшая ситуация, когда происходит передача движения.

**Пример 6.2.** Маховое колесо начинает вращаться из состояния покоя равноускоренно; через 10 мин после начала движения оно имеет угловую скорость, равную  $2\pi$  рад/с. Сколько оборотов сделало колесо за эти 10 мин.

*Решение.* Поскольку движение равноускоренно, то  $\varepsilon = \text{const}$ . Выражение для скорости и перемещения следующие:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + (\varepsilon t^2)/2.$$

Поскольку движение начинается из состояния покоя,  $\omega_0 = 0$ . Через 10 мин  $\omega = 2\pi$  рад/с.

Из первого уравнения определим  $\varepsilon = \omega/t = 2\pi/600$ . Тогда  $\varphi = (\varepsilon t^2)/2 = (2\pi(600)^2)/(2 \cdot 600) = 2\pi$ , следовательно,  $n = \varphi/2\pi = 600\pi/2\pi = 300$  оборотов.

## Глава 7. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

### 7.1. Основные понятия

*Сложным, или составным, движением принято называть такое, которое складывается из двух или более движений.* Достаточно изучить в подробностях сложение двух движений, и в случае необходимости выработанные алгоритмы повторить еще раз (если нужно — многократно). Необходимость рассмотрения сложного (со-

ставного) движения возникает на практике при сравнении результатов наблюдения за движением одного и того же объекта из двух систем отсчета. Поясним это на двух простейших примерах.

**Пример 7.1.** Вдоль канала с прямолинейными берегами движется теплоход (рис. 7.1) с некоторой скоростью  $V_1$ . Сидящий на корме наблюдатель  $N$  следит за движением шарика  $M$ , который катится по палубе теплохода в сторону носа со скоростью  $V_2$ . На берегу находится второй наблюдатель  $Q$ . Естественно, что наблюдатели видят движение по-разному:  $N$  считает, что шарик катится со скоростью  $V_2$ , а  $Q$  видит движение, скорость которого складывается из двух скоростей:  $V_1 + V_2$ .

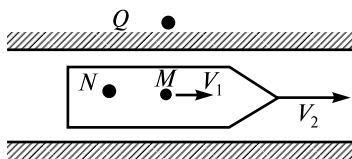


Рис. 7.1

**Пример 7.2.** Диск (например, патефонная пластинка) вращается с угловой скоростью  $\omega_e$  вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости чертежа (рис. 7.2). По радиусу диска, начиная с некоторого момента времени  $t_0$ , движется точка  $M$  со скоростью  $V_1$ . Представим себе существование двух наблюдателей, передающих нам информацию. Первый находится на диске; до момента времени  $t_0$  он справедливо считает точку  $M$  неподвижной. Начиная с момента времени  $t_0$  ему видно движение точки  $M$  по радиусу со скоростью  $V_1$ .

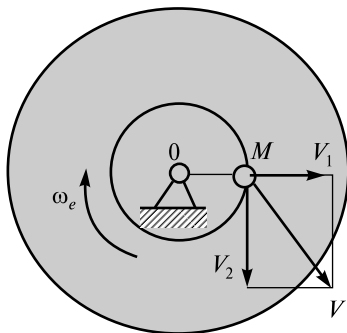


Рис. 7.2

Второй наблюдатель, находящийся на неподвижном объекте, сообщит нам, что до момента времени  $t_0$  точка  $M$ , фиксированная в определенном месте диска, описывает окружность (ввиду вращения диска). Скорость ее движения будет равна  $V_2 = \omega_e OM$ . Начиная с момента времени  $t_0$  вместо окружности он увидит в качестве траектории спираль, причем скорость точки (по его наблюдению) будет геометрически складываться из двух скоростей:  $V = V_1 + V_2$ .

Обобщая сведения, которые мы почерпнули из примеров, перейдем к рассмотрению общего случая. Пусть точка  $M$  движется в пространстве произвольным образом. Для наблюдения за ней введем две системы отсчета (рис. 7.3, на котором показан случай движения в плоскости). Наблюдаемое из неподвижной системы отсчета  $O_1X_1Y_1Z_1$  движение будем называть *абсолютным*; его закон в общем виде

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t). \quad (7.1)$$

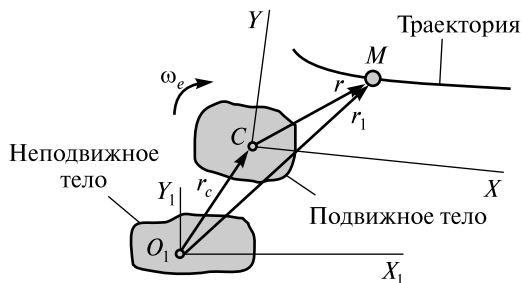


Рис. 7.3. Движение точки  $M$  в плоскости

движение той же точки  $M$  будем называть *относительным*; его закон имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (7.2)$$

Как видно из рис. 7.3, закон абсолютного движения геометрически складывается из закона движения начала координат подвижной системы (точки  $C$ ) и закона относительного движения:

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_c(t) + \mathbf{r}(t). \quad (7.3)$$

Для определения скоростей придется дифференцировать законы движения по времени. При этом появится необходимость дифференцирования единичных векторов подвижной системы координат  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Это можно выполнять в соответствии формулами:

$$d\mathbf{i}/dt = \boldsymbol{\omega}_e \mathbf{j}, \quad d\mathbf{j}/dt = \boldsymbol{\omega}_e \mathbf{k}, \quad d\mathbf{k}/dt = \boldsymbol{\omega}_e \mathbf{i}. \quad (7.4)$$

Содержание этих формул можно истолковать следующим образом: *производная по времени от единичного вектора равна скорости точки его конца при повороте с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}_e$* . Если кроме вращательного движения единичный вектор участвует в поступательном движении, то он не имеет приращения и наличие этого движения не влияет на дифференцирование.

## 7.2. Теорема сложения скоростей

Для получения скорости относительного движения наблюдателю, находящемуся в подвижной системе, необходимо продифференцировать по времени закон относительного движения:

Будем считать для общности, что центр подвижной системы движется по закону  $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c(t)$  и тело, с которым связана эта система, вращается с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}_e$  вокруг оси  $CZ$ . Наблюдаемое из подвижной системы  $CXYZ$  движение

$$V_r = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^*}{dt}(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}. \quad (7.5)$$

Здесь значком \* отмечено дифференцирование, выполняемое в подвижной системе отсчета, при котором не учитывается изменение направления единичных векторов этой системы. Скорость абсолютного движения получит наблюдатель, находящийся в неподвижной системе отсчета, дифференцируя закон абсолютного движения:

$$V = d\mathbf{r}_1 / dt.$$

Необходимо найти связь между этими скоростями. С этой целью используем выражения (7.3) и (7.4):

$$V = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} = V_c + \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega}'_e(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}) \quad (7.6)$$

$$\text{или } V = V_r + V_e, \quad (7.7)$$

где  $V_e = V_c + \boldsymbol{\omega}_e \mathbf{r}$ , причем первое слагаемое — это скорость начала координат подвижной системы. Второе слагаемое представляет собой скорость (приобретаемую за счет вращения подвижной системы) той точки подвижной системы, в которой в данный момент времени зафиксирована рассматриваемая точка  $M$ .

Вернемся к примерам. В первом примере подвижная система (теплоход) движется поступательно, вращение отсутствует. Если шарик зафиксировать на теплоходе, то он будет переноситься со скоростью, равной скорости подвижной системы. Во втором примере у подвижного тела (диска) отсутствует поступательное движение. Если зафиксировать положение наблюдаемой точки  $M$  на диске, то она будет переноситься по окружности со скоростью  $\omega_e OM$ . Теперь мы можем с полным основанием ввести понятие:

*Переносным* следует называть наблюдаемое из неподвижной системы движение той точки подвижной системы, в которой в данный момент времени зафиксирована наблюдаемая точка  $M$ . Скорость этого движения *переносная*.

Теорема сложения скоростей (7.7) состоит в том, что *скорость абсолютного движения точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей*.

### 7.3. Теорема сложения ускорений

Для определения относительного ускорения наблюдателю, находящемуся в подвижной системе, необходимо продифференцировать по времени выражение относительной скорости (при этом не учитывается изменение положения единичных векторов):

$$\mathbf{a}_r = d^* V_r / dt = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}. \quad (7.8)$$

Для получения ускорения в абсолютном движении следует продифференцировать по времени выражение (7.6):

$$\mathbf{a} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{dV_c}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \frac{d^* \mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_e \mathbf{r} \right) = \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_r + \boldsymbol{\omega}_e \dot{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega}_e V_e + 2\boldsymbol{\omega}_e V_r.$$

$$\text{или } \mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_k. \quad (7.9)$$

Получена **теорема Кориолиса**, в соответствии с которой ускорение абсолютного движения геометрически складывается из трех ускорений: относительного, переносного и ускорения Кориолиса.

Ускорение относительного движения выражается формулой (7.8), ускорение переносного движения геометрически складывается в общем случае из ускорения начала координат подвижной системы  $\mathbf{a}_c$ , а также касательного и нормального ускорений, возникающих за счет вращения подвижной системы:

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_c + \mathbf{a}_{e\tau} + \mathbf{a}_{en},$$

причем

$$\mathbf{a}_{e\tau} = \varepsilon_e \mathbf{r}; \quad \mathbf{a}_{en} = \boldsymbol{\omega}_e V_e. \quad (7.10)$$

Ускорение Кориолиса, или *кориолисово ускорение*, выражается формулой

$$\mathbf{a}_k = 2\boldsymbol{\omega}_\tau V_\tau. \quad (7.11)$$

Эта составляющая абсолютного ускорения точки в сложном движении появляется за счет взаимодействия относительного и переносного движений. Направление вектора  $\mathbf{a}_k$  находится в соответствии с правилом векторного произведения, а модуль выражается формулой

$$a_k = 2\omega_e V_\tau \sin \alpha, \quad (7.12)$$

где  $\alpha$  — угол между направлениями векторов  $\boldsymbol{\omega}_e$  и  $V_\tau$ .

Кориолисово ускорение обращается в нуль в трех случаях: когда равны нулю либо угловая скорость переносного движения, либо относительная скорость точки  $M$ ; а также в случае коллинеарности векторов  $\omega_e$  и  $V_r$  ( $\sin \alpha = 0$ ).

**Пример 7.3.** Найти (как функции времени) абсолютные скорость и ускорение точки  $M$ , если известно, что  $s = OM = 2t^3$  и  $\omega_e = 2t^2$ , (рис. 7.4).

**Решение.** Подвижную систему координат связываем с диском. неподвижную систему — с землей. Показывать ее на рисунке не обязательно. В соответствии с формулами (7.5)–(7.7) вычисляем скорости. Относительная  $V_r = \dot{s} = 6t^2$ , переносная  $V_e = \omega_e s = 2t^2 2t^3 = 4t^5$ , абсолютная скорость равна их геометрической сумме и ее модуль вычисляется по теореме Пифагора:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{36t^4 + 16t^{10}} = 2t^2 \sqrt{9 + 4t^6}.$$

Для вычисления модулей векторов ускорений используем формулы (7.8)–(7.12):

$$\begin{aligned} a_r &= 12t; \quad \varepsilon_e = \dot{\omega}_e = 4t; \quad a_{e\tau} = \varepsilon_e s = 4t \cdot 2t^3 = 8t^4; \\ a_{en} &= \omega_e^2 s = 4t^2 \cdot 2t^3 = 8t^7; \quad a_k = 2\omega_e V_r \sin 90^\circ = 2 \cdot 2t^2 \cdot 6t^2 = 24t^4. \end{aligned}$$

Учитывая расположение векторов на рисунке, находим модуль абсолютного ускорения точки  $M$ :

$$a = \sqrt{(a_r - a_{en})^2 + (a_{e\tau} + a_k)^2} = \sqrt{(12t - 8t^7)^2 + (8t^4 + 24t^4)^2}.$$

Возможные упрощения полученного выражения умышленно не выполнены, чтобы читатель смог проследить за всеми выкладками. В момент времени  $t_1 = 1$  с получаем  $V_M = 7,21$  м/с,  $a_M = 32,25$  м/с<sup>2</sup>. На рис. 7.4 показаны векторы скорости  $V_M$  и ускорения  $a_M$  точки  $M$  в абсолютном движении (с учетом соотношения их компонент по осям).

**Пример 7.4.** Кривошип соединяет оси  $O_1$  и  $O_2$  двух зубчатых колес 1 и 2 (рис. 7.5, а). Колесо 1 остается неподвижным, а кривошип 3 вращается вокруг оси  $O_1$  с угловой скоростью  $\omega_3 = 3\pi$  рад/с. Зная радиусы колес  $r_1 = 20$  см и  $r_2 = 15$  см, вычислить для колеса 2 его абсолютную угловую скорость  $\omega_2$  и его относительную угловую скорость  $\omega_{23}$  по отношению к кривошипу.

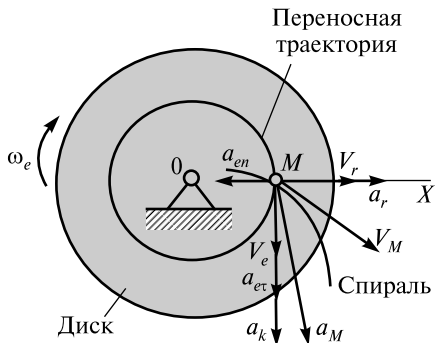


Рис. 7.4

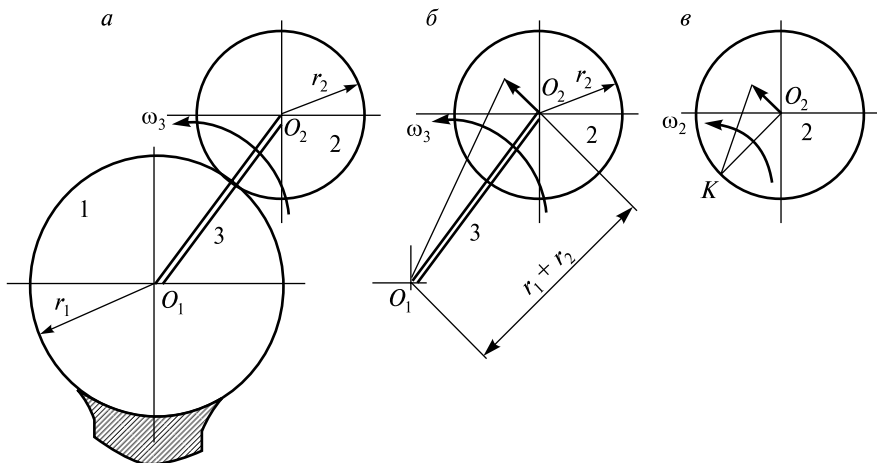


Рис. 7.5. Кривошип, соединяющий оси колес (а); мгновенный центр скоростей для кривошипа (б); мгновенный центр скоростей для второго колеса (в)

*Решение.* Для кривошипа 3 мгновенный центр скоростей в точке  $O_1$  (рис. 7.5, б). Тогда линейная скорость точки  $O_2$  будет равна

$$V_{O_2} = \omega_3(r_1 + r_2).$$

Для колеса 2 мгновенный центр скоростей расположен в точке  $K$ , точке сцепления колеса 1 и колеса 2 (рис. 7.5, в). Тогда абсолютная угловая скорость  $\omega_2$  будет равна

$$\omega_2 = V_{O_2}/r_2 = \omega_3((r_1 + r_2)/r_2) = 3\pi ((20+15)/15) = 7\pi \text{ рад/с}.$$

При этом  $\omega_2$  — абсолютная угловая скорость колеса 2,  $\omega_3$  — переносная угловая скорость.

Известно  $\omega_2 = \omega_3 + \omega_{23}$ , откуда относительная угловая скорость будет

$$\omega_{23} = \omega_2 - \omega_3 = \omega_3((r_1 + r_2)/r_2) - \omega_3 = \omega_3((r_1 + r_2 - r_2)/r_2) = \omega_3(r_1/r_2).$$

Таким образом, найдена угловая скорость по отношению к кривошипу.

## Глава 8. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

### 8.1. Основные понятия и теоремы

*Плоскопараллельным, или плоским называют движение твердого тела, когда любая точка этого тела движется в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости (рис. 8.1).*



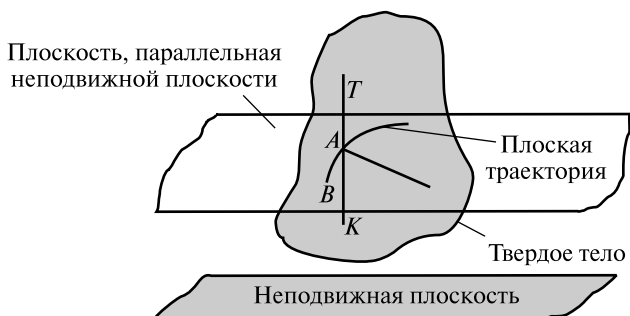


Рис. 8.1. Движение точки твердого тела параллельно неподвижной плоскости

Отрезок  $TK$ , принадлежащий телу и расположенный перпендикулярно неподвижной плоскости, движется по с т у п а т е л ь н о, все его точки будут иметь одинаковые с точкой  $A$  скорости и ускорения, а траектории будут к о н г р у э н т н ы .

Отсюда следует, что изучение плоского движения можно свести к изучению движения с е ч е н и я твердого тела, параллельного заданной неподвижной плоскости, а в этом сечении достаточно рассмотреть движение произвольного отрезка  $AB$  (рис. 8.2). Через некоторый промежуток времени отрезок  $AB$  займет новое положение  $A_1B_1$ . Переход в новое положение может быть составлен из двух движений. Выбрав точку  $A$  в качестве полюса, переместим отрезок  $AB$  параллельно самому себе в положение  $A_1B_2$ . Затем совершим поворот вокруг полюса на угол  $\varphi$ . Отрезок займет положение  $A_1B_1$ .

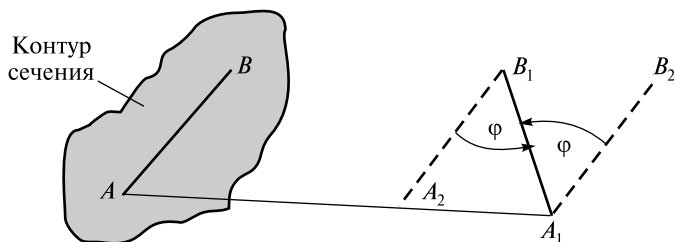


Рис. 8.2. Плоское движение отрезка  $AB$

При выборе в качестве полюса точки  $B$  изменятся параметры первой части перемещения, а поворот будет таким же. Наши рассуждения доказывают теорему:

*Плоское движение твердого тела может быть представлено как сумма двух движений: поступательного и вращательного.*

Кинематические характеристики (закон движения, траектория, скорость и ускорение) поступательной части движения зависят от выбора полюса:  $x_A = x_A(t)$ ,  $y_A = y_A(t)$ .

Вращательное движение происходит вокруг *мгновенной оси*, проходящей через выбранный полюс. В общем виде закон вращения имеет вид  $\varphi = \varphi(t)$ .

Таким образом, при плоском движении твердое тело имеет три степени свободы. Интенсивность собственного вращения тела характеризуется мгновенной угловой скоростью и мгновенным угловым ускорением (они не зависят от выбора полюса):

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t), \quad \varepsilon(t) = \dot{\omega}(t).$$

## 8.2. Определение скоростей точек тела

Определение скорости точки  $A$  (полюса) осуществляется по известным правилам, если задан закон ее движения:

$$V_{AX} = \dot{x}_A, \quad V_{AY} = \dot{y}_A, \quad V_A = \sqrt{V_{AX}^2 + V_{AY}^2}.$$

Скорость любой другой точки  $B$  в плоском сечении можно определить, опираясь на доказанную теорему. Поступательную составляющую движения будем считать переносной для точки  $B$ , вращательную составляющую движения отрезка  $AB$  будем считать относительной. Тогда в соответствии с формулой (7.7) можно записать:

$$V_B = V_e + V_r, \text{ или } V_B = V_A + V_{BA}. \quad (8.1)$$

*Скорость любой точки плоского сечения равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки, получаемой за счет вращения вокруг полюса.*

Имеем (рис. 8.3)

$$V_{BA} = \omega_{BA} BA.$$

Если векторное равенство (8.1) спроецировать на направление  $AB$ , то ввиду перпендикулярности  $V_{BA}$  к этому направлению получаем

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta. \quad (8.2)$$

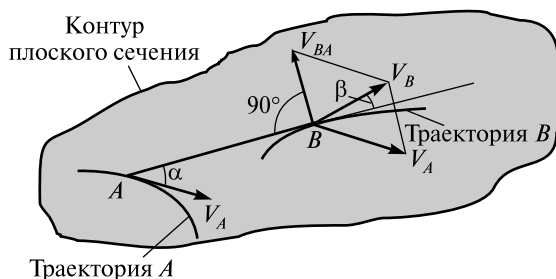


Рис. 8.3. Скорости точек плоского сечения

Это соотношение известно как теорема о проекциях:

*Проекции векторов скоростей концов отрезка на направление этого отрезка равны между собой.*

Выражение (8.2) дает возможность находить скорость точки  $B$ . Следует отметить, что теорема справедлива не только для плоского движения, но и для произвольного движения твердого тела.

### 8.3. Мгновенный центр скоростей

В сечении твердого тела при плоском движении имеется точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эта точка (обозначим ее  $P$ ) носит название *мгновенного центра скоростей*. Точка  $P$  находится в месте пересечения перпендикуляров к векторам скоростей двух точек сечения (рис. 8.4).

Выбрав точку  $P$  в качестве полюса, получаем из теоремы (8.1) такой результат:

$V_B = V_P + V_{BP} = 0 + V_{BP}$ ; модуль скорости  $V_B = \omega BP$ .

Таким образом, в данный момент времени плоское сечение как будто вращается вокруг мгновенного центра скоростей и величины скоростей точек пропорциональны их расстояниям от точки  $P$ .

Рассмотрим частные случаи, которые могут встретиться при

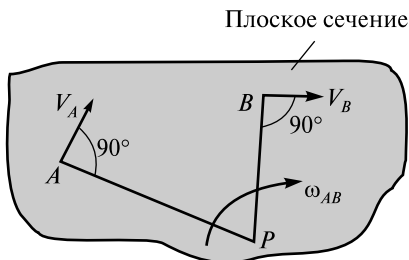


Рис. 8.4. Определение положения мгновенного центра скоростей

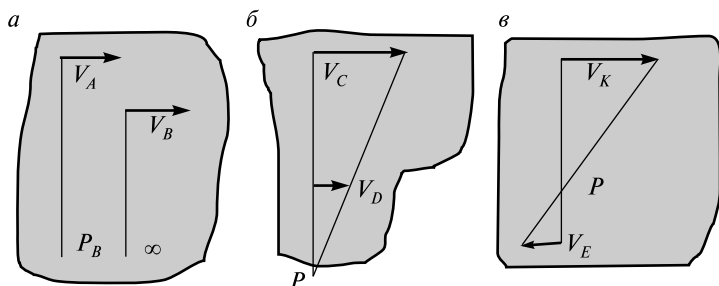


Рис. 8.5. Случаи коллинеарности векторов скоростей:  
 а — вектор скоростей лежит в бесконечности; б, в — величины скоростей определяются на основе закона пропорциональности

отыскании мгновенного центра скоростей. На рис. 8.5 приведены три варианта, которые объединяет коллинеарность векторов скоростей двух точек сечения.

В первом варианте  $P$  лежит в бесконечности; из теоремы о проекциях (8.2) следует равенство скоростей ( $V_A = V_B$ ). Во втором и третьем вариантах величины скоростей определяют на основе закона пропорциональности.

**Пример 8.1.** Колесо радиусом  $R = 0,8$  м катится без скольжения по прямолинейному рельсу. При этом мгновенный центр скоростей находится в точке контакта (рис. 8.6). Скорость центра колеса в данный момент времени равна  $V_C = 20$  м/с. Найти величины скоростей в точках  $D$  и  $B$ , если известно, что  $CB = 0,4$  м и точка  $D$  расположена на одной высоте с точкой  $B$ .

*Решение.* Поскольку известно положение мгновенного центра скоростей, находим угловую скорость качения колеса:

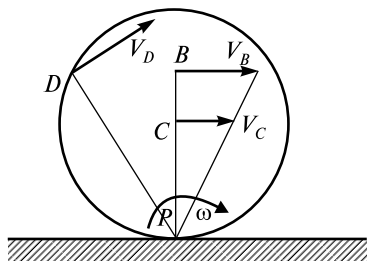


Рис. 8.6

$$\omega = \frac{V_C}{R} = \frac{20}{0,8} = 25 \text{ с}^{-1}.$$

В точке  $B$  скорость  $V_B = \omega PB = 25 \cdot 1,2 = 30$  м/с. Найдем из элементарных соотношений расстояния

$$\begin{aligned} PD &= \sqrt{DB^2 + PB^2} = \sqrt{DC^2 - BC^2 + PB^2} = \\ &= \sqrt{0,8^2 - 0,4^2 + 1,2^2} = 1,386 \text{ м.} \end{aligned}$$

Скорость точки  $D$ :  $V_D = \omega PD = 25 \cdot 1,386 = 34,65$  м/с. Векторы скоростей показаны на рис. 8.6.

**Пример 8.2.** Кривошип  $OA$  длиной 40 см нецентрального кривошипно-ползунного механизма вращается относительно неподвижной оси с угловой скоростью  $\omega_{OA} = \pi/2$  с<sup>-1</sup> (рис. 8.7). Определите скорость ползуна  $B$ , превышение точки  $O$  над точкой  $B$  составляет  $h = 20$  см.

**Решение.** Определим положение точки  $E$ , которая является мгновенным центром скоростей звена  $AB$ . Длина отрезка  $AC$  (рассматриваем треугольник  $OAC$ ) будет  $AC = l \sin 60^\circ$ . Тогда длина  $AD$  будет равна  $AD = AC + CD = l \sin 60^\circ + h$ .

Теперь можем определить длину отрезка  $AB$ :  $AB = (l \sin 60^\circ + h) / \cos 60^\circ$ . Угол  $OAC$  равен  $90 - 60 = 30^\circ$ , а угол  $CAB$  равен  $90 - 30 = 60^\circ$ . Из подобия треугольников  $FEB$  и  $OAC$  угол  $FEB$  равен  $30^\circ$ . Тогда длина отрезка  $AE$  будет равна  $AB / \tan 30^\circ$  и длина отрезка  $BE = AB / \sin 30^\circ$ . Поскольку точка  $E$  является центром скоростей,  $V_A / AB = V_B / BE$ , откуда  $V_B = V_A \cdot BE / AB = V_A / \cos 30^\circ$ . Для  $OA$   $V_A = \omega \cdot OA$ , тогда  $V_B = (\omega \cdot OA) / \cos 30^\circ = \pi \cdot 0,4 / (2 \cdot 0,866) = 0,726$  м/с.

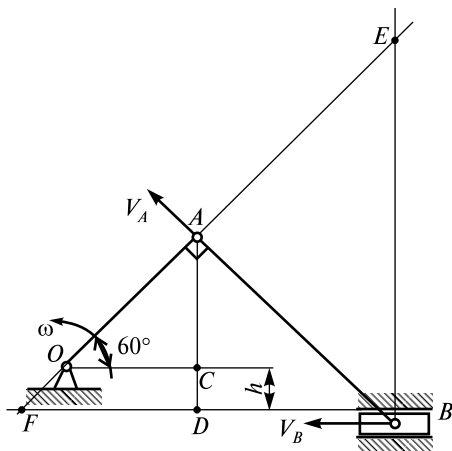


Рис. 8.7

## 8.4. Определение ускорений точек тела

Ускорение полюса  $A$  можно найти, если задан закон его движения:

$$a_{Ax} = \ddot{x}_A, \quad a_{Ay} = \ddot{y}_A; \quad a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2}. \quad (8.3)$$

Опираясь на теорию составного движения точки, можно использовать теорему сложения ускорений (7.9). Поскольку переносное движение — поступательное, кориолисово ускорение обращается в нуль:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA} = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{BA}^n + \mathbf{a}_{BA}^\tau. \quad (8.4)$$

В соответствии с векторными формулами (7.7) и (7.8) компоненты относительного ускорения  $\mathbf{a}_{BA}$  имеют вид:

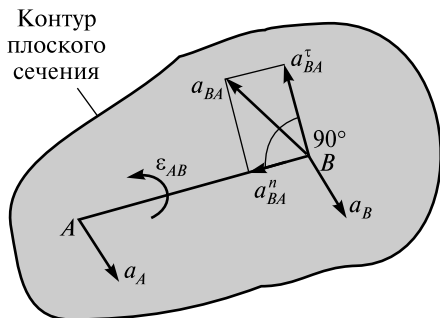


Рис. 8.8. Векторы ускорений в двух точках сечения

$$a_{BA}^n = \omega_{BA} V_{BA}, \quad a_{BA}^\tau = \epsilon_{BA} BA;$$

Модули этих векторов:

$$\begin{aligned} a_{BA}^n &= \omega_{BA}^2 BA, \\ a_{BA}^\tau &= \epsilon_{BA} BA. \end{aligned} \quad (8.5)$$

На рис. 8.8 показаны векторы ускорений.

## 8.5. Мгновенный центр ускорений

В сечении твердого тела при плоском движении имеется точка, ускорение которой в данный момент времени равно нулю. Эта точка называется *мгновенным центром ускорений*. Как видно из выражения (8.4), в этой точке  $Q$  должно выполняться условие (рис. 8.9):

$$a_Q = a_A + a_{QA} = 0, \text{ или } a_A = -a_{QA}; \quad a_A = \sqrt{(a_{QA}^\tau)^2 + (a_{QA}^n)^2}.$$

Отсюда следуют формулы, определяющие положение точки  $Q$ :

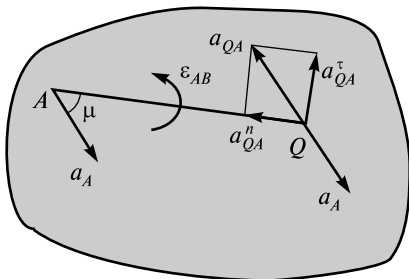


Рис. 8.9. К понятию мгновенного центра ускорений

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{a_{QA}^\tau}{a_{QA}^n} = \frac{\epsilon_{AB}}{\omega^2},$$

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}}.$$

(8.6)

Положение мгновенного центра ускорений может быть определено, если известны векторы ускорений в двух точках сечения: в общем случае, пользуясь фор-

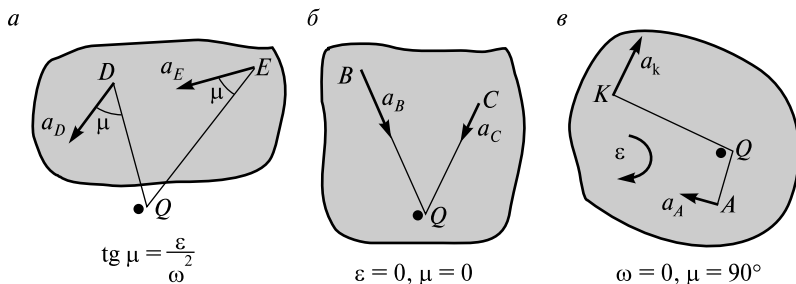


Рис. 8.10. Положение мгновенного центра ускорений (а); б — при  $\varepsilon = 0$  и  $\mu = 0$ ; в — при  $\omega = 0$  и  $\mu = 90^\circ$

мулами (8.6); в частных случаях ( $\varepsilon = 0$  или  $\omega = 0$ ) — также на основе этих формул (рис. 8.10). Как следует из формулы (8.6) для  $\text{tg } \mu$ , угол  $\mu$  нужно откладывать в направлении  $\varepsilon$ .

## Глава 9. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

### 9.1. Основной закон и задачи динамики материальной точки

*Материальная точка*, движение которой в пространстве не ограничено какими-либо связями, называется *свободной*.

Примером свободной материальной точки может служить летящий самолет, его перемещения ничем не ограничены.

При решении задач динамики материальной точки ее масса считается заданной. Она либо остается постоянной, либо изменяется по какому-либо известному закону. Различают два типа основных задач.

*Первая задача*, когда, кроме массы, известны координаты точки как функции времени; требуется определить действующую силу.

*Вторая задача*, когда известна масса точки и действующие на нее силы; требуется найти закон движения точки.

Кроме этого, возможны *задачи смешанного типа*, когда известны часть сил и траектория, а находят закон движения и остальные силы.

*Материальная точка*, свобода перемещения которой ограничена наложенными связями, называется *несвободной*.

Примером несвободной материальной точки может служить движущийся по рельсам локомотив или подвижной состав (если пренебрегли их размерами). Для несвободной точки материальной точки все внешние силы делятся на две категории: активные и пассивные (реакции связи). В связи с этим первая задача динамики для несвободной точки сводится к определению реакций связей, если заданы закон движения точки и действующие на нее активные силы. Вторая задача — зная действующие на точку активные силы, определить, во-первых, закон движения точки и, во-вторых, реакции связей.

Рассмотрим движение тела, которое можно принять за материальную точку. Будем наблюдать это движение из подвижной и неподвижной систем отсчета (рис. 9.1). Для движения точки  $M$ , наблюдаемого из неподвижной системы отсчета, справедлив *второй закон Ньютона*:

$$\frac{d(mV)}{dt} = F, \quad (9.1)$$

где  $m$  — масса материальной точки;

$F$  — действующая на нее сила.

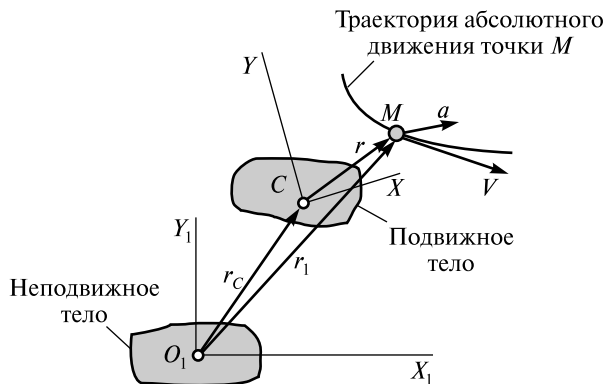


Рис. 9.1. Движение тела, которое можно принять за материальную точку

Случай переменной массы рассмотрим далее; считая массу постоянной, основной закон динамики по отношению к инерциальной (в частности, неподвижной) системе отсчета можно записать в виде

$$ma = F. \quad (9.2)$$



Чтобы выразить основной закон динамики материальной точки по отношению к подвижной (в общем случае — неинерциальной) системе отсчета, воспользуемся теоремой Кориолиса (7.9):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_k. \quad (9.3)$$

Подставляя выражение (9.3) в левую часть (9.2), находим искомый основной закон *динамики относительного движения*:

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}_r &= \mathbf{F} + (-m\mathbf{a}_e) + (-m\mathbf{a}_k), \\ \text{или } m\mathbf{a}_r &= \mathbf{F} + \Phi_e + \Phi_k, \end{aligned} \quad (9.4)$$

где введены обозначения сил инерции, учитывающих наличие переносной и кориолисовой составляющих в абсолютном ускорении (по отношению к неподвижной системе отсчета):

$$\Phi_e = -m\mathbf{a}_e; \quad \Phi_k = -m\mathbf{a}_k. \quad (9.5)$$

*Инертность* — это способность сохранять свое состояние неизменным, это внутреннее свойство всех материальных тел.

Сила, численно равная произведению массы материальной точки на приобретенное ею ускорение и направленная в сторону, противоположную ускорению, называется *силой инерции*.

Выраженный векторным уравнением закон (9.4) может быть сформулирован следующим образом:

*Закон относительного (по отношению к неинерциальной системе отсчета) движения материальной точки можно получить, если кроме действующих на точку сил приложить еще переносную и кориолисову силы инерции.*

**Пример 9.1.** В вагоне (рис. 9.2), движущемся с постоянным ускорением  $a$ , подвешен математический маятник весом  $P$  (тело малого размера на нерастяжимой нити). Найти зависимость величины ускорения вагона от измеряемого угла наклона нити в положении относительного равновесия.

*Решение.* Для случая относительного равновесия из уравнений (9.4) и (9.5) следует

$$F + \Phi_e = P + N + \Phi_e = 0,$$

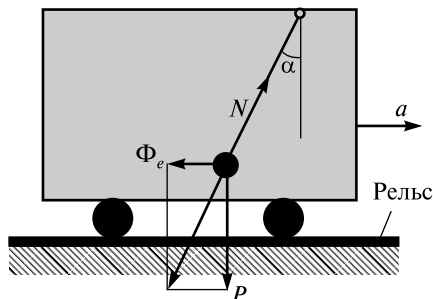


Рис. 9.2. Относительное равновесие в подвижной системе

т.е. реакция нити  $N$  уравнивает сумму сил  $P$  и  $\Phi_e$ . Учитывая, что  $\Phi_e = -ma_e$ ,  $P = mg$ , получаем из треугольника искомую зависимость:

$$a = g \operatorname{tg} \alpha. \quad (9.6)$$

Формулой (9.6) можно пользоваться для определения ускорения, с которым движется вагон. Это дает возможность создания измерительного прибора для практических целей.

Следует обратить внимание на возможное поведение маятника. Если отклонить его от положения равновесия в направлении, лежащем в плоскости движения, то он будет совершать колебания по дуге окружности относительно наклонного равновесного положения. Если же отклонить маятник в направлении, перпендикулярном плоскости движения, то его колебания будут иметь более сложный характер.

Полученный результат дает нам возможность обсудить фундаментальное положение классической механики.

Предположим, что мы сидим в вагоне и он движется равномерно. Угол  $\alpha$  будет равен нулю, поскольку ускорение равно нулю. Для того чтобы оценить величину скорости вагона, мы выглядываем в окно и наблюдаем за мелькающими мимо нас предметами. Если окно закрыто, то «датчиками» скорости служат удары колес на стыках рельсового пути. Но это — отклонения от равномерного движения, вагон периодически «падает» в малое пространство между плетями рельса. При идеальном равномерном движении мы не сможем измерить скорость движения вагона, придумывая «внутренние» опыты.

Таким образом, на этом примере мы убедились в справедливости *принципа относительности* классической механики:

*Никаким механическим опытом нельзя обнаружить наличие инерциального (равномерного прямолинейного) движения системы отсчета, участвуя вместе с ней в этом движении.*

Решение первой задачи динамики материальной точки (в выказанной простейшей постановке) сводится к действию дифференцирования по времени заданных законов изменения координат и последующему их умножению на заданную массу:

$$F_x = m\ddot{x}, \quad F_y = m\ddot{y}, \quad F_z = m\ddot{z}.$$

Рассмотрим пример решения задачи.

**Пример 9.2.** По мосту радиуса  $R = 200$  м движется автомобиль массой  $m = 2500$  кг со скоростью  $V = 70$  км/ч. Определить давление, которое оказывает автомобиль на мост в средней его точке (рис. 9.3).

*Решение.* В соответствии с основным законом динамики материальной точки (9.2) имеем

$$ma = P + N,$$

где  $N$  — реакция на автомобиль со стороны моста;

$P$  — вес автомобиля.

$$m = P/g, \quad g = 9,81 \text{ м/с}^2.$$

Спроецируем векторное равенство на вертикальную ось (ось  $y$ ):

$$-ma = -mg + N,$$

$$N = mg - ma = m(g-a).$$

$$\text{Поскольку } a = V^2/R,$$

$$N = m(g - V^2/R) = 2500(9,81 -$$

$$- ((70 \cdot 1000)/3600^2) \cdot (1/200) =$$

$$= 2500(9,81 - 1,89) = 19\,800 \text{ Н}.$$

Таким образом, давление движущегося автомобиля на мост оказывается меньше его веса. С ростом величины скорости это становится более заметным. При некотором значении скорости давление равно нулю. Мы рассматриваем автомобиль только в самом верхнем положении на мосту. Очевидно, что может быть найдена такая величина скорости движения, при которой давление будет равно нулю (или отрицательно) на некотором отрезке траектории.

Интересно, что выражение для скорости, при которой в верхней точке моста давление обращается в нуль, совпадает с известной формулой для *первой космической скорости*:

$$V_1 = \sqrt{gR},$$

где  $R$  — радиус Земли.

Совпадение это не случайно, при такой скорости искусственный спутник Земли, находящийся под действием центральной силы, будет оставаться на круговой орбите. Для Земли эта скорость имеет величину

$$V_1 = \sqrt{9,82 \cdot 6\,378\,000} = 7914 \text{ м/с} = 7,9 \text{ км/с}.$$

## 9.2. Интегрирование уравнений движения

Решение второй задачи динамики материальной точки связано с необходимостью интегрирования дифференциальных уравнений движения:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{y} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \\ m\ddot{z} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \tag{9.7}$$

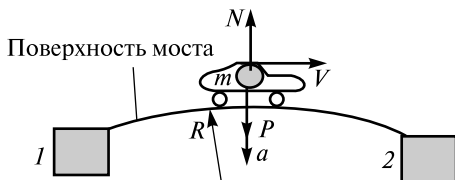


Рис. 9.3. На автомобиль со стороны поверхности моста действует сила реакции  $N$ , равная и противоположная давлению автомобиля; 1, 2 — неподвижные опоры

В общем случае, как видим, компоненты сил могут зависеть от времени, координат и компонент скорости. Процесс интегрирования может быть выполнен в конечном виде только для некоторых классов дифференциальных уравнений. Как правило, это *линейные* дифференциальные уравнения. Решение нелинейных дифференциальных уравнений требует специальных знаний.

Рассмотрим некоторые простейшие случаи, ограничиваясь движением точки по прямолинейной траектории.

### *Действие постоянной силы*

Пусть на точку с массой  $m$  действует постоянная сила  $F$ . Требуется найти скорость и закон движения точки (во времени).

Запишем первое из уравнений (9.7), опуская индексы:

$$m\ddot{x} = F \quad \text{или} \quad m \frac{dV}{dt} = F.$$

Умножая обе части равенства на  $dt$ , получаем

$$dV = \frac{F}{m} dt = a dt.$$

Вычисляем интегралы от левой и правой частей:

$$\int dV = a \int dt, \quad \text{или} \quad V = at + C_1, \quad \text{но} \quad V = \frac{dx}{dt}, \quad \text{поэтому}$$

$$x = \frac{at^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

При интегрировании появились две произвольные постоянные. Для их определения нужно знать начальные условия движения:

$$\text{при } t = 0 \quad x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = V_0.$$

Внося в эти условия найденные выражения для координаты и скорости, получаем окончательные ответы:

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}; \quad V = V_0 + at.$$

Эти формулы, справедливые при равноускоренном движении точки, известны из школьного курса физики. Здесь мы их получили исключительно из методических соображений. Дело в том, что интегрирование сложных уравнений состоит из тех же самых этапов, но нахождение интегралов в виде элементарных функций не всегда возможно.

### *Действие силы, зависящей от расстояния*

Пусть на точку с массой  $m$  действует сила, зависящая от расстояния:  $F = f(x)$ . Требуется найти зависимость скорости точки от расстояния.

Для этой цели запишем дифференциальное уравнение в виде

$$m(dV/dt) = f(x).$$

Умножим обе части равенства на  $dx$ :

$$m dx \frac{dV}{dt} = f(x) dx, \text{ или } mVdV = f(x)dx.$$

Вычисляем интегралы от левой и правой частей в пределах от начальных до текущих значений функций:

$$m \int_{V_0}^V VdV = m \frac{V^2}{2} - m \frac{V_0^2}{2} = \int_{x_0}^x f(x)dx. \quad (9.8)$$

Получаем требуемую зависимость скорости точки от ее текущей координаты и начальных условий:

$$V = \sqrt{V_0^2 + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x f(x)dx}.$$

Результат (9.8) имеет важное значение: введя обозначения

$$T = m \frac{V^2}{2} \text{ — кинетическая энергия материальной точки,}$$

$A = \int_{x_0}^x f(x)dx$  — работа силы на перемещении, можем сформулировать теорему:

$$T - T_0 = A. \quad (9.9)$$

*Приращение кинетической энергии материальной точки за конечный промежуток времени равно работе приложенной силы на соответствующем перемещении.*

Для широкого использования теоремы (9.9) при решении практических задач нужно уметь вычислять работу сил различной природы (в том числе и переменных).

Подведем некоторые итоги. На двух примерах мы убедились, что решение второй задачи динамики материальной точки может быть сведено к вычислению интегралов от заданных функций. Оказывается, что прием разделения переменных, которым мы воспользовались в приведенных двух примерах, успешно может быть применен, если действующая сила зависит только от одной переменной: от времени, от координаты, от скорости.

### 9.3. Теорема моментов для материальной точки

Введем в рассмотрение понятие количества движения  $\mathbf{q} = m\mathbf{V}$  и вычислим его момент относительно неподвижного центра  $A$  (рис. 9.4):

$$\mathbf{k}_A = \mathbf{r} \cdot m\mathbf{V}. \quad (9.10)$$

Векторную величину  $\mathbf{k}_A$ , определяемую выражением (9.10), называют *моментом количества движения* материальной точки.

Теперь найдем производную по времени от этого вектора:

$$\frac{d\mathbf{k}_A}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot m\mathbf{V}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} m\mathbf{V} + \mathbf{r} \cdot m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{V} \cdot m\mathbf{V} + \mathbf{r} \cdot m\mathbf{a}.$$

Учитывая, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю, и опираясь на *второй закон Ньютона*, получаем

$$d\mathbf{k}_A / dt = \mathbf{r} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{M}_A(\mathbf{F}). \quad (9.11)$$

Выражение (9.11) известно под названием **теоремы моментов**: *Производная по времени от момента количества движения материальной точки равна моменту действующей на точку силы, взятому относительно того же центра.*

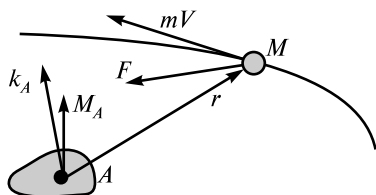


Рис. 9.4. Момент силы  $\mathbf{M}_A \perp (\mathbf{r}, \mathbf{F})$  и момент количества движения

$$\mathbf{k}_A \perp (\mathbf{r}, m\mathbf{V})$$

## Глава 10. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

### 10.1. Дифференциальные уравнения движения системы

При изучении движения реальных материальных тел приходится, кроме механических явлений, иметь дело с другими, сопутствующими физическими процессами: тепловыми, магнитными и т.п. Ограничиваясь только механическими явлениями, будем рассматривать механические системы.

*Механической системой называется совокупность конечного или бесконечно большого числа материальных точек, движение которых взаимозависимо.*

На основе второго закона Ньютона для механической системы, моделируемой совокупностью  $n$  материальных точек, можно записать систему из  $n$  векторных уравнений:

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^E + \mathbf{F}_i^J, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (10.1)$$

где  $\mathbf{F}_i^E$  — равнодействующая внешних сил, приложенных к точке;

$\mathbf{F}_i^J$  — равнодействующая внутренних сил, приложенных к точке.

В декартовых осях неподвижной системы отсчета имеем  $3n$  дифференциальных уравнений второго порядка:

$$m_i \ddot{x} = F_{ix}^E + F_{ix}^J; \quad m_i \ddot{y} = F_{iy}^E + F_{iy}^J; \quad m_i \ddot{z} = F_{iz}^E + F_{iz}^J.$$

Принципиально возможно выполнить интегрирование этой системы уравнений, как это было показано в п. 9.3 на примере одной материальной точки. Задача усложняется необходимостью учета внутренних сил в системе, как правило, неизвестных. При этом необходимо после интегрирования найти все константы интегрирования, используя заданные начальные условия.

Более целесообразно на практике применять для решения задач *общие теоремы динамики*.

## 10.2. Теорема о движении центра масс системы

*Центром масс механической системы называется точка, положение которой определяется выражением для ее радиуса-вектора*

$$\mathbf{r}_C = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i / \sum_{i=1}^n m_i. \quad (10.2)$$

Представим выражение (10.2) в виде

$$m \mathbf{r}_C = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad (10.3)$$

где  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  — масса механической системы.

Дифференцируя дважды по времени левую и правую части выражения (10.3), получаем

$$m \mathbf{a}_C = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i. \quad (10.4)$$

Обратимся теперь к системе уравнений (10.1). Суммируя, левые и правые части, имеем

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^E + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^J. \quad (10.5)$$

Заменяя левую часть выражения (10.5) с помощью (10.4) и вводя обозначения главных векторов системы внешних и внутренних сил

$$\mathbf{R}^E = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^E; \quad \mathbf{R}^J = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^J \equiv 0,$$

приходим к теореме о движении центра масс:

$$m \mathbf{a}_C = \mathbf{R}^E. \quad (10.6)$$

*Центр масс механической системы движется как точка, обладающая массой всей системы, под действием главного вектора внешних сил.*



Как видим, внутренние силы в системе не оказывают никакого влияния на движение ее центра масс. Главный вектор внутренних сил в любой механической системе тождественно равен нулю (на основе аксиомы о равенстве действия и противодействия).

При условии, что главный вектор внешних сил обращается в нуль, получим *закон сохранения*:

если  $\mathbf{R}^E = 0$  то  $\mathbf{V}_C = \text{const}$ .

*При отсутствии внешнего воздействия центр масс системы движется по инерции, сохраняя величину и направление скорости.*

### 10.3. Теорема моментов для системы

Обобщая выражение (9.10) из п. 9.4, введем понятие *главного момента количества* движения механической системы относительно неподвижной точки:

$$\mathbf{K}_A = \sum_{i=1}^n \mathbf{k}_{iA} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i m_i \mathbf{V}_i. \quad (10.7)$$

Найдем производную по времени от этого вектора:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}_A}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot m_i \mathbf{V}_i \right) = \sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{r}}_i \cdot m_i \mathbf{V}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot m_i \dot{\mathbf{V}}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i \cdot m_i \mathbf{V}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot m_i \mathbf{a}_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i^E + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i^J = \mathbf{M}_A^E. \end{aligned}$$

В ходе выкладок обращаются в нуль сумма векторных произведений коллинеарных векторов:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{V}_i \cdot m_i \mathbf{V}_i = 0,$$

а также главный момент внутренних сил в системе (на основании аксиомы о действии и противодействии):

$$\mathbf{M}_A^J = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i^J = 0.$$

Мы получили теорему

$$d\mathbf{K}_A / dt = \mathbf{M}_A^E. \quad (10.8)$$

*Производная по времени от главного момента количества движения системы равна главному моменту внешних сил относительно того же центра.*

При выполнении условия  $\mathbf{M}_A^E = 0$  получаем  $\mathbf{K}_A = 0$ . Имеет место **закон сохранения**:

*Главный момент количества движения механической системы сохраняет постоянное по величине и направлению значение при условии равенства нулю главного момента внешних сил.*

Применим теорему (10.8) к частному случаю вращения абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси. В проекции на ось  $AZ$  имеем

$$dK_{AZ} / dt = M_{AZ}^E. \quad (10.9)$$

*Производная по времени от главного момента количества движения системы относительно оси равна главному моменту внешних сил относительно той же оси.*

Момент количества движения вычисляется непосредственно:

$$K_{AZ} = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot m_i V_i = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot m_i \omega \rho_i = \omega \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2 = \omega J_{AZ}. \quad (10.10)$$

Подставляя (10.10) в (10.9), получаем

$$J_{AZ} (d\omega / dt) = M_{AZ}^E, \quad (10.11)$$

где введено обозначение момента инерции твердого тела относительно оси  $AZ$  ( $\rho_i$  — расстояние от точки с массой  $m_i$  до оси  $AZ$ ):

$$J_{AZ} = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2. \quad (10.12)$$

Выражение (10.11) называется дифференциальным уравнением вращения твердого тела относительно неподвижной оси.

Применения общих теорем к рассмотрению движения системы покажем на примерах.

**Пример 10.1.** На железнодорожной платформе длиной 13,3 м и массой 20,9 т, находящейся в покое двое рабочих перекатывают 2 кабельные бухты из правого конца в левый на 11,5 м (рис. 10.1). В какую сторону и насколько переместится платформа, если вес одной кабельной бухты 2150 кг? Вес каждого рабочего принять равным 90 кг. Силами трения при движении пренебречь.

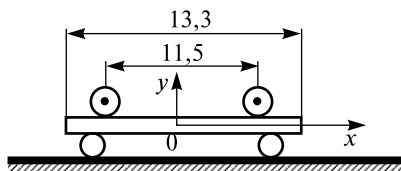


Рис. 10.1

*Решение.* Общая масса груза — рабочих и кабельных бухт — составляет  $m = 2 \cdot 90 + 2 \cdot 2150 = 4480$  кг.

Центр масс системы «платформа—груз» остается на месте, так как внешние силы на систему не действуют и система находится в покое.

Поместим начало координат в середине платформы до ее смещения.

Координата центра тяжести системы до перемещения

$$X_C = (m(l/2) + M \cdot 0) / (m + M).$$

После перемещения

$$X_C = (m(-l/2) + Mx) / (m + M),$$

где  $x$  — неизвестное смещение платформы.

Отсюда  $(m(l/2) + M \cdot 0) / (m + M) = (m(-l/2) + Mx) / (m + M)$ .

Окончательно  $Mx = 2m(l/2)$  и  $x = ml/M = 4480 \cdot 11,5 / 20,9 \cdot 10^3 = 2,47$  м.

Перемещение платформы происходит в правую сторону на величину 2,47 м.

**Пример 10.2.** Однородный цилиндр радиуса  $r$  весом  $P$  катится без проскальзывания по наклонной плоскости (рис. 10.2). Найти ускорение центра цилиндра, пренебрегая сопротивлением качению.

*Решение.* По теореме о движении центра масс (10.6) в проекции на ось  $CX$  для цилиндра можно записать

$$(P/g)a_C = P \sin \alpha - F.$$

Для относительного вращательного движения (вокруг оси  $CZ$ , перпендикулярной чертежу) в соответствии с уравнением (10.11) имеем

$$J_{CZ} \frac{d\omega}{dt} = M_{CZ}^E \quad \text{или} \quad \frac{Pr^2}{2g} \varepsilon = \frac{Pr^2}{2g} \frac{a_C}{r} = Fr.$$

Исключая  $F$  из первого и второго уравнения, получим

$$a_C = (2/3)g \sin \alpha.$$

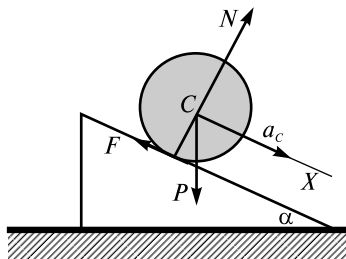


Рис. 10.2

## 10.4. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Кинетической энергией материальной точки называется скалярная величина

$$T = (mV^2) / 2.$$

*Кинетическая энергия механической системы*, состоящей из  $n$  точек, определяется выражением

$$T = \sum_{i=1}^n (m_i V_i^2) / 2.$$

В частных случаях движения твердого тела можно получить простые выражения для кинетической энергии.

При поступательном движении (скорости всех точек тела одинаковы)

$$T = (mV^2) / 2; \quad m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси  $OZ$  с угловой скоростью  $\omega$

$$T = J_{OZ} \frac{\omega^2}{2},$$

где  $J_{OZ} = \sum_{i=1}^n m_i \rho_i^2$  — момент инерции тела относительно оси  $OZ$ ;

$\rho_i$  — расстояние от точки с массой  $m_i$  до оси  $OZ$ .

При сложном движении твердого тела можно использовать **теорему Кенига**:

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + T^{(\tau)}.$$

*Кинетическая энергия механической системы складывается из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и кинетической энергии относительного движения.*

В частности, при плоском движении твердого тела

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + J_{CZ} \frac{\omega^2}{2}, \quad (10.13)$$

где  $V_C$  — скорость центра масс твердого тела;

$J_{CZ}$  — момент инерции тела относительно центральной оси.

Для вывода теоремы об изменении кинетической энергии системы поступим следующим образом. Умножим на бесконечно малое приращение радиус-векторов движущихся точек рассматриваемой системы левые и правые части векторных уравнений (10.1) и сложим результаты для всей системы:

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{dV_i}{dt} dr_i = \sum_{i=1}^n F_i^E dr_i + \sum_{i=1}^n F_i^J dr_i. \quad (10.14)$$

Нетрудно заметить, что в левой части выражения складываются дифференциалы кинетической энергии всех точек системы, а в правой части суммируются элементарные работы внешних и внутренних сил.

Приходим к такому соотношению в интегральной форме

$$\sum_{i=1}^n dT_i = \sum_{i=1}^n dA_i^E + \sum_{i=1}^n dA_i^J$$

или в дифференциальной форме

$$dT = dA^E + dA^J. \quad (10.15)$$

Разделив на  $dt$  левую и правую части последнего выражения, приходим к теореме об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{dT}{dt} = W^E + W^J, \quad (10.16)$$

где  $W = \frac{dA}{dt}$  — мощность сил.

Производная по времени от выражения кинетической энергии системы равна мощности внешних и внутренних сил.

Если взять интегралы от левой и правой части выражения (10.15) за конечный промежуток времени, то можно получить ту же теорему в интегральной форме:

$$T_2 - T_1 = A_{1-2}^E + A_{1-2}^J. \quad (10.17)$$

*Приращение кинетической энергии системы за конечный промежуток времени равно работе внешних и внутренних сил на соответствующем перемещении.*

При практическом использовании теоремы следует иметь в виду, что работа и мощность внутренних сил в неизменяемой системе (абсолютно твердое тело или их совокупность) равны нулю.

В системе СИ работа выражается в джоулях:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2.$$

Поскольку джоуль — единица сравнительно небольшая, часто используют кратные единицы: килоджоуль ( $1 \text{ кДж} = 10^3 \text{ Дж}$ ) или мегаджоуль ( $1 \text{ МДж} = 10^6 \text{ Дж}$ ).

Мощность измеряется в ваттах:

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж} / 1 \text{ с} = (1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2) / 1 \text{ с} = 1 (\text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^3).$$

Часто употребляются кратные единицы — киловатт ( $1 \text{ кВт} = 10^3 \text{ Вт}$ ) и мегаватт ( $1 \text{ МВт} = 10^6 \text{ Вт}$ ).

Если в течение некоторого времени мощность машины остается постоянной, то широкое распространение получила единица работы киловатт-час:

$$1 \text{ кВт} \cdot \text{ч} = 1 \text{ кВт} \cdot 1 \text{ ч} = 10^3 \text{ Вт} \cdot 3600 \text{ с} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Кинетическая энергия определяется способностью движущегося тела совершать работу. Ее величина положительная, имеет размерность работы.

Использование теоретического материала данного параграфа рассмотрим на конкретных примерах.

**Пример 10.3.** Однородная плита весом  $P_1$  прикреплена с помощью цилиндрических шарниров к осям двух одинаковых однородных цилиндрических катков весом  $P_2$  каждый (рис. 10.3). Вся система может катиться по неподвижной наклонной плоскости без скольжения. Найти ускорение плиты, учитывая сопротивление движению с помощью коэффициента трения качения  $k$ .

*Решение.* Используем теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме (10.16). Система состоит из абсолютно твердых тел, поэтому мощность внутренних сил равна нулю. Мощность внешних сил может быть выражена через скорость движения  $V$ :

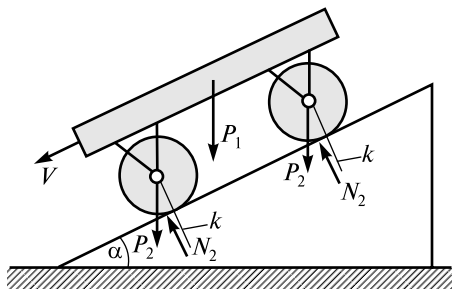


Рис. 10.3

$$W^E = (P_1 + 2P_2)V \sin \alpha - 2 \times \left( P_2 + \frac{P_1}{2} \right) k \cos \alpha \frac{V}{r}.$$

Кинетическую энергию системы найдем, пользуясь формулами предыдущего параграфа:

$$T = \frac{P_1 V^2}{2g} + 2 \left[ \frac{P_2 V^2}{2g} + J_2 \omega_2^2 \frac{1}{2} \right].$$

Мгновенную угловую скорость катка находим через скорость движения плиты; моменты инерции однородных цилиндрических катков относительно центральных осей:

$$\omega_2 = \frac{V}{r}; \quad J_2 = \frac{m_2 r^2}{2} = \frac{P_2 r^2}{2g}.$$

В результате подстановки и несложных действий получаем окончательное выражение для кинетической энергии системы

$$T = \frac{V^2}{2g} \left( P_1 + \frac{3}{2} P_2 \right).$$

Дифференцируя это выражение как неявную функцию времени и приравняв результат мощности внешних сил, получаем

$$\left( P_1 + \frac{3}{2} P_2 \right) \frac{V}{g} a = (P_1 + 2P_2) \left( \sin \alpha - \frac{k}{r} \cos \alpha \right) V.$$

## Ускорение

$$a = 2g \left( \frac{P_1 + 2P_2}{2P_1 + 3P_2} \right) \left( \sin \alpha - \frac{k}{r} \cos \alpha \right).$$

Заметим, что пример 10.2, который решался ранее с помощью системы двух уравнений, теперь можно решить с помощью *одного уравнения*.

Запишем выражение кинетической энергии цилиндра при его плоском движении (рис. 10.2):

$$T = \frac{P}{2g} V_C^2 + \frac{1}{2} \frac{Pr^2}{2g} \left( \frac{V}{r} \right)^2 = \frac{3P}{4g} V_C^2.$$

По теореме (10.16) имеем

$$\frac{dT}{dt} = \frac{3P}{4g} 2V_C a_C = PV_C \sin \alpha.$$

После сокращений получаем прежний ответ:

$$a_C = 2/3(g \sin \alpha).$$

**Пример 10.4.** Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя, рис. 10.4. Учитывая трение скольжения тела 1 массой  $m_1$  кг и пренебрегая другими силами сопротивления, определить скорость тела 1, когда пройденный им путь станет равным  $S = 2$  м. Нить считать нерастяжимой, отношение радиусов однородного блока 3  $r_2/R_2 = 0,7$ . Коэффициент трения скольжения  $f = 0,2$ .

*Решение.* Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_i,$$

где  $T$  — кинетическая энергия системы в конечном состоянии;

$T_0$  — кинетическая энергия в начальном состоянии.

Поскольку система находится в состоянии покоя ( $T_0 = 0$ ),

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

$T_1 = mV^2/2$  — поступательное движение,

$T_2 = J_2 \omega_2^2/2$  — вращательное движение.

$$J_2 = m_2 R_2^2; \quad \omega_2 = V/R_2.$$

$$T_2 = m_2 R_2^2 V^2 / 2 R_2^2 = m_2 V^2 / 2 = m V^2 / (4 \cdot 2) = m V^2 / 8.$$



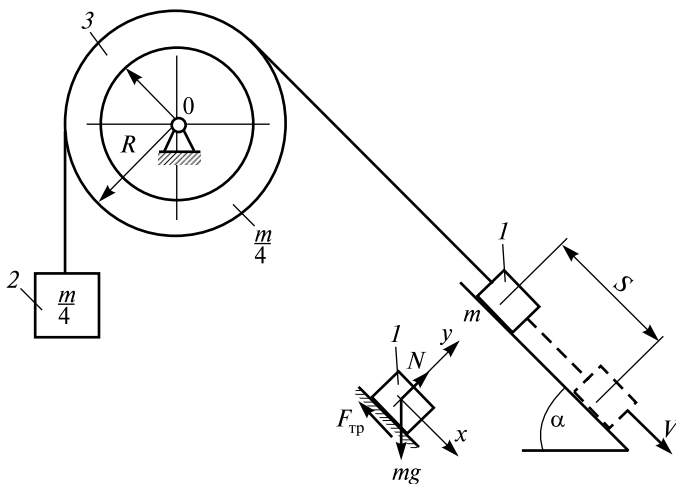


Рис. 10.4: 1 — скользящее тело; 2 — тело; 3 — блок

Поступательное движение  $T_3 = m_3 V_3^2 / 2$ , но  $V_3 = V / R_2 r_2$ , тогда

$$T_3 = m V^2 r_2^2 / (4 \cdot 2 \cdot R_2^2) = (m V^2 / 8) r_2^2 / R_2^2;$$

$$\begin{aligned} T &= m V^2 / 2 + m V^2 / 8 + (m V^2 / 8) r_2^2 / R_2^2 = \\ &= m V^2 (0,5 + 0,125 + 0,49 / 8) = 0,68 m V^2. \end{aligned}$$

$$\sum A_i = A_1 + A_2 + A_3.$$

Рассмотрим тело 1.

Работу совершает проекция силы тяжести  $mg \sin \alpha$  на пути  $S$  и сила трения

$$A_1 = mg \sin \alpha S - F_{\text{тр}} S,$$

$F_{\text{тр}} = fN$ . Из уравнения  $\sum Y_i = 0$ , следует  $mg \cos \alpha - N = 0$ .

Тогда  $F_{\text{тр}} = fmg \cos \alpha$ ,

$$A_1 = mg \sin \alpha S - fmg \cos \alpha S = mg S (\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

$$A_2 = 0.$$

Рассмотрим тело 2.

$$A_3 = -m_3 g S_3 = -(m/4) g S (r_2 / R_2) = -(m/4) g S (r_2 / R_2).$$

$$S_3 = S (V_2 / R_2).$$

$$\begin{aligned}\sum A_i &= mgS (\sin\alpha - f\cos\alpha) - (m/4)gS(r_2/R_2) = \\ &= mgS(0,686 - 0,2 \cdot 0,5 - 0,25 \cdot 0,7) = 0,591 \text{ } mgS.\end{aligned}$$

Окончательно  $0,686mV^2 = 0,591 \text{ } mgS$ , откуда

$$V = \sqrt{\frac{0,591 \cdot 9,81 \cdot 2}{0,686}} = 4,111 \text{ м/с.}$$

## 10.5. Принцип Даламбера

Силы инерции широко используются при расчетах и решении многих задач технической механики, причем использование этих сил позволяет свести задачи динамики к уравнениям статики, в которых рассматривается движение несвободной материальной точки.

Назовем *силой инерции* вектор, равный произведению массы точки на ее ускорение и направленный в сторону, противоположную сторону движения:

$$F^{\text{ин}} = -ma. \quad (10.18)$$

*Если к движущейся материальной точке, помимо действующих на нее активных и реактивных сил, приложить еще силу инерции, то полученная система сил будет уравновешена.*

Формально задача динамики материальной точки записывается как задача статики: можно применять проецирование сил на оси координат и приравнивать эти проекции нулю. Но по существу задача остается динамической.

В тот период времени, когда Даламбер предложил этот новый подход, оставалась неисследованной динамика несвободных систем, и в его исходной формулировке был сделан акцент на учет реактивных сил.

*Активные силы и силы инерции движущейся материальной точки уравновешиваются реакциями связей.*

Рассмотрим методику решения конкретных задач.

**Пример 10.5.** На криволинейном участке пути наружный рельс возвышается над внутренним для того, чтобы давление вагона на рельсы было направлено перпендикулярно наклонному полотну дороги. Найти требуемое возвышение при следующих исходных данных: радиус кривой  $R = 1500 \text{ м}$ , ширина колеи  $b = 1520 \text{ мм}$ , скорость поезда  $V = 25 \text{ м/с}$ .

*Решение.* Принимая для вагона модель материальной точки, приложим внешние силы: активную — силу тяжести  $P$  и реактивную  $N$ , численно равную давлению вагона на рельсы (рис. 10.5).

Для применения к решению задачи принципа Даламбера приложим силу инерции, направленную противоположно нормальному ускорению. Модуль силы инерции

$$F_n^{\text{ин}} = m(V^2/R).$$

В соответствии с принципом Даламбера

$$P + N + F^{\text{ин}} = 0.$$

Чтобы исключить силу  $N$ , проектируем это векторное равенство на ось  $X$ :

$$P \sin \alpha - F_n^{\text{ин}} \cos \alpha = 0,$$

откуда следует

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_n^{\text{ин}}}{P} = \frac{mV^2}{mgR} = \frac{V^2}{gR} \equiv \sin \alpha = \frac{h}{b}.$$

Для возвышения  $h$  получаем формулу

$$h = (bV^2)/(gR) = (1520 \cdot 10^{-3} \cdot 25^2)/(9,81 \cdot 1500) = 0,065 \text{ м.}$$

Следует отметить, что проблема возвышения наружного рельса на практике решается с учетом многих факторов: среднестатистическая скорость движения, нагрузки от железной дороги, интенсивность движения и т.п.

Рассмотрим обобщение принципа Даламбера на произвольную механическую систему. Можно сформулировать его следующим образом.

*Если ко всем точкам движущейся механической системы кроме действующих на них сил приложить еще и силы инерции, то полученная система сил будет уравновешена.*

Действительно, по закону Ньютона для материальной точки, выделенной из системы, содержащей  $n$  точек, имеют место уравнения:

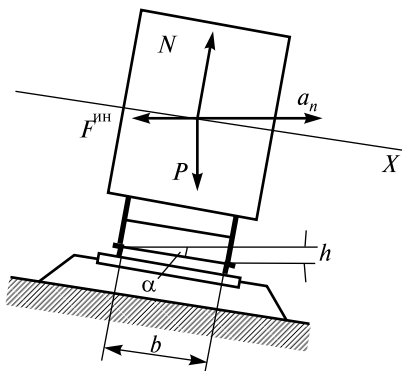


Рис. 10.5

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^E + \mathbf{F}_i^J, \quad i=1, 2, 3, \dots, n. \quad (10.19)$$

где  $\mathbf{F}_i^E$  — равнодействующая всех внешних сил, приложенных к точке с массой  $m_i$ ;

$\mathbf{F}_i^J$  — равнодействующая всех внутренних сил, приложенных к точке с массой  $m_i$ , со стороны других точек системы.

Вводя по выражению (10.18) силы инерции для всех точек системы, получим систему уравнений

$$\mathbf{F}_i^E + \mathbf{F}_i^J + \mathbf{F}_i^{\text{ин}} = 0, \quad i=1, 2, 3, \dots, n. \quad (10.20)$$

**Пример 10.6.** Груз 1 массой  $M_1$ , опускаясь вниз по наклонной плоскости, образующей угол  $\alpha$  с горизонтом, приводит в движение посредством нерастяжимой нити, переброшенной через неподвижный блок, груз 2 массой  $M_2$ , (рис. 10.6, а). Определить минимально необходимую массу наклонной призмы  $M_3$ , чтобы она оставалась неподвижной при коэффициенте трения скольжения, равном  $f$ .

*Решение.* Применяя принцип Даламбера для всей системы, запишем уравнение в виде суммы проекций на оси  $x$  и  $y$ :

$$\sum X=0, \quad H - J_1 \cos \alpha = 0, \quad \text{отсюда } H = J_1 \cos \alpha;$$

$$\sum Y=0, \quad N - M_2 g - J_2 - M_3 g + J_1 \sin \alpha - M_1 g = 0.$$

$$N_1 = (M_1 + M_2 + M_3)g + J_2 - J_1 \sin \alpha.$$

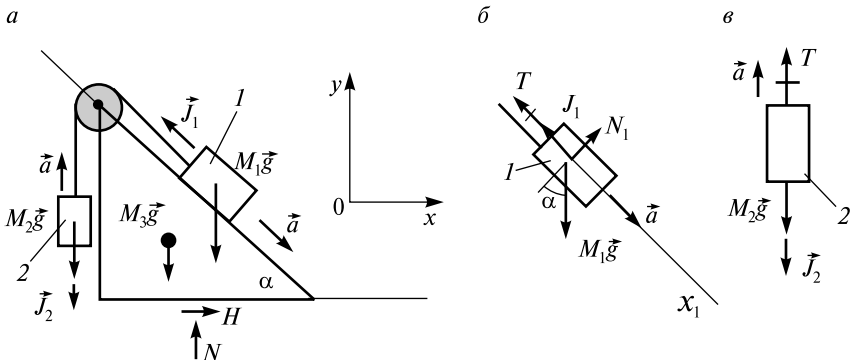


Рис. 10.6: а — система грузов и нерастяжимая нить; б — груз А; в — груз В

Чтобы призма оставалась в покое, сдвигающая сила  $H$  должна быть меньше силы трения  $F_{\text{тр}}$ , т.е. должно выполняться условие  $H < F_{\text{тр}}$ .

$$F_{\text{тр}} = f N = f [(M_1 + M_2 + M_3)g + J_2 - J_1 \sin \alpha].$$

Найдем ускорение грузов. Поскольку нить, переброшенная через блок, является нерастяжимой, то для грузов 1 и 2 ускорение будет одинаковым и равным  $\vec{a}$ .

Применим принцип Даламбера отдельно для груза  $A$  (рис. 10.6, б) и отдельно для груза  $B$  (рис. 10.6, в).

$$\text{Груз } A: \quad \sum X' = 0, \quad M_1 g \sin \alpha - J_1 - T = 0;$$

$$J_1 = -M_1 \vec{a}.$$

$$\text{Тогда} \quad M_1 g \sin \alpha - M_1 a - T = 0. \quad (*)$$

$$\text{Груз } B: \quad \sum Y = 0, \quad T - M_2 g - J_2 = 0.$$

Поскольку  $J_2 = -M_2 a$ , имеем

$$T - M_2 g - M_2 a = 0. \quad (**)$$

Решая совместно уравнения (\*) и (\*\*), находим:

$$a = (M_1 g \sin \alpha - M_2 g) / (M_1 + M_2) = g ((M_1 \sin \alpha - M_2) / (M_1 + M_2)).$$

Возвратимся к неравенству и определим массу груза  $M_3$ :

$$M_1 a \cos \alpha = f [(M_1 + M_2 + M_3)g + M_2 a - M_1 a \sin \alpha];$$

$$((M_1 \cos \alpha) / f) a = (M_1 + M_2 + M_3)g + a(M_2 - M_1 \sin \alpha);$$

$$(M_1 + M_2 + M_3)g = (M_1 \cos \alpha) / f + M_1 \sin \alpha - M_2 a;$$

$$M_3 = (a/g) ((M_1 \cos \alpha) / f + M_1 \sin \alpha - M_2) - (M_1 + M_2);$$

$$M_3 = ((M_1 \sin \alpha - M_2) / (M_1 + M_2)) ((M_1 \cos \alpha) / f + (M_1 \sin \alpha - M_2) - (M_1 + M_2)).$$

Далее рассмотрим основы аналитической механики.

## Глава 11. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

### 11.1. Классификация механических связей

*Механическими связями* называют условия, ограничивающие свободу перемещений точек механической системы.

Будем различать *геометрические связи*, когда ограничения налагаются только на координаты точек, и *кинематические связи*, когда

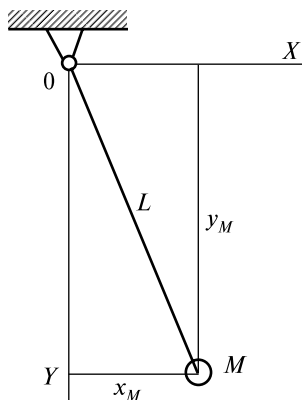


Рис. 11.1. Пример геометрической связи

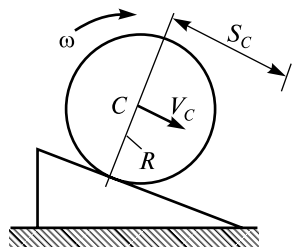


Рис. 11.2. Пример кинематической связи

ограничения налагаются на координаты и на скорости точек системы. Из геометрических связей дифференцированием уравнений связей можно получить кинематические связи. Обратное действие — интегрирование уравнений кинематических связей — не всегда возможно.

На рис. 11.1 приведен пример геометрической связи. На тело малых размеров (материальную точку) с помощью жесткого стержня наложена связь, выраженная уравнением

$$x_M^2 + y_M^2 = L^2.$$

Благодаря этой связи точка  $M$  должна находиться в плоскости  $XOY$  на окружности радиуса  $L$ .

На рис. 11.2 приведен пример кинематических связей — колесо катится без скольжения:  $V_C = \omega R$  можно проинтегрировать, получив при этом связь геометрическую:  $S_C = \phi R$ , где  $\phi$  — угол поворота,  $S_C$  — путь центра колеса.

Геометрические и интегрируемые кинематические связи называются *голономными* связями. Неинтегрируемые кинематические связи называются *неголономными*. Примером *неголономной* связи является условие, налагаемое при управляемом движении ракеты на ее скорость, направленную на самолет противника. Другим примером неголономной связи служит условие, наложенное на скорость точки шара, касающейся шероховатой поверхности. Если качение происходит без скольжения, то скорость этой точки равна нулю. При этом нельзя указать на какое-либо ограничение координат, если центр шара движется не по прямой траектории.

Если в уравнения связей время явно не входит, то связи называются *стационарными*. На рис. 11.1 приведен пример стационарной связи. Если в уравнения связей явно входит время, то связи называются *нестационарными*, или *реонормными*.

Если механические связи выражаются уравнениями, то они называются *двусторонними*, или *удерживающими*. Если механические связи выражаются неравенствами, то они называются *односторонними*, или *неудерживающими*.

Односторонними являются связи, налагаемые рельсами железной дороги на подвижной состав.

В дальнейшем изложении большую роль будет играть понятие *идеальных связей*. Идеальными, в отличие от реальных, называют связи без трения.

## 11.2. Возможные перемещения. Степени свободы

Введем понятие *возможного перемещения* материальной точки. Для одной точки возможным перемещением называется *такое бесконечно малое мысленное перемещение, которое допускается в рассматриваемый момент времени наложенными на точку связями*.

Если связью для точки является, например, движущаяся поверхность, уравнение которой  $f(x, y, z, t) = 0$ , то действительное перемещение  $d\mathbf{r}$  за время  $dt$  является в общем случае векторной суммой перемещений по поверхности и вместе с поверхностью. Все возможные перемещения точки  $\delta\mathbf{r}$  в фиксированный момент времени  $t$  расположатся на поверхности в положении, которое она занимает в рассматриваемый момент времени. Действительное перемещение при заданных начальных условиях и силах, которое может совершить точка от момента времени  $t$  до момента  $t + dt$ , только одно. Возможных перемещений у точки в момент времени  $t$  бесконечно много.

Для возможного перемещения не требуется времени на его совершение. Это мысленное перемещение, которое могла бы совершить точка при сохранении наложенных на нее связей, *изохронная вариация* ее радиуса-вектора.

*Возможным перемещением системы* называют любую совокупность возможных перемещений точек системы из занимаемого ею в данный момент времени положения, которые допускаются наложенными на нее связями.

При наличии односторонних связей допускаемыми считаются только те возможные перемещения, при которых связи сохраняются.

При стационарных связях действительное перемещение любой точки системы совпадает с одним из возможных ее перемещений, а при нестационарных связях действительное перемещение точки системы не совпадает ни с одним из ее возможных перемещений.

В общем случае система может иметь несколько и даже бесконечно много возможных перемещений.

Ввиду наличия связей, наложенных на систему, не все возможные перемещения являются независимыми.

*Число независимых возможных перемещений голономной механической системы с наложенными на нее стационарными связями называется числом степеней свободы этой системы.*

Для неголономной механической системы число степеней свободы меньше числа независимых возможных перемещений.

Понятие степеней свободы играет большую роль при изучении движения механических систем. Мы уже встретились с этим понятием, когда рассматривали кинематику твердого тела. Так, например, материальная точка в трехмерном пространстве имеет три степени свободы. Твердое тело в пространстве имеет шесть степеней свободы, при поступательном движении в пространстве оно имеет три степени свободы, при вращательном движении вокруг неподвижной оси — одну степень свободы.

### 11.3. Принцип возможных перемещений

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  точек. При равновесии системы выполняется условие

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^r) = 0. \quad (11.1)$$

Введем понятие возможной работы, т.е. такой, которую могут совершить приложенные к точкам системы силы на возможных перемещениях. Вычислим возможную работу, для чего умножим каждое слагаемое в выражении (11.1) на вариации радиусов-векторов точек системы  $\delta \mathbf{r}_i$ :

$$\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i^a \delta \mathbf{r}_i + \mathbf{F}_i^r \delta \mathbf{r}_i) = 0. \quad (11.2)$$



При решении задач на равновесие оказывается целесообразным ввести понятие так называемых идеальных связей.

*Идеальными* называются *связи*, реакции которых не совершают работу на любом возможном перемещении механической системы.

Если на систему наложены идеальные связи, то в выражении (11.2) можно приравнять нулю такую систему:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^r \delta \mathbf{r} = 0. \quad (11.3)$$

Примерами идеальных связей могут служить:

- а) гладкая поверхность при скольжении твердого тела (силы трения не учитываются);
- б) шероховатая наклонная плоскость при качении твердого цилиндра (без учета сопротивления качению);
- в) шарнирные опоры (без учета сил трения).

Учитывая (11.3), из выражения (11.2) получаем условие равновесия

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^a \delta \mathbf{r} = 0. \quad (11.4)$$

Уравнение (11.4) выражает **принцип возможных перемещений Лагранжа**.

*Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы элементарная работа активных сил при любом возможном перемещении была равна нулю.*

Уравнение (11.4) можно записать в развернутом виде:

$$\sum_{i=1}^n \left( \mathbf{F}_{ix} \delta x_i + \mathbf{F}_{iy} \delta y_i + \mathbf{F}_{iz} \delta z_i \right) = 0. \quad (11.5)$$

Аналитическое условие равновесия (11.5) принято называть *общим уравнением статики*. На основе этого аналитического условия равновесия могут эффективно решаться задачи статики.

**Пример 11.1.** Кривошипно-ползунный механизм (рис. 11.3) нагружен силой  $Q$ , приложенной к ползуну. Требуется определить величину момента  $M$  пары сил, приложенной к кривошипу, с помощью которой можно уравновесить механизм. Дано:  $AC = CB = L$ .

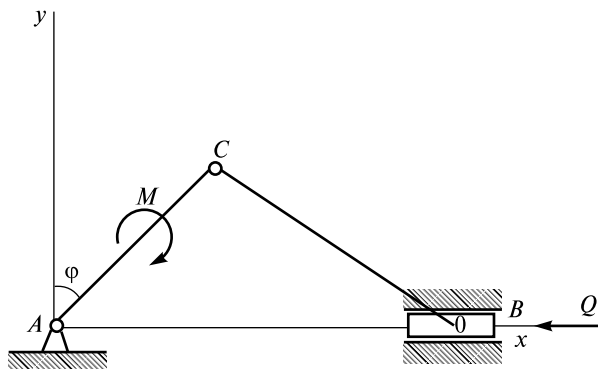


Рис. 11.3

*Решение.* Механизм имеет одну степень свободы. Его положение определяется углом  $\varphi$ . На точку  $B$  (ползун) наложена геометрическая связь:

$$x_b = 2L \sin \varphi. \quad (11.6)$$

Сообщим кривошипу возможное перемещение  $\delta\varphi$ . Тогда ползун  $B$  переместится на  $\delta x_b$ . Приравняем нулю возможную работу:

$$\delta A = M \delta\varphi - Q \delta x_b = 0.$$

Знак минус поставлен ввиду того, что сила  $Q$  направлена против положительного направления оси  $x$ . Считая координату  $\varphi$  независимой, вычислим возможное перемещение точки  $B$  как вариацию выражения (11.6):

$$\delta x_b = 2L \cos \varphi \cdot \delta\varphi. \text{ Получаем ответ: } M = 2QL \cos \varphi.$$

Эту задачу можно решить и геометрическим способом. Для этого потребуется составить два уравнения равновесия (сумма моментов вокруг точки  $C$  для правой части связывает силу  $Q$  с реакцией направляющей опоры, а сумма моментов относительно точки  $A$  для всей системы связывает эту реакцию с искомым моментом пары  $M$ ).

**Пример 11.2.** Составная балка (рис. 11.4, а) состоит из двух балок, шарнирно соединенных в точке  $C$ . На балку действует нагрузка, указанная на схеме. Определить опорные реакции. Размер  $a$  равен 3 м.

*Решение.* Для определения реакции  $V_B$  удалим мысленно связь, соответствующую реакции  $V_B$  (рис. 11.4, б). Получим механизм с одной степенью свободы. Действие удаленной связи заменим силой  $V_B$ . Задаем в точке  $B$  бесконечно малое перемещение  $\delta y$ . Правая часть системы  $CD$  получила бесконечно малый возможный угол поворота:

$$\delta\varphi = \delta y / BC = \delta y / 2a.$$

В соответствии с принципом возможных перемещений приравняем нулю работу всех приложенных сил и моментов.

$$\sum F_i \delta_i + M_i \delta\varphi_1 = 0.$$

$$20 \cdot 0 + 60 \cdot 0 + 100 (\delta y / 2a) - V_B \delta y = 0;$$

$$100 (\delta y / 2 \cdot 3) = V_B \delta y.$$

$$V_B = (100 / 2 \cdot 3) = 16,67 \text{ кН}.$$

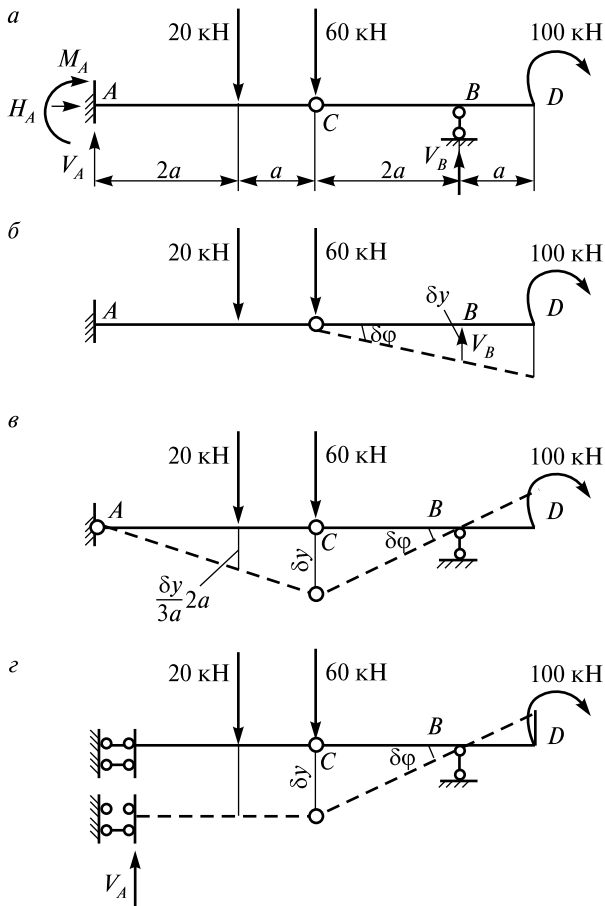


Рис. 11.4: а — составная балка; б, в, г — балка с удаленными реакциями

Аналогично ищем реакции  $M_A$  и  $V_A$ , для чего рассмотрим рис. 11.4, в, для которого имеем:

$$\delta\varphi_A = \delta y/3a, \quad \delta\varphi = \delta y/2a;$$

$$\sum F_i \delta y_i + M_i \delta\varphi_i = 0;$$

$$20(\delta y/3a)2a + 60\delta y - 100(\delta y/2a) + M_A(\delta y/3a) = 0;$$

$$M_A(\delta y/3a) = 100(\delta y/2a) - 60\delta y - 20 \cdot 2/3(\delta y);$$

$$M_A = 150 - 60 \cdot 33 - 20 \cdot 2/3 \cdot 3 \cdot 3 = -510 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Рассматривая рис. 11.4, з, запишем:

$$\delta\varphi = \delta y/2a;$$

$$\sum F_i \delta y_i + M_i \delta\varphi_i = 0;$$

$$20(\delta y) + 60\delta y - 100(\delta y/2a) - V_A(\delta y) = 0;$$

$$V_A(\delta y) = 60\delta y + 20\delta y - (100/2a)(\delta y).$$

Тогда

$$V_A = 60 + 20 - (50/3) = 63,33 \text{ кН}.$$

## 11.4. Общее уравнение динамики

Принцип Даламбера позволяет свести задачу динамики к рассмотрению уравновешенной системы сил.

Для механической системы из  $n$  векторных уравнений уже была записана система уравнений, которая имела вид (10.20):

$$\mathbf{F}_i^E + \mathbf{F}_i^J + \mathbf{F}_i^{\text{ин}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (11.7)$$

При переходе к главным векторам и главным моментам исключались внутренние силы (в любой механической системе на основании аксиомы о действии и противодействии). Поступим аналогичным образом. Разделим силы на активные и реактивные. Тогда принцип Даламбера можно представить следующим образом:

$$\mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^r + \mathbf{F}_i^{\text{ин}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (11.8)$$

**Пример 11.3.** Механическая система с одной степенью свободы состоит из трех твердых тел (рис. 11.5), связанных гибким нерастяжимым тросом. Требуется найти ускорение тела  $P_1$ , опускающегося вниз и увлекающего за собой всю систему. Массой троса можно пренебречь. Неподвижный блок  $P_2$  и каток

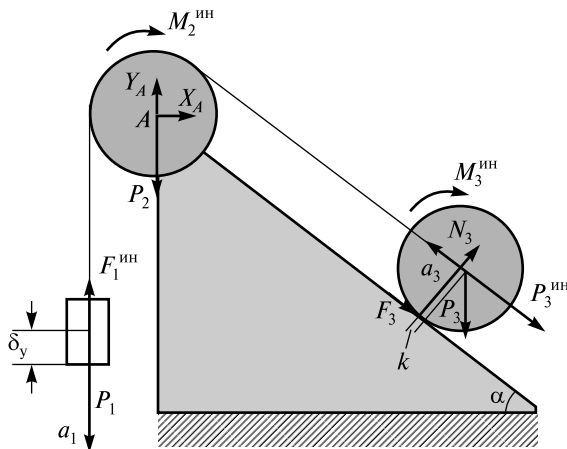


Рис. 11.5

$P_3$  являются однородными цилиндрами одинакового радиуса. Коэффициент трения качения  $k$ .

*Решение.* Прикладываем к системе все активные и реактивные силы, а также силу инерции к телу  $P_1$ , главные моменты сил инерции к блоку и к кату, главный вектор сил инерции к кату. Задаем бесконечно малое возможное перемещение  $\delta y$  телу  $P_1$ . Соответствующие перемещения получают тела  $P_2$  и  $P_3$ .

В соответствии с общим уравнением динамики (11.8) приравняем нулю работу всех силовых факторов:

$$P_1 \delta y - F_1^{\text{ин}} \delta y - M_2^{\text{ин}} \frac{\delta y}{r} - M_3^{\text{ин}} \frac{\delta y}{r} - R_2^{\text{ин}} \delta y - P_3 \sin \alpha \delta y - P_3 \cos \alpha k \frac{\delta y}{r} = 0.$$

Подставляем значения инерционных факторов и выносим за скобки общий множитель  $\delta y$ :

$$\left\{ \left[ P_1 - P_3 \left( \sin \alpha + \frac{k}{r} \cos \alpha \right) \right] - \frac{a_1}{2g} (2P_1 + P_2 + 3P_3) \right\} \delta y = 0.$$

Получаем искомое ускорение

$$a_1 = \frac{2 \left[ P_1 - P_3 \left( \sin \alpha + \frac{k}{r} \cos \alpha \right) \right] g}{(2P_1 + P_2 + 3P_3)}.$$

## 11.5. Элементарная теория удара

Ударом принято называть такое взаимодействие двух тел, при котором за малый промежуток времени  $\tau$  скорости точек тел изменяются на большую величину. В этом случае возникают большие ускорения и, как следствие, значительные по величине силы взаимодействия. Законы изменения ударных сил во времени в большинстве случаев неизвестны. Ввиду этого в расчетах вместо самих сил используют их импульсы. Интегрируя закон Ньютона по времени (на промежутке от 0 до  $\tau$ ), получаем основное уравнение теории удара

$$m(U - V) = \sum_{i=1}^n S_i(F_i), \quad (11.9)$$

где  $S_i(F_i) = \int_0^{\tau} F_i(t) dt$  — импульс ударной силы;

$V$  — скорость точки до удара;

$U$  — скорость точки после удара.

Элементарная теория строится на следующих гипотезах и допущениях:

— *время соударения настолько мало, что можно пренебречь перемещениями тел за этот период;*

— *импульсами сил неударного происхождения (например, сил тяжести) можно пренебречь.*

Ограничим сначала наше рассмотрение ударом твердых тел, находящихся до и после удара в поступательном движении. Иными словами, будем изучать соударение материальных точек.

Упругие свойства соударяющихся тел учитываются с помощью предложенного Ньютоном коэффициента восстановления  $e$ , определяемого экспериментальным путем. При ударе материальной точки о неподвижную преграду этот коэффициент равен отношению скорости после удара к скорости до удара:

$$e = U/V. \quad (11.10)$$

Измерив в эксперименте высоту падения груза до удара —  $H$  и после удара —  $h$ , можно вычислить значение коэффициента восстановления:

$$e = U/V = \sqrt{2gh} / \sqrt{2gH} = \sqrt{h/H}.$$

Величина  $e$  зависит от материала соударяющихся тел. При ударе дерева о резину  $e = 0,26$ , дерева о дерево  $e = 0,5$ , стали по стали  $e = 0,56$ . В практических задачах можно пользоваться такими значениями:  $e = 0$  — абсолютно неупругий удар;  $e = 1$  — абсолютно упругий удар.

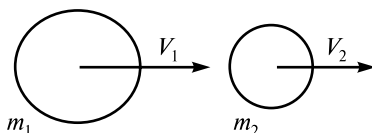


Рис. 11.6. Прямой центральный удар

Рассмотрим прямой центральный удар (рис. 11.6). Для того чтобы произошел удар, должно выполняться условие  $V_1 > V_2$ . Найдем скорости точек после удара.

Поскольку ударная сила является внутренней в системе двух материальных точек, количество движения системы до удара и после него должно сохраниться:

$$Q_{\text{ду}} = Q_{\text{пу}}, \text{ или } m_1 V_1 + m_2 V_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2, \quad (11.11)$$

где  $U_1$  и  $U_2$  — скорости точек после удара.

Зависимость (11.10) распространим на отношение модулей относительных скоростей:

$$e = \frac{U_2 - U_1}{V_1 - V_2}. \quad (11.12)$$

Система двух уравнений (11.11) и (11.12) дает возможность найти скорости точек после удара.

Рассмотрим потерю кинетической энергии при ударе. Если известны законы изменения ударных сил, то можно использовать теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме и записать

$$T_2 - T_1 = A_{1-2}^E + A_{1-2}^J.$$

Интересно выразить коэффициент полезного действия (КПД) в двух часто встречающихся технологических процессах. При забивке свай полезной является кинетическая энергия тела  $m_2$  после удара; она расходуется на преодоление сил сопротивления грунта. Получаем

$$\text{КПД} = \frac{T_{\text{пу}}}{T_{\text{ду}}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

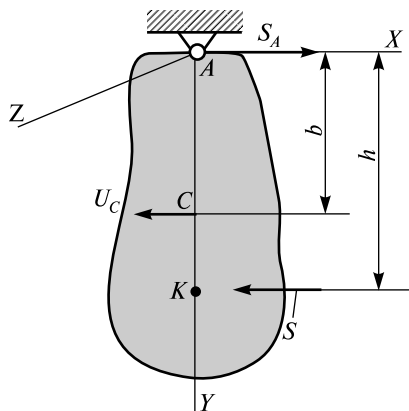


Рис. 11.7. Удар по вращающему телу

Для увеличения КПД требуется  $m_1 \gg m_2$ .

При ковке металла полезной является именно потерянная (для движения) кинетическая энергия, расходуемая в основном на деформирование детали. Здесь  $m_2$  — масса наковальни вместе с обрабатываемой деталью. Получаем

$$\text{КПД} = \frac{T_{\text{ду}} - T_{\text{пу}}}{T_{\text{ду}}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Для увеличения КПД требуется  $m_2 \gg m_1$ .

Рассмотрим удар по физическому маятнику (т.е. по твердому телу, подвешенному на горизонтальной оси). На рис. 11.7 показан физический маятник с массой  $m$  и моментом инерции  $J_{AZ}$ , имеющий плоскость симметрии. Ударный импульс  $S$  приложен в этой плоскости симметрии перпендикулярно вертикальной оси  $AY$ . До удара маятник был неподвижен. В результате удара центр масс  $C$  получает скорость  $U_C$ , в шарнирной опоре возникает реактивный импульс  $S_A$ .

Для получения неизвестных  $U_C$  и  $S_A$  составим два уравнения, выражающие теоремы об изменении количества движения и об изменении момента количества движения относительно оси  $AZ$ :

$$Q_{\text{пу}} - Q_{\text{ду}} = \sum S_i^{\text{уд}}, \quad K_{\text{пу}} - K_{\text{ду}} = \sum M(S_i^{\text{уд}}).$$

Поскольку до удара маятник был неподвижен,

$$mU_C = S - S_A, \quad J_{AZ} \frac{U_C}{b} = Sh. \quad (11.13)$$

Система двух уравнений (11.13) дает

$$U_C = \frac{Sbh}{J_{AZ}}, \quad S_A = S \left( 1 - \frac{mbh}{J_{AZ}} \right).$$



Реактивный импульс  $S_A$ , возникающий в опорном устройстве, в технических приложениях нежелателен, так как влияет на износ деталей. Чтобы устранить этот реактивный импульс, необходимо точку приложения внешнего ударного импульса расположить на расстоянии  $h$  от оси подвеса:

$$h = J_{AZ} / mb. \quad (11.14)$$

Точка  $K$  (см. рис. 11.7) носит название центра удара твердого тела. Ее положение совпадает с описанным ранее центром качаний физического маятника.

Рассмотрим пример решения задачи.

**Пример 11.4.** Найти центр удара для тонкого однородного стержня длины  $L$ , подвешенного одним концом на горизонтальной оси.

*Решение.* Центр удара согласно (11.14)

$$h = \frac{J_{AZ}}{mb} = \frac{mL^2}{3} : m \frac{L}{2} = \frac{2}{3} L.$$

Более подробно с теорией удара можно ознакомиться в специальной литературе.

---

## Раздел 2

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

## Глава 12. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

### 12.1. Задачи сопротивления материалов

Трудно представить себе мир без окружающих нас инженерных сооружений — конструкций промышленных и гражданских зданий, автомобилей, железных дорог и др. Большинство из них имеют сложную конструкцию и состоят из множества элементов. В процессе эксплуатации элементы конструкции подвергаются действию различных сил. Например, на опоры моста передается его собственный вес и вес проходящего по нему транспорта; ножки стула, на котором сидит человек, воспринимают его вес.

Сопротивление материалов — азбука расчетов на прочность, где рассматриваются методы расчетов на *прочность*, *жесткость* и *устойчивость* типовых элементов конструкций.

*Прочностью* называется способность материала или конструкции воспринимать различные воздействия, не разрушаясь и не претерпевая беспрепятственного деформирования. Под разрушением подразумевается полное нарушение целостности тела (конструктивного элемента) вследствие накопления повреждений и развития трещин.

*Жесткостью* называется способность материала или конструкции сопротивляться упругим деформациям. Можно также сказать, что жесткостью конструкции называют ее способность воспринимать нагрузку без существенного изменения геометрических размеров.

*Устойчивостью* называется способность конструкции и ее частей сохранять под воздействием заданной нагрузки первоначальную форму упругого равновесия. Обычно потеря устойчивости сопровождается большими перемещениями или разрушением конструкции. На устойчивость необходимо рассчитывать такие элементы конструкции, характер деформации которых претерпевает резкое качественное изменение при достижении нагрузкой некоторого определенного значения.

## 12.2. Схематизация элементов конструкций

Формы элементов конструкций разнообразны, но каждый из них можно при расчетах рассматривать как стержень, пластину, оболочку и массивное тело. Названные элементы конструкций различаются геометрическим соотношением характерных размеров.

*Стержень (брус)* — это тело, у которого два размера малы по сравнению с третьим.

*Пластина* — это тело, ограниченное двумя поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими.

*Оболочка* — это тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с прочими размерами.

*Массивное тело* — это тело, у которого все размеры одного порядка.

Приведем характерные названия стержневых элементов в зависимости от их назначения и вида деформирования (рис. 12.1). Стержни (брусья), работающие на изгиб, называются *балками*; стержни, воспринимающие вертикальные сжимающие силы, — *стойками*,

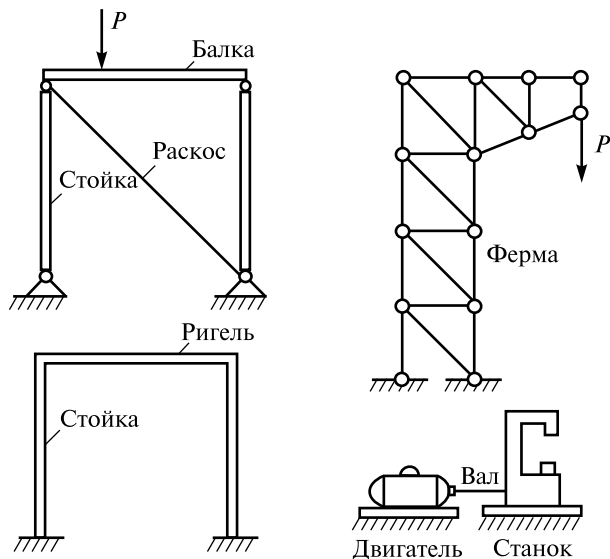


Рис. 12.1. Примеры стержневых конструкций

наклонные элементы — *раскосами*. Конструкцию, состоящую из соединенных изгибаемых стержней, называют *рамой*. Если же благодаря шарнирному соединению стержней все они работают на растяжение или сжатие (от нагрузки, приложенной в узлах), то конструкцию называют *фермой*. Стержень, передающий вращательное движение, называют *валом*.

### 12.3. Основные типы опорных связей и балок

Различают три основных вида опорных закреплений (опор), применяемых для плоских систем: шарнирно-подвижная, шарнирно-неподвижная, заделка (зашемление). Условные обозначения опор и опорные реакции, которые в общем случае могут в них возникнуть, показаны на рис. 12.2.

*Шарнирно-подвижная опора* допускает перемещение опорного сечения параллельно опорной плоскости, поворот его в вертикальной плоскости относительно оси цилиндрического шарнира и не дает возможности перемещения в направлении наложенной связи. Реакция такой опоры  $V_A$  направлена вдоль опорной связи.

*Шарнирно-неподвижная опора* не допускает смещений опорного сечения ни в продольном, ни в поперечном направлениях, но допускает поворот этого сечения относительно шарнира. Реакция шарнирно-неподвижной опоры проходит через центр шарнира, а ее величина и направление зависят от действующих на балку нагрузок. Вместо определения величины и направления этой реакции целесообразно определять отдельно две ее составляющие: вертикаль-

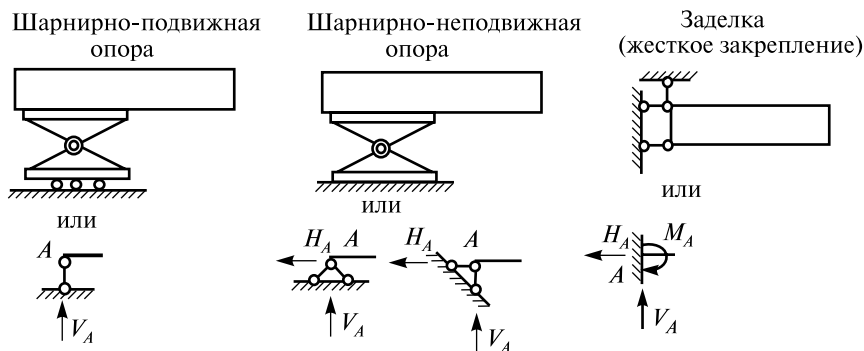


Рис. 12.2. Основные типы опорных связей

ную  $V_A$  и горизонтальную  $H_A$ . В частных случаях некоторые реакции могут быть равны нулю (например, если балка несет вертикальную нагрузку, то горизонтальная составляющая опорной реакции равна нулю).

*Заделка* (жесткое закрепление) не допускает поворота опорного сечения и перемещения его ни в каком направлении, т.е. на это сечение наложено три связи. В такой опоре возникают вертикальная  $V_A$  и горизонтальная  $H_A$  составляющие опорной реакции и реактивный момент  $M_A$ .

На практике чаще всего балки соединяются с основанием при помощи названных опор или их сочетаний. Наиболее широкое распространение получили следующие типы балок:

– *консоль* (рис. 12.3, а) — балка с одним жестко зашечленным и другим свободным концом;

– *простая балка* (рис. 12.3, б) — однопролетная балка, имеющая по концам шарнирные опоры; расстояние между опорами  $l$  называют *пролетом балки*;

– *консольная балка* (рис. 12.3, в, г) — простая балка, имеющая одну или две консоли (под консолью понимается часть балки, продолжающаяся за опору).

В опорах балок, изображенных на рис. 12.3, от заданной плоской системы сил возникают три реактивных усилия, для их определения составляются три уравнения равновесия.

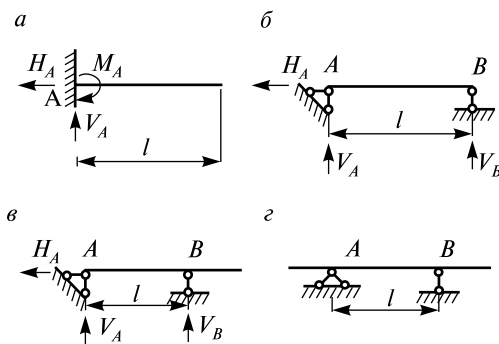


Рис. 12.3. Типы балок:

а — консоль, балка с одним жестко зашечленным концом; б — простая однопролетная балка; в, г — простая балка, имеющая одну или две консоли

При определении опорных реакций в балке-консоли (рис. 12.3, а) следует использовать следующие уравнения равновесия:

$$\Sigma Z = 0, \Sigma Y = 0, \Sigma M = 0. \quad (12.1)$$

В балках, показанных на рис. 12.3, б—г, опорные реакции можно определить, используя различные комбинации уравнений равновесия (12.1). При этом рекомендуется та комбинация, при которой в каждое уравнение равновесия будет входить только одна неизвестная реакция:

$$\Sigma Z = 0, \Sigma M_A = 0, \Sigma M_B = 0. \quad (12.2)$$

В первое уравнение в качестве неизвестного входит реакция  $H_A$ , во второе —  $V_B$ , в третье —  $V_A$ . При определении опорных реакций рекомендуется составлять, помимо уравнений, использованных для решения, контрольное уравнение равновесия  $\Sigma Y = 0$ . Эта проверка обязательна, так как она гарантирует правильность определения значений и направлений вертикальных реакций  $V_A$  и  $V_B$ . Сумма вертикальных реакций должна быть равна сумме всех вертикальных внешних сил.

## 12.4. Основные допущения, используемые в курсе «Сопротивление материалов»

Будем рассматривать реальное физическое тело, наделенное определенными идеализированными свойствами деформирования.

Изменение формы или размеров тела под действием нагрузки называют *деформацией* тела (рис. 12.4, а). На рис. 12.4, б, в, г изображены три характерные диаграммы деформирования  $F = f(\Delta l)$ .

Часть суммарной деформации, исчезающая после снятия нагрузки, называется *упругой* ( $\Delta l_{\text{упр}}$ ); деформация, остающаяся после разгрузки, — *остаточной*, или *пластической* ( $\Delta l_{\text{ост}} = \Delta l_{\text{пл}}$ ). Такой материал называется *упругопластическим* (рис. 12.4, б). Удлинение образца  $\Delta l = \Delta l_{\text{упр}} + \Delta l_{\text{ост}}$ .

Материал, в котором возникают только упругие деформации, называется *идеально упругим*. Если диаграмма деформирования выражена линейной зависимостью, то материал называется *линейно-упругим* (рис. 12.4, в), если нелинейной зависимостью — *нелинейно-упругим* (рис. 12.4, г).

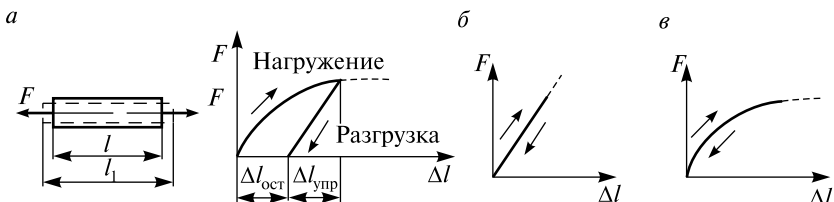


Рис. 12.4. Характерные диаграммы деформирования материала:  
 а — упругопластический материал; б — нелинейно-упругий материал; в — линейно-упругий материал

Материал элементов конструкций будем в дальнейшем считать *сплошным, однородным, изотропным и линейно-упругим*. Свойство *сплошности* свидетельствует о том, что не учитывается конкретная структура материала. Считается, что материал непрерывно заполняет весь объем элемента конструкции. Свойство *однородности* означает, что весь объем материала обладает одинаковыми механическими свойствами. *Изотропным* называют материал, у которого механические свойства во всех направлениях одинаковые.

В большинстве случаев деформации элементов конструкции невелики. Вследствие этого перемещения отдельных точек по сравнению с основными размерами системы весьма малы. Это обстоятельство позволяет внести некоторые упрощения в расчеты.

Рассмотрим консольную балку, нагруженную сосредоточенной силой на свободном конце (рис. 12.5, а). Под действием силы балка изгибается, точка приложения силы перемещается по вертикали и по горизонтали. Момент в заделке равен  $M = F(l - u)$ . Поскольку перемещение мало по сравнению с пролетом  $l$ , им можно пренебречь и определять момент по формуле  $M = Fl$ .

На основании изложенного можно заключить, что деформации реальных тел малы, что ими можно пренебречь при составлении уравнений статики.

При расчете элементов конструкций часто используется *принцип независимости действия сил*. Сущность его заключается в том, что какая-либо величина, например реакция или прогиб, от действия группы сил может быть получена как сумма величин, найденных от действия каждой силы в отдельности. Для балки, показанной на рис. 12.5, б, реакция  $V_A$  от сил  $F_1$  и  $F_2$  определяется равенством

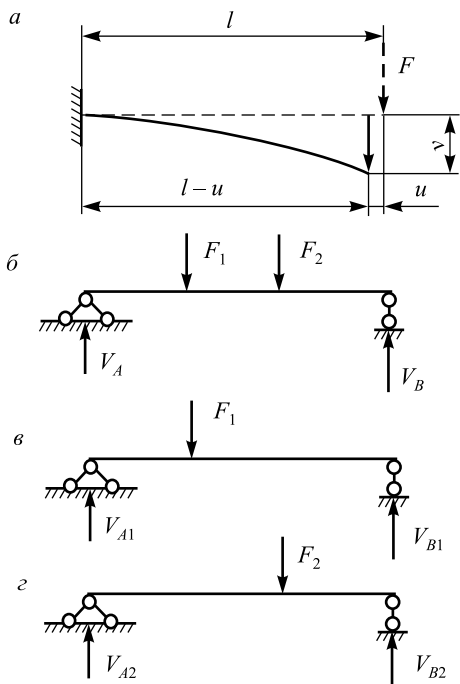


Рис. 12.5. Иллюстрация принципа малости деформации и принципа независимости действия сил:

*a* — консольная балка, нагруженная сосредоточенной силой на свободном конце; *б* — опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  от действия двух сил; *в*, *г* — опорная реакция  $V_A$ ,  $V_A$  от действия каждой силы в отдельности

На рис. 12.6, *в*, *г* изображена двухопорная балка, нагруженная блоками. В первой схеме (рис. 12.6, *в*) блоки равномерно распределены по всей длине балки. Во второй схеме (рис. 12.6, *г*) они установлены вертикально, в виде столбика посередине пролета. С точки зрения науки о прочности эти схемы резко различны, так как во втором случае балка будет испытывать в среднем сечении усилие двойной величины по сравнению с первой и даст прогиб  $v_2$  в 1,6 раза больше, чем первом случае ( $v_1$ ). Следовательно, операция сложения и разложения сил недопустима.

$$V_A = V_{A_1} + V_{A_2},$$

где  $V_{A_1}, V_{A_2}$  — опорная реакция от действия каждой силы в отдельности (рис. 12.5, *б*, *в*).

При расчете конструкций теоремы статики твердого тела, относящиеся к эквивалентности системы сил, недействительны.

*Нельзя переносить силу по линии ее действия, а необходимо учитывать точку ее приложения* (рис. 12.6, *а*, *б*).

В первом случае нагружения (рис. 12.6, *а*) сила  $F$  растягивает нижнюю часть стержня. Во втором случае (рис. 12.6, *б*) сила  $F$  приложена в верхней части бруса и сжимает верхнюю часть. С позиции статики твердого тела эта операция законна, и поэтому две схемы эквивалентны. Но с точки зрения науки о прочности эти схемы кардинально различаются. Поэтому операция переноса сил недопустима.



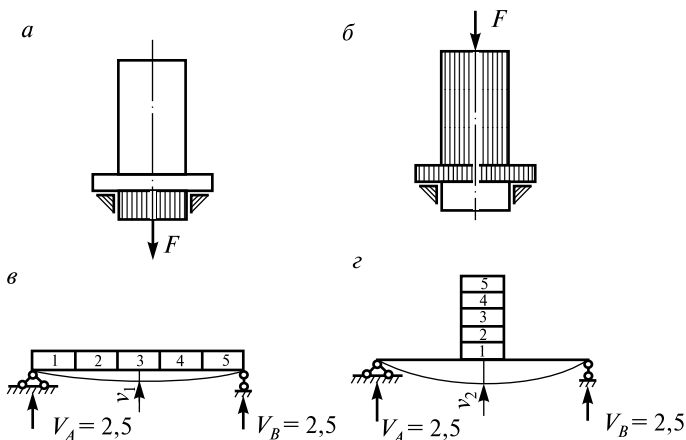


Рис. 12.6. Схема загрузки стержня и балки блоками:  
 а — сила  $F$  растягивает нижнюю часть стержня; б — сила  $F$  сжимает верхнюю часть стержня; в — блоки равномерно распределены по всей длине балки; г — блоки установлены вертикально посередине пролета балки

## 12.5. Схематизация внешних нагрузок

Внешние нагрузки подразделяются на *сосредоточенные* и *распределенные*.

*Сосредоточенные силы* — передаются на сооружение через небольшую площадку, поэтому на практике можно условно считать, что они приложены в точке. К числу таких сил относится, например, давление обода колеса на рельс (рис. 12.7, а). Сосредоточенные нагрузки измеряются в единицах силы (ньютонах, килоньютонах).

*Распределенная нагрузка* приложена к участкам конструкции большой площади, и при составлении расчетной схемы такую нагрузку нельзя заменить сосредоточенной. К числу распределенных нагрузок относится, например, песок на платформе, давление воды на плотину, а также снеговая или ветровая нагрузка.

Распределенная нагрузка характеризуется в каждой точке числовым значением, направлением вектора *интенсивности* этой нагрузки. Интенсивность может быть отнесена к единице объема  $\gamma$  (Н/м<sup>3</sup>), единице площади  $\rho$  (Н/м<sup>2</sup>) или единице длины  $g$  (Н/м). Соответственно она называется *объемной* (рис. 12.7, б), *поверхност-*

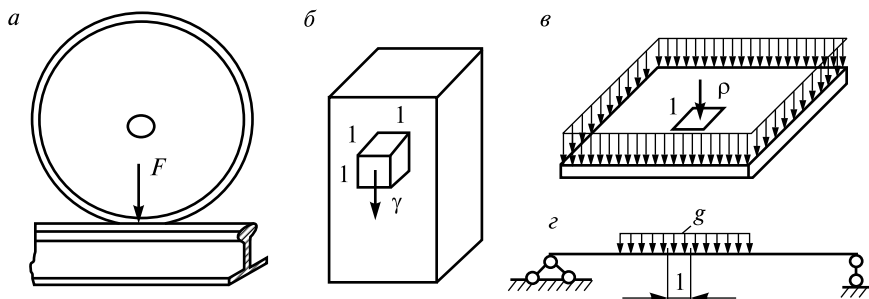


Рис. 12.7. Схема работы:

$a$  — колесо локомотива;  $б$  — объемная нагрузка;  $в$  — поверхностная нагрузка;  $з$  — линейно распределенная нагрузка

ной (рис. 12.7, в) и линейно распределенной, или погонной, нагрузкой (рис. 12.7, з).

Различают нагрузки *статические* и *динамические*, а также по длительности действия — *постоянные* и *временные*.

Быстро изменяющуюся нагрузку называют *динамической*, а расчет с учетом возникающего колебательного движения — *динамическим расчетом*.

Нагрузка, постоянная или очень медленно изменяющаяся во времени, когда скоростями и ускорениями возникающего движения можем пренебречь, называется *статической*.

*Постоянные нагрузки* действуют на протяжении всего периода эксплуатации конструкции. Примером может служить собственный вес конструкции.

*Временные нагрузки* действуют в течение ограниченного промежутка времени. Примером может служить действие веса поезда на мост.

## 12.6. Метод сечений

При действии на тело внешних сил оно деформируется. Следовательно, меняется взаимное расположение частиц тела, в результате чего возникают дополнительные силы взаимодействия между частицами. Эти силы взаимодействия в деформированном теле будем называть *внутренними силами (усилиями)*. При решении задач сопротивления материалов необходимо уметь определять значение

и направление внутренних усилий (например, в задачах, где оценивается прочность элементов конструкций). Для их определения применяют *метод сечений*.

Рассмотрим тело, имеющее форму бруса и находящееся в равновесии под действием системы внешних сил  $F_i$ . Пусть требуется определить внутренние усилия в произвольном сечении  $a-a$  для этого бруса (рис. 12.8, *а*). Мысленно разрежем его по сечению  $a-a$  на две части I и II и удалим одну из них, например, часть I (обычно оставляется та часть, для которой приложено меньше внешних нагрузок).

Оставшаяся часть (II) в общем случае не будет находиться в равновесии. Для сохранения этой части бруса в равновесии необходимо к ней приложить систему усилий, распределенных по сечению  $a-a$  (рис. 12.8, *б*). Они и есть внутренние усилия в сечении  $a-a$  (рассматриваемого) бруса. Эти усилия заменяют собой действие отброшенной части I (вместе с приложенными к ней внешними силами) на оставшуюся часть II.

Внутренние усилия, которые, согласно закону о равенстве действия и противодействия, будут приложены к части II в сечении  $a-a$  равны и противоположны по направлению (внутренних) усилий, действующих на часть I в том же сечении.

В соответствии с правилами статики приведем систему внутренних усилий, действующих на часть II в сечении  $a-a$ , к *главному*

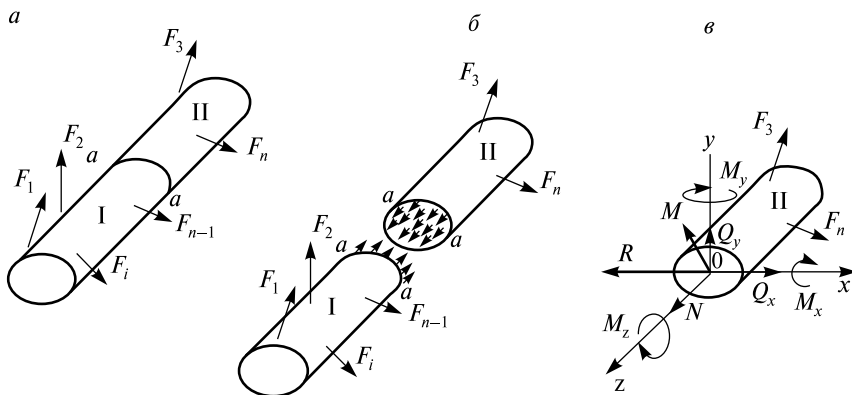


Рис. 12.8. Определение внутренних усилий методом сечений:

*а* — схема целого бруса; *б* — усилия, распределенные по сечению  $a-a$  в двух частях бруса; *в* — внутренние усилия, действующие по сечению  $a-a$  для II части бруса

вектору  $R$  и главному моменту  $M$ , приложенным в центре тяжести этого сечения. Выберем систему координат  $x, y, z$  с началом в том же центре тяжести (точка  $O$ ). Ось  $z$  направим по внешней нормали к сечению, а оси  $x, y$  расположим в плоскости сечения (рис. 12.8, в). Разложим главный вектор и главный момент на составляющие по осям  $x, y, z$ . В результате получим шесть составляющих, которые принято называть *внутренними силовыми факторами*, или *внутренними усилиями*.

Составляющие главного вектора имеют следующие названия:

- усилие вдоль оси  $z$  — *продольная сила*  $N$ ;
- усилия вдоль осей  $x$  и  $y$  — *поперечные силы*  $Q_x$  и  $Q_y$  соответственно (рис. 12.8, в)

Составляющие главного момента называются:

- момент относительно оси  $z$  — *крутящий момент*  $M_z$ ;
- моменты относительно осей  $x$  и  $y$  — *изгибающие моменты*  $M_x$  и  $M_y$  соответственно (рис. 12.8, в).

Таким образом, после приложения в сечении  $a$ — $a$  к части II усилий, заменяющих собой действие отброшенной части I (в общем случае, шести силовых факторов), оставшаяся часть (Ост. ч) II, которая нагружена приложенными к ней внешними силами, находится в равновесии. Поэтому для части II можно записать шесть уравнений равновесия:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Ост. ч.} & \text{Ост. ч.} & \text{Ост. ч.} \\
 \sum X = 0; & \sum Y = 0; & \sum Z = 0; \\
 \text{Ост. ч.} & \text{Ост. ч.} & \text{Ост. ч.} \\
 \sum M_x = 0; & \sum M_y = 0; & \sum M_z = 0.
 \end{array} \tag{12.3}$$

Сформулируем основные правила составления уравнений равновесия.

1. Проекция силы на ось равна произведению силы на косинус угла между направлением силы и направлением положительной оси.
2. Если сила перпендикулярна оси, то ее проекция на ось равна нулю.
3. Момент силы относительно оси равен произведению проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо силы.

4. Момент силы относительно оси равен нулю:

а) если сила параллельна оси;

б) если линия действия силы пересекает ось.

Из приведенных первых трех уравнений равновесия соответственно находим  $Q_x$ ,  $Q_y$  и  $N$ , а из трех последних уравнений —  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ .

Заметим, что знак у этих усилий, получаемый из решения уравнений равновесия, указывает на правильность (знак плюс) или неправильность (знак минус) выбранных направлений внутренних усилий.

Таким образом, метод сечений дает возможность определить в сечении направление и значение равнодействующих внутренних усилий. Закон же распределения внутренних усилий по сечению остается неизвестным. Для решения этого вопроса необходимо знать, как деформируется брус под действием внешних сил, приложенных к нему. Рассмотрим пример определения внутренних усилий.

**Пример 12.1.** Для пространственного стержня (рис. 12.9, а) определить значения и направления внутренних усилий в сечениях I—I и II—II.

*Решение.* Для определения значений и направлений внутренних усилий в сечениях I—I и II—II используем метод сечений.

*Сечение I—I.* Рассечем пространственный стержень в сечении I—I плоскостью, которая перпендикулярна оси стержня  $AB$  (рис. 12.9, б). Одну часть стержня, например, содержащую заделку, отбросим, и действие ее на оставшуюся часть заменим шестью внутренними усилиями  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ , приложенными в сечении I—I. Заметим, что в стержне, закрепленном при помощи жесткой заделки, целесообразно оставлять ту его часть, которая не закреплена, так как тогда не требуется определять опорные реакции.

Далее выберем прямоугольную систему осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , совместив начало координат с центром тяжести сечения I—I. Ось  $z$  направим вдоль оси рассеченного стержня  $AB$  (в сторону внешней нормали сечения), а оси  $x$ ,  $y$  расположим в плоскости поперечного сечения, как показано на рис. 12.9, б. Такой выбор осей является обязательным. Внутренние усилия  $N$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  направим вдоль соответствующих положительных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , внутренние усилия  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  — по ходу часовой стрелки при взгляде на оставшуюся часть со стороны положительного направления тех же осей. Такие направления внутренних силовых факторов будем считать положительными.

Часть стержня, нагруженная внешними силами  $2F$ ,  $5F$  и усилиями, приложенными в сечении I—I, находится в равновесии (рис. 12.9, б). Для этой части стержня составим шесть уравнений равновесия, из решения которых определим внутренние усилия в сечении I—I:

Ост. ч.

$$\sum X = 0; Q_x + 2F = 0; Q_x = -2F;$$

Ост. ч.

Ост. ч

$$\sum Y = 0; Q_y = 0; \quad \sum Z = 0; N + 5F = 0; N = -5F;$$

Ост. ч.

$$\sum M_x = 0; M_x - 5Fa = 0; M_x = 5Fa;$$

Ост. ч.

$$\sum M_y = 0; M_y - 2Fa + 5Fa = 0; M_y = -3Fa;$$

Ост. ч.

$$\sum M_z = 0; M_z = 0.$$

Таким образом мы определили действующие в сечении I—I внутренние усилия, причем два из них  $Q_y = 0$  и  $M_z = 0$ , а три ( $Q_x$ ,  $N$  и  $M_y$ ) действуют в направлении, противоположном принятому.

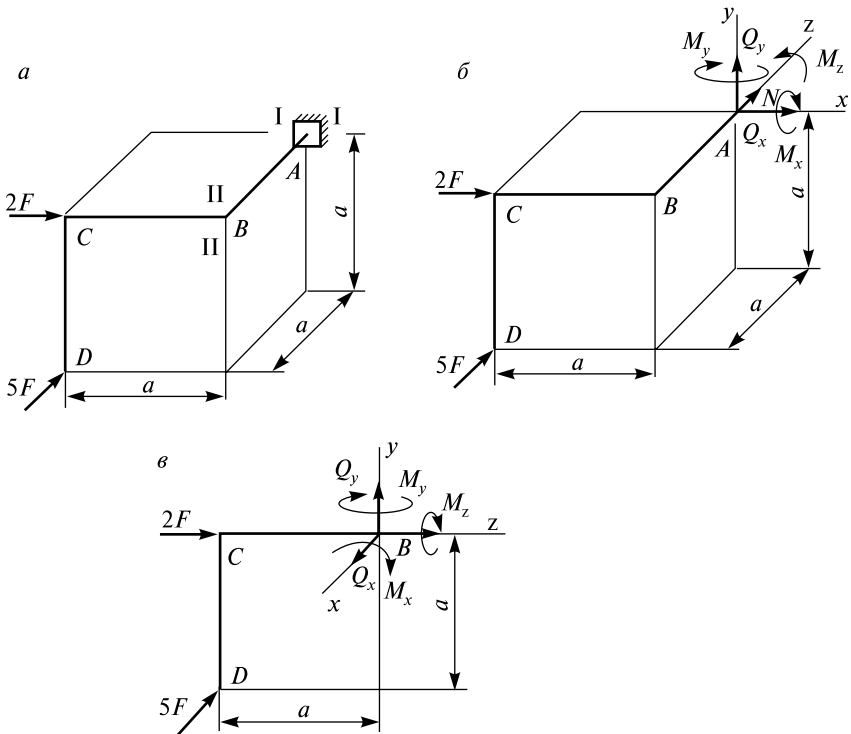


Рис. 12.9: а — схема пространственного стержня; б — пространственный стержень в сечении I—I; в — пространственный стержень в сечении II—II

Сечение II—II. Рассечем стержень в сечении II—II плоскостью, перпендикулярной оси стержня  $BC$ . Часть стержня, содержащую жесткое закрепление, отбросим. Выберем систему координат  $x, y, z$  и действие отброшенной части на оставшуюся заменим шестью внутренними усилиями, как показано на рис. 12.9, в.

Эта часть стержня находится в равновесии. Составим для нее уравнения равновесия:

$$\begin{array}{ll} \text{Ост. ч.} & \text{Ост. ч} \\ \Sigma X = 0; Q_x - 5F = 0; Q_x = 5F; & \Sigma Y = 0; Q_y = 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ост. ч.} \\ \Sigma Z = 0; N + 2F = 0; N = -2F; \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Ост. ч.} & \text{Ост. ч.} \\ \Sigma M_x = 0; M_x = 0; & \Sigma M_y = 0; M_y + 5Fa = 0; M_y = -5Fa; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Ост.ч.} \\ \Sigma M_z = 0; M_z - 5Fa = 0; M_z = 5Fa. \end{array}$$

Следовательно, в сечении II—II возникает четыре внутренних усилия ( $Q_y = 0, M_x = 0$ ), причем два из них ( $N$  и  $M_y$ ) направлены в противоположную сторону (рис. 12.9, в).

Как видно из рассмотренного примера, внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержня, меняются вдоль его продольной оси  $z$ . Для более наглядного представления характера изменения внутренних усилий вдоль оси  $z$  строят их графики.

*Графики изменения внутренних усилий вдоль продольной оси стержня называются эпюрами.* Например, эпюра продольных сил, эпюра поперечных сил, эпюра изгибающих моментов.

Эпюры внутренних усилий строят для того, чтобы наметить опасные сечения, т.е. такие, в которых существует большая вероятность разрушения из-за того, что там внутренние усилия достигают наибольших значений.

Для построения эпюр устанавливают границы участков, в пределах которых внутренние усилия изменяются по одному закону. Границами участков являются сечения, где приложены внешние сосредоточенные усилия (сила, момент) или начинается и заканчивается распределенная нагрузка, а также сечения, в которых имеется перелом оси стержня.

Применяя метод сечений и учитывая правила знаков, получаем аналитические зависимости изменения какого-либо усилия в пределах каждого участка. Ординаты эпюр внутренних усилий в опре-

деленном масштабе откладываем от базисной линии, которая проходит параллельно оси стержня. Построенную эпюру принято штриховать линиями, перпендикулярными базисной линии. На эпюрах для характерных ординат необходимо указать их значения, а в кружочке — знак усилия.

## 12.7. Понятия о напряжениях, деформациях и перемещениях

На основании сделанных допущений о сплошности тела можно считать, что внутренние силы непрерывно распределены по всему сечению. Выделим в произвольной точке  $K$  малую площадку  $\Delta A$ , ориентация которой в пространстве определяется нормалью площадки  $n$ , а равнодействующую внутренних сил на этой площадке обозначим  $\Delta R$  (рис. 12.10, *а*). Определим среднюю интенсивность внутренних сил на площадке:

$$p_{\text{ср}} = \frac{\Delta R}{\Delta A}. \quad (12.4)$$

Если площадку  $\Delta A$  будем уменьшать, то в пределе получим напряжение в точке:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} = p. \quad (12.5)$$

Интенсивность внутренних сил  $p$ , передающихся в точке через выделенную площадку, называется *напряжением на данной площадке*.

Вектор  $p$  выражает так называемое *полное напряжение* на данной площадке. Разложим его на составляющие (рис. 12.10, *б*):

$$p^2 = \sigma^2 + \tau^2, \quad (12.6)$$

где  $\sigma$  и  $\tau$  — соответственно *нормальное* и *касательное* напряжения на площадке с нормалью  $n$ .

*Нормальное напряжение* в данной точке по определенному сечению характеризует интенсивность сил отрыва (сжатия) частиц элемента конструкций, а *касательное напряжение* — интенсивность сил, сдвигающих эти частицы в плоскости рассматриваемого сечения.



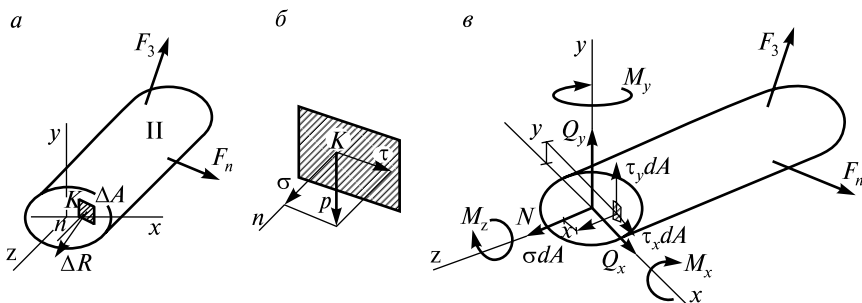


Рис. 12.10. Нормальные и касательные напряжения:  
 а — внутренние усилия в точке; б — напряжения в точке; в — внутренние усилия и напряжения в поперечном сечении стержня

Напряжения  $\sigma$  и  $\tau$  в каждой точке элемента зависят от направления сечения, проведенного через эту точку. Совокупность  $\sigma$  и  $\tau$ , действующих по разным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, представляет собой *напряженное состояние* в этой точке.

Для полной характеристики напряженного состояния в данной точке надо знать не только величину и направление напряжения, но и ориентацию сечения, по которому они действуют.

Установим связь между напряжениями и внутренними усилиями. Это можно сделать, используя уравнения статики. Выделим в сечении тела бесконечно малую площадку и приложим к ней элементарные силы  $\sigma dA$ ,  $\tau_x dA$  и  $\tau_y dA$  (рис. 12.10, в). Суммируя проекции элементарных сил по всему сечению на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и их моменты относительно этих же осей, имеем:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma dA; \quad Q_x = \int_A \tau_x dA; \quad Q_y = \int_A \tau_y dA; \\
 M_x &= \int_A (\sigma dA) y; \quad M_y = \int_A (\sigma dA) x; \\
 M_z &= \int_A (\tau_y x - \tau_x y) dA.
 \end{aligned} \tag{12.7}$$

Необходимо отметить, что распределение напряжений по сечению, как правило, неизвестно и оно не может быть найдено лишь из уравнений статики.

Под действием нагрузки конструкция деформируется: ее форма и размеры изменяются. Это существенно влияет на законы распределения внутренних усилий в напряженном теле, хотя само по себе изменение формы, как правило, незначительно и обнаруживается в большинстве случаев только при помощи чувствительных приборов.

Рассмотрим некоторую точку  $M$ , рис. 12.11, *а*; она переходит в новое положение  $M_1$ . Полное перемещение  $MM_1$  разложим на компоненты  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , параллельные осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно.

Компонента полного перемещения положительна, если она совпадает с направлением соответствующей оси координат.

Все возможные изменения формы можно оценить, используя всего лишь два вида деформаций — линейные (рис. 12.11, *б*) и угловые (рис. 12.11, *в*). При нагружении растягивающими силами стержень удлинится. Изменение  $\Delta l$  первоначальной длины  $l$  стержня называется *абсолютным удлинением*. Отношение абсолютного удлинения к первоначальной длине называется *относительным удлинением*:

$$\varepsilon = \Delta l / l. \quad (12.8)$$

Кроме линейных деформаций, возникают *угловые деформации*, или углы сдвига (рис. 12.11, *в*).

Поскольку нас интересуют деформации элемента, а не его перемещения как твердого тела, будем считать одну из граней неподвижной. В результате деформации элемент примет форму, показанную на рис. 12.11, *в* штриховыми линиями.

Мерой деформации сдвига служит изменение первоначального прямого угла между гранями элемента, обозначаемого  $\gamma$ . Из-за малости угла  $\gamma$  его тангенс принимается равным самому углу. Угол сдвига выражается в радианах.

$$\gamma = \frac{bb'}{ab}, \quad (12.9)$$

где  $bb'$  — абсолютный сдвиг, величина смещения;  
 $ab$  — расстояние между смещающими плоскостями.

*Условие жесткости.* Изменение формы тела под нагрузкой должно быть меньше некоторого наперед заданного значения деформации.

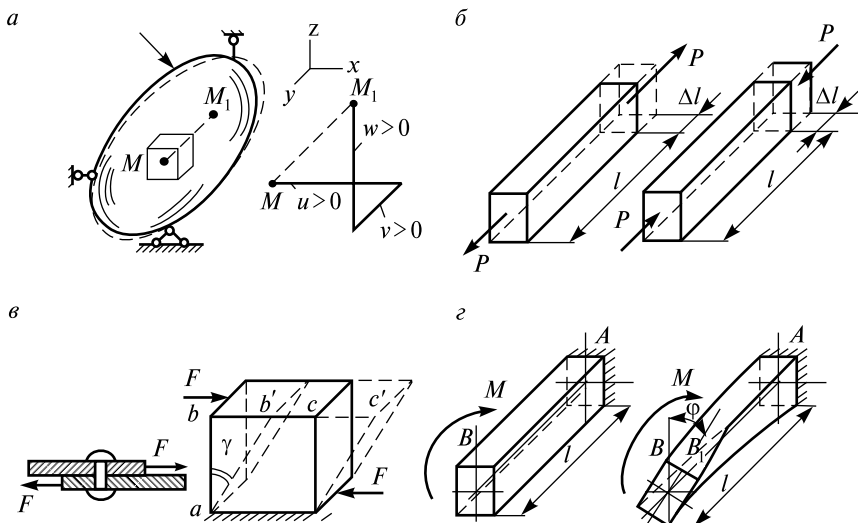


Рис. 12.11. Полное перемещение точки:

*a* — компоненты перемещения; *б* — линейная деформация; *в* — угловая деформация элемента материала; *г* — стержень, испытывающий деформацию кручения

Например, условие жесткости при растяжении имеет вид

$$\Delta l \leq [\Delta l], \quad (12.10)$$

где  $[\Delta l]$  — допускаемая деформация при растяжении.

В некоторых случаях стержни деформируются так, что поперечные сечения, оставаясь параллельными, поворачиваются вокруг продольной оси на некоторый угол относительно друг друга. Например, в соответствии со схемами, представленными на рис. 12.11, *г*, в сечение *B* стержня *AB* появляется *крутящий момент*  $M_z$  и поперечные сечения поворачиваются относительно заделки *A* на угол  $\varphi$ . В этом случае говорят о *деформации кручения*. Угол  $\varphi$  называют *углом закручивания*. Стержни, работающие на кручение, называют *валами*.

На кручение работают валы, шпиндели токарных и сверлильных станков, роторы двигателей и другие детали.

*Изгиб* — это такой вид нагружения, когда внешние силы вызывают моменты относительно оси симметрии (главной оси), расположенной в плоскости поперечного сечения. Ось стержня искрив-

ляется. Соответствующий момент называется *изгибающим*. Самый простой случай — *плоский изгиб*, когда внешние силы лежат в одной плоскости, совпадающей с плоскостью симметрии (главной плоскостью) балки.

К сложным видам нагружений относятся косой изгиб, изгиб с растяжением или сжатием, изгиб с кручением, общий случай сложного сопротивления.

## 12.8. Дифференциальные зависимости между внутренними усилиями и интенсивностью внешней нагрузки

Рассмотрим стержень (рис. 12.12, *a*), на части длины которого действуют  $t(z)$  — интенсивность неравномерно распределенной осевой нагрузки;  $g(z)$  — интенсивность неравномерно распределенной поперечной нагрузки. Положительной интенсивностью будем считать интенсивность, совпадающую с направлением соответствующей оси.

Условимся:

1) продольную силу  $N$  считать положительной, если она вызывает растяжение, т.е. направлена от сечения, и отрицательной, если она вызывает сжатие, т.е. направлена к сечению (рис. 12.13, *a*);

2) поперечную силу  $Q_y$  считать положительной, если она направлена так, что стремится повернуть элемент балки по ходу часовой стрелки (рис. 12.13, *б*);

3) изгибающий момент  $M_x$  считать положительным, если он изгибает элемент балки выпуклостью вниз, вызывая растяжение нижних волокон (рис. 12.13, *в*).

Выделим из стержня элемент длиной  $dz$  (см. рис. 12.12, *б*). Действие левой и правой отбро-

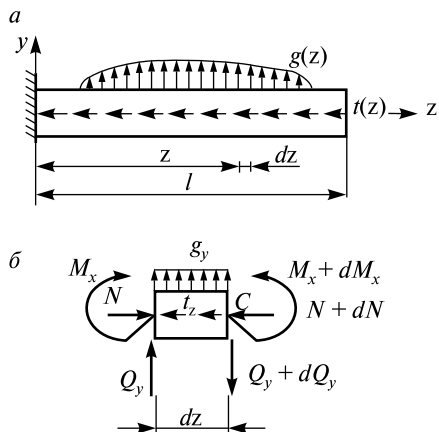


Рис. 12.12. К выводу дифференциальных зависимостей между  $t_z$ ,  $g_y$  и  $N$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ : *a* — консольная балка с действующей на нее нагрузкой; *б* — бесконечно малый элемент длиной  $dz$  взятый из консольной балки

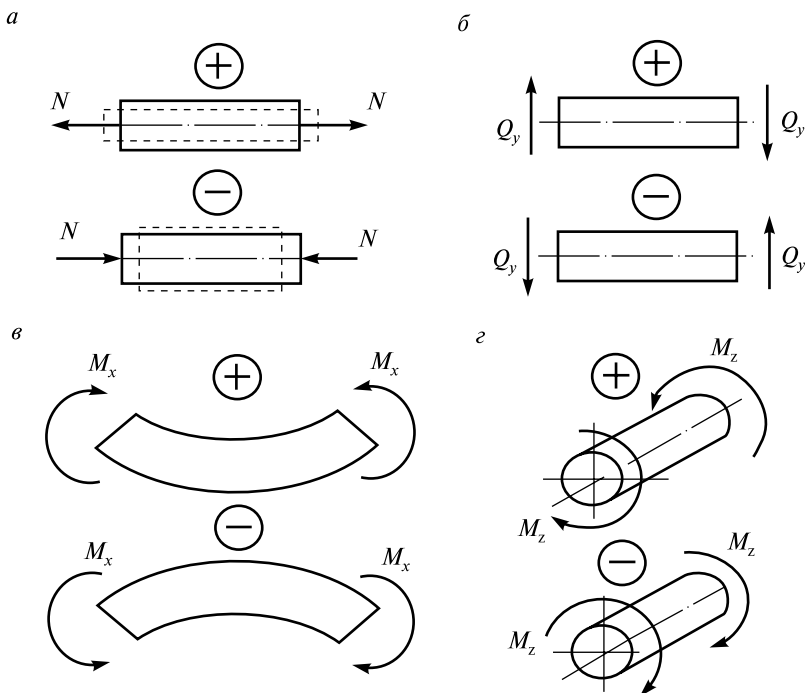


Рис. 12.13. Правило знаков в плоских системах для:  
 а — продольной силы; б — поперечной силы; в — изгибающего момента;  
 г — крутящего момента

шенных частей стержня на выделенный элемент заменяем продольными и поперечными силами и изгибающими моментами, возникающими в соответствующих сечениях. Будем считать, что при увеличении  $z$  внутренние усилия возрастают. Поскольку выделенный элемент бесконечно мал, нагрузку, распределенную по его длине, можно считать *равномерной*. Поскольку в пределах элемента к стержню не приложены внешние сосредоточенные силы и моменты, значения продольных, поперечных сил и изгибающих моментов в сечениях отличаются на бесконечно малые величины  $dN$ ,  $dQ$  и  $dM$ .

Составим уравнение равновесия — сумму проекций всех сил, приложенных к элементу, на ось стержня:

$$\sum F_z = -N + N + dN + t_z dz = 0,$$

откуда

$$t_z = -dN/dz. \quad (12.11)$$

Получили дифференциальную зависимость между  $t_z$  и  $N$ , т.е. первая производная от закона изменения продольной силы по абсциссе  $z$  равна интенсивности распределенной осевой нагрузки.

Установим дифференциальную зависимость между  $g_y$ ,  $Q_y$  и  $M_x$ . Для этого составим для выделенного элемента еще два уравнения равновесия:

$$\sum F_y = Q_y - Q_y - dQ_y + g_y dz = 0;$$

$$\sum M_c = M_x + Q_y dz + g_y dz \frac{dz}{2} - (M_x + dM_x) = 0.$$

Из первого уравнения после преобразований получим

$$g_y = dQ_y / dz. \quad (12.12)$$

*Первая производная от закона изменения поперечной силы по абсциссе  $z$  равна интенсивности распределенной поперечной нагрузки.*

Из второго уравнения, пренебрегая членом  $g_y(dz)^2/2$  как величиной второго порядка малости, найдем

$$Q_y = dM_x / dz. \quad (12.13)$$

*Первая производная от закона изменения изгибающего момента по абсциссе  $z$  равна поперечной силе.*

Зависимость (12.12) с учетом (12.13) можно записать в виде

$$g_y = d^2 M_x / dz^2. \quad (12.14)$$

*Вторая производная от изгибающего момента по абсциссе  $z$  равна интенсивности распределенной поперечной нагрузки.*

Теперь перейдем к установлению дифференциальной зависимости между интенсивностью распределенной скручивающей нагрузки и крутящим моментом.

Условимся крутящий момент считать положительным, если при взгляде на сечение со стороны внешней нормали он направлен по ходу часовой стрелки (рис. 12.13, з).

Принятое правило знаков для крутящего момента не имеет физического смысла. Оно необходимо для установления направления

крутящего момента и для построения эпюры  $M_z$ . Положительные значения крутящих моментов на эпюре будем откладывать вверх от базисной линии, а отрицательные — вниз.

Рассмотрим вал, на который действует скручивающая нагрузка  $m_z$  (рис. 12.14, а), из которого вырежем бесконечно малый элемент длиной  $dz$  (рис. 12.14, б). Этот элемент будет нагружен уравнивающими положительными крутящими моментами (в левом сечении  $M_z$ , в правом  $M_z + dM_z$ , где  $dM_z$  — приращение крутящего момента), и внешней распределенной скручивающей нагрузкой  $m_z$ , которую можно считать равномерно распределенной ввиду малости участка  $dz$ . Составим уравнение равновесия для бесконечно малого элемента:

$$\sum M_z = -M_z - m_z dz + (M_z + dM_z) = 0,$$

откуда

$$m_z = dM_z / dz. \quad (12.15)$$

*Первая производная от закона изменения крутящего момента по абсциссе  $z$  равна интенсивности скручивающей распределенной нагрузки.*

## 12.9. Построение эпюр внутренних силовых факторов

Эпюры внутренних силовых факторов строят в первую очередь для того, чтобы использовать их при расчете на прочность. Они дают возможность найти наибольшие значения внутренних усилий и положение сечений, в которых они возникают. Это сечение для стержня постоянного поперечного сечения являются опас-

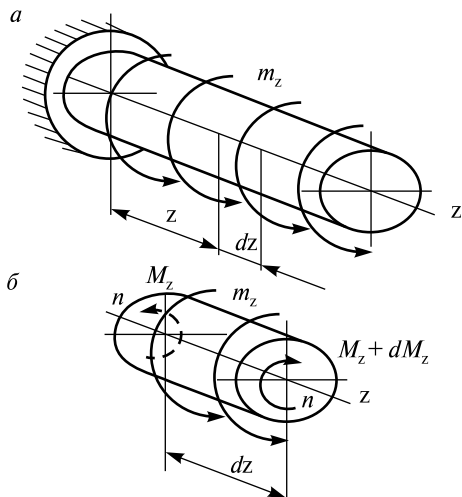


Рис. 12.14. К выводу дифференциальной зависимости при кручении:

а — консольный вал и действующая на него скручивающая нагрузка; б — бесконечно малый элемент длиной  $dz$ , взятый из консольного вала

ны м. Характер изменения внутренних усилий вдоль продольной оси стержня в общем случае бывает разным. Поэтому сначала следует установить границы участков, в пределах которых внутренние усилия будут изменяться по одной закономерности. Границами таких участков являются сечения, где приложены внешние сосредоточенные усилия (момент, сила), начинается или кончается распределенная нагрузка, а также сечения, в которых имеется перелом оси стержня или изменяются размеры поперечного сечения.

Применяя метод сечений и учитывая правила знаков, получают аналитические зависимости изменения внутренних усилий в пределах каждого участка, например  $N = f_1(z)$ ,  $M_x = f_2(z)$  и т.д., затем строят графики этих усилий.

Рассмотрим методику построения эпюр на конкретных примерах.

### ***Построение эпюр продольных сил***

При построении эпюры продольных сил положительные значения  $N$  будем откладывать вверх от горизонтальной базисной линии или вправо от вертикальной базисной линии; отрицательные значения  $N$ , соответственно, будем откладывать в противоположном направлении, т.е. либо вниз, либо влево.

**Пример 12.2.** Для стержня, нагруженного системой взаимно уравновешенных сил (рис. 12.15, а), определить значение интенсивности\*  $n$  равномерно распределенной продольной нагрузки и построить эпюру продольных сил.

**Решение.** Стержень (см. рис. 12.15, а) находится в равновесии. Поэтому значение интенсивности  $n$  равномерно распределенной нагрузки определим из уравнения равновесия

$$\sum Z = 2F - 3F - n3a + 4F = 0; n = F/a.$$

При составлении этого уравнения использовалось известное положение о том, что равнодействующая распределенной нагрузки

$$R_n = \int_0^z n dz = nz.$$

В нашем случае  $n = \text{const}$ , следовательно, при  $z = 3a$   $R_n = n \cdot 3a$ .

---

\* Интенсивность — величина распределенной нагрузки, приходящаяся на единицу длины балки.



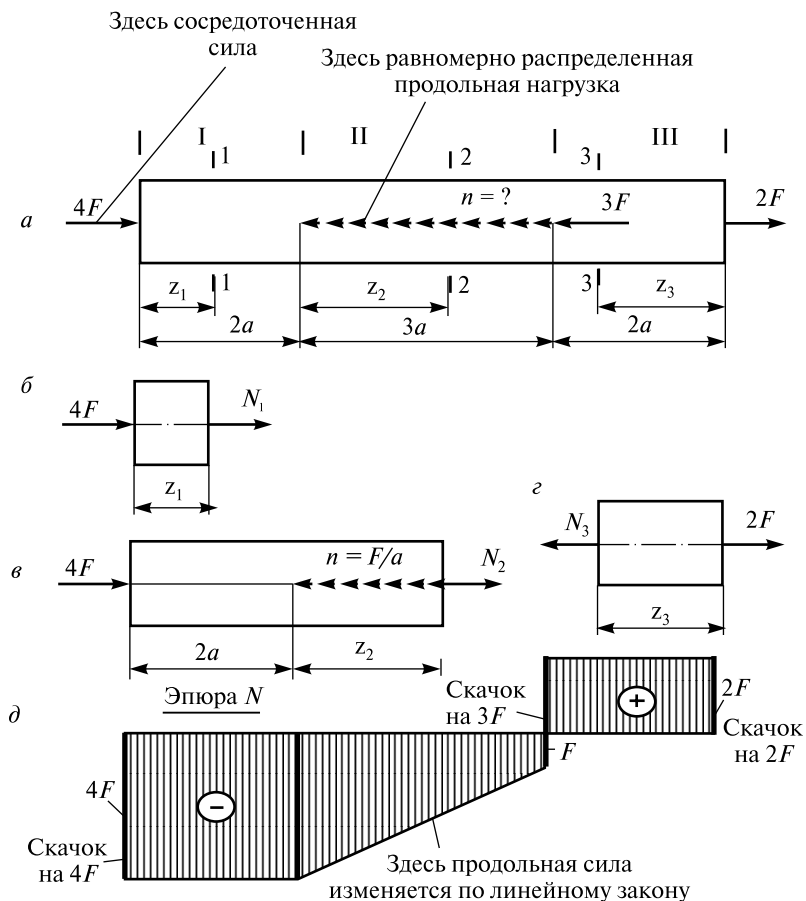


Рис. 12.15: а — стержень, нагруженный системой взаимно уравновешенных сил; б, в, г — определение продольных сил на участках I, II и III; д — эпюра продольных сил для стержня

Полученное из решения уравнения равновесия положительное значение интенсивности  $n$  распределенной нагрузки указывает на то, что ее направление соответствует тому, которое показано на рис. 12.15, а.

Стержень имеет три участка. Участки, как и в первом примере, обозначены римскими цифрами. На каждом участке в произвольном месте проведем сечения 1—1, 2—2 и 3—3 и рассмотрим равновесие оставшихся частей (рис. 12.15, б, в, г).

В первых двух случаях отбросим правые части стержня, а в последнем — левую часть, так как к ней приложено больше внешних нагрузок, и для этих частей запишем выражения продольных усилий на каждом участке.

*Участок I* ( $0 \leq z_1 \leq 2a$ ):

$$N_1 = -4F.$$

Из полученного выражения видно, что продольная сила в пределах первого участка будет постоянной и сжимающей, т.е. не зависит от координаты  $z$ .

*Участок II* ( $0 \leq z_2 \leq 3a$ ):

$$N_2 = -4F + \int_0^{z_2} ndz = -4F + \frac{F}{a} z_2.$$

Следовательно, на этом участке усилие  $N_2$  изменяется по линейному закону. Для построения эпюры  $N$  на этом участке надо определить значения продольной силы:

$$\text{при } z_2 = 0 \quad N_2 = -4F;$$

$$\text{при } z_2 = 3a \quad N_2 = -4F + F/a \cdot 3a = -F.$$

*Участок III* ( $0 \leq z_3 \leq 2a$ ):

$$N_3 = 2F.$$

Построенная эпюра продольных сил  $N$  показана на рис. 12.15, д.

Таким образом, на участках, нагруженных внешними сосредоточенными силами, внутреннее усилие  $N$  постоянно, причем в сечениях, где приложены эти силы, на эпюре  $N$  будут скачки, равные их значениям; на участках, нагруженных равномерно распределенной продольной нагрузкой, эпюра  $N$  будет изменяться по линейному закону.

### ***Построение эпюр крутящих моментов***

Построение эпюры крутящих моментов принципиально ничем не отличается от построения эпюры продольных сил. Методику их построения рассмотрим на конкретном примере.

**Пример 12.3.** Для стержня, показанного рис. 12.16, а, определить направление и значение скручивающего момента  $M^*$ , приложенного к правому торцовому сечению стержня. Построить эпюру крутящих моментов.

**Решение.** Так как стержень должен находиться в равновесии, направление и значение неизвестного момента  $M^*$  определим из уравнения

$$\sum M_z = -2M + (3M/a) 2a + M^* = 0, \quad M^* = -4M.$$

*a*

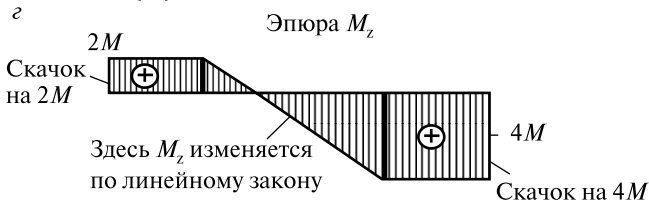
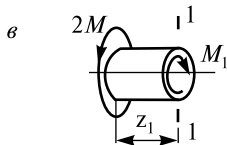
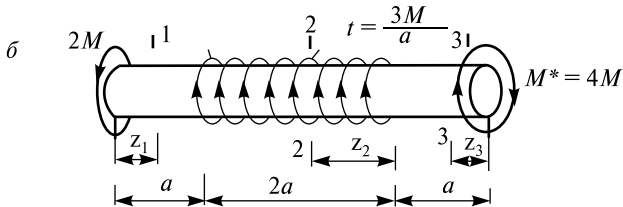
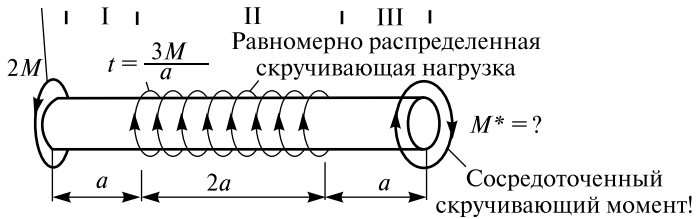


Рис. 12.16: *a* — расчетная схема вала; *б* — стержень нагружен системой взаимно уравновешенных скручивающих нагрузок, *в* — определение крутящего момента на участке I вала; *г* — эпюра крутящих моментов для вала

В этом уравнении равнодействующая распределенной моментной нагрузки определялась по выражению

$$M_t = \int_0^z t dz = tz,$$

т.е. при  $z = 2a$  и  $t = \text{const}$   $M_t = t \cdot 2a$ .

Полученное из решения отрицательное значение  $M^*$  указывает на то, что действительное направление этого скручивающего момента будет противоположным тому, которое показано на рис. 12.16, а.

Реальное направление момента показано на рис. 12.16, б.

Разобьем стержень на три участка (см. рис. 12.16, а), начиная от левого конца стержня. Найдем закономерность изменения крутящего момента на первом участке. Проведем на этом участке в произвольном месте сечение 1—1 и отбросим правую часть стержня. К оставшейся левой части приложим внешний момент  $2M$  и в сечении 1—1 крутящий момент  $M_1$  положительного направления (рис. 12.16, в); составим для нее уравнение равновесия.

Участок I ( $0 \leq z_1 \leq a$ ):

$$\sum M_z = -2M + M_1 = 0; M_1 = 2M.$$

Следовательно, на участке I крутящий момент будет постоянным (не зависит от текущей координаты  $z_1$ ) и имеет положительное направление.

В дальнейшем, по аналогии с приемом, описанным в примере 12.2, при определении продольного усилия  $N$  сразу будем записывать выражение для крутящего момента.

Проведем на участках II и III в произвольном месте сечения 2—2 и 3—3 (см. рис. 12.16, б). Мысленно каждый раз, отбрасывая левые части стержня, составим выражения для крутящих моментов на участках II и III.

Участок II ( $0 \leq z_2 \leq 2a$ ):

$$M_2 = -4M + \int_0^z t dz = -4M + (3M/a)z_2.$$

Следовательно, на участке II крутящий момент  $M_2$  изменяется по линейному закону. Для построения эпюры  $M_z$  на этом участке надо определить значения ординат:

$$\text{при } z_2 = 0 \quad M_2 = -4M;$$

$$\text{при } z_2 = 2a \quad M_2 = -4M + (3M/a)2a = 2M.$$

Участок III ( $0 \leq z_3 \leq a$ ),

$$M_3 = -4M,$$

т.е. крутящий момент на участке III — величина постоянная и отрицательная.

По вычисленным значениям ординат крутящих моментов на каждом участке построена эпюра  $M_z$  (рис. 12.16, г).

Таким образом, на участках, нагруженных внешними сосредоточенными скручивающими моментами, внутреннее усилие  $M_z$  постоянно, причем в сечениях, где приложены эти моменты, на эпюре  $M_z$  будут скачки, равные их значениям. На участках, нагруженных равномерно распределенной моментной нагрузкой, эпюра  $M_z$  будет изменяться по линейному закону.

## Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе балок

**Пример 12.4.** Для консольной балки, нагруженной, как показано на рис. 12.17, *a*, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

**Решение.** В соответствии с характером нагружения балку разбиваем на два участка, в пределах которых функции  $Q(z)$  и  $M(z)$  будут различными: участок I —  $AB$ , участок II —  $BC$ .

При составлении выражений для  $Q$  и  $M$  используем метод сечений. В пределах каждого участка проведем в произвольном месте сечения 1—1 и 2—2 (см. рис. 12.17, *a*). Отбросим правые части балки и рассмотрим равновесие левых незакрепленных частей, так как при этом нет необходимости определять опорные реакции. К этим частям (для равновесия) в сечениях 1—1 и 2—2 приложим *положительно направленные поперечные силы*  $Q_1$ ,  $Q_2$  и *изгибающие моменты*  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 12.17, *б* и *в*).

Далее выберем местоположение начала координат, так как от этого зависит простота выражений  $Q$  и  $M$ . В данной задаче начало координат целесообразно расположить в начале каждого участка: на участке I — в точке  $A$ , на участке II — в точке  $B$  (рис. 12.17, *б* и *в*). Составим уравнения равновесия для оставшихся частей балки и из них получим выражения для  $Q$  и  $M$ .

Участок I ( $0 \leq z_1 \leq a$ ) (рис. 12.17, *б*):

$$\sum Y = Q_1 - 3ga = 0; \quad Q_1 = 3ga;$$

$$\sum M_{e_1} = M_1 - 3gaz_1 = 0; \\ M_1 = 3gaz_1;$$

Участок II ( $0 \leq z_2 \leq 2a$ ) (рис. 12.17, *в*):

$$\sum Y = Q_2 - 3ga + 2gz_2 = 0;$$

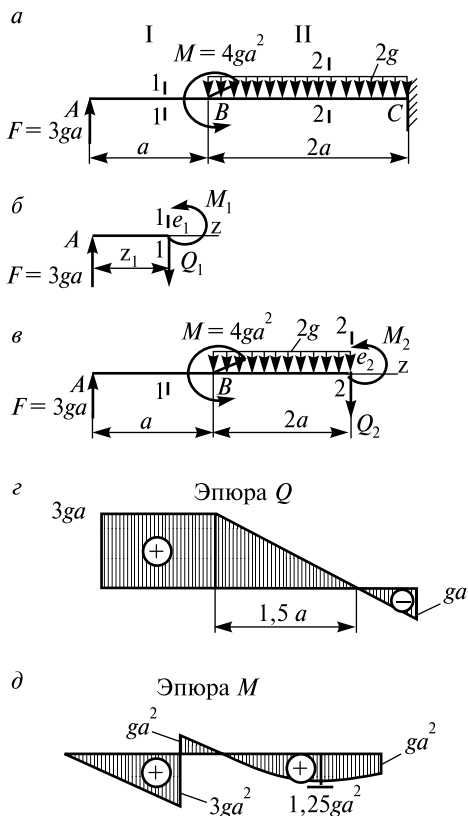


Рис. 12.17: *a* — консольная балка; *б*, *в* — определение поперечной силы и изгибающего момента в сечениях на участках I и II балки; *г* — эпюра поперечных сил; *д* — эпюра изгибающих моментов

$$Q_2 = 3ga - 2gz_2;$$

$$\sum M_{e_2} = M_2 - 3ga(z_2 + a) + 4ga^2 + 2gz_2(z_2/2) = 0;$$

$$M_2 = 3ga(z_2 + a) - 4ga^2 - gz_2^2.$$

Построим эпюры  $Q$  и  $M$ .

На участке I поперечная сила постоянна (не зависит от  $z$ ) и поэтому эпюра  $Q$  — прямая линия, параллельная оси балки (рис. 12. 17,  $\varepsilon$ ). Изгибающий момент изменяется по линейной зависимости (зависит от  $z$  в первой степени). Следовательно, чтобы построить эпюру  $M$ , достаточно вычислить значения  $M_1$  в начале и в конце участка:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_1 = 0; \quad \text{при } z_1 = a \quad M_1 = 3ga^2;$$

отложив полученные значения вниз от базисной линии, соединим ординаты прямой линией (рис. 12. 17,  $\delta$ ).

На участке II поперечная сила изменяется по линейной зависимости. Найдем значения  $Q_2$ :

$$\text{при } z_2 = 0 \quad Q_2 = 3ga; \quad \text{при } z_2 = 2a \quad Q_2 = -ga,$$

и по этим значениям построим эпюру  $Q$  (рис. 12. 17,  $\varepsilon$ ).

Изгибающий момент изменяется по квадратичной зависимости (зависит от  $z$  во второй степени). Для построения эпюры  $M$  следует определить значения  $M_2$  в трех сечениях: в начале и в конце участка, а также в сечении, где  $Q = 0$ , так как в этом сечении изгибающий момент достигает экстремального значения (максимума или минимума). Последнее утверждение следует из дифференциальной зависимости (12.13).

Вычислим значения  $M_2$ :

$$\text{при } z_2 = 0 \quad M_2 = -ga^2; \quad \text{при } z_2 = 2a \quad M_2 = ga^2.$$

Определим положение сечения, в котором  $Q = 0$ . Для этого выражение поперечной силы на участке II приравняем нулю:

$$Q_2 = 3ga_2 - 2gz_2 = 0; \quad \text{отсюда } z_2 = 1,5a.$$

Значение изгибающего момента в этом сечении будет:

$$M_2 = 3ga(1,5a + a) - 4ga^2 - g(1,5a)^2 = 1,25ga^2.$$

Отложим вычисленные значения  $M_2$  и через них проведем параболу с вершиной в сечении  $z_2 = 1,5a$ . Здесь касательная к эпюре должна быть параллельна оси балки (рис. 12.17,  $\delta$ ).

**Пример 12.5.** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для двухопорной балки, изображенной на рис. 12.18,  $a$ .

*Решение.* Сначала надо определить опорные реакции (их направления и значения). Предположим, что вертикальные опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  направлены вверх. Горизонтальная реакция  $H_A$  в шарнирно-неподвижной опоре рав-

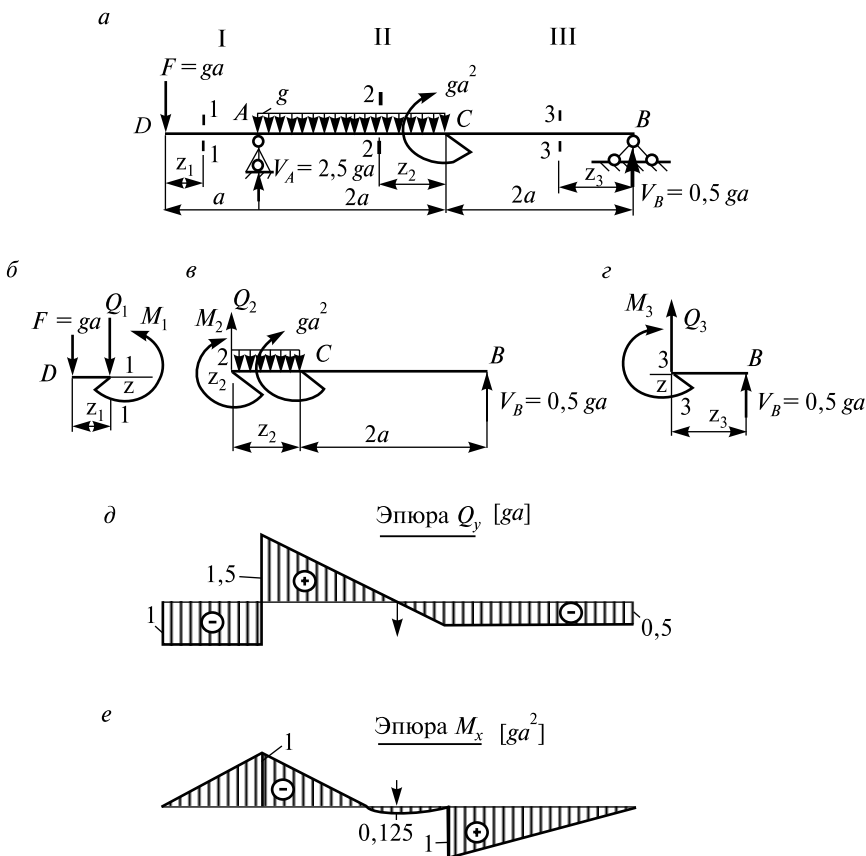


Рис. 12.18: *a* — загруженная двухопорная балка с консолью; *б*, *в*, *г* — определение поперечной силы и изгибающего момента в сечениях на I, II и III участках балки; *д* — эпюра поперечных сил; *е* — эпюра изгибающих моментов

на нулю, так как внешняя нагрузка перпендикулярна продольной оси балки, и поэтому на рис. 12.18, *a* реакция  $H_A$  не показана. Реакции  $V_A$  и  $V_B$ , как правило, следует определять из уравнений моментов, составленных относительно опор (точек *A* и *B*), так как в этом случае реакции можно найти независимо друг от друга:

$$\sum M_A = 0; \quad (g \cdot 2a) a + ga^2 - V_B \cdot 4a - ga \cdot a = 0;$$

$$\Sigma M_B = 0; \quad V_A \cdot 4a - (g \cdot 2a) \cdot 3a + ga^2 - ga \cdot a \cdot 5a = 0;$$

отсюда  $V_A = 2,5ga$  и  $V_B = 0,5ga$ .

Знак плюс у реакций  $V_A$  и  $V_B$  указывает на то, что их действительное направление совпадает с предполагаемым. После определения реакций  $V_A$  и  $V_B$  следует обязательно проверить правильность их вычисления, составив уравнение равновесия:

$$\Sigma Y = 0; \quad 2,5ga - g \cdot 2a - ga + 0,5ga = 0.$$

Следовательно, реакции найдены, верно.

В соответствии с характером нагружения разобьем балку на три участка: I —  $DA$ , II —  $AC$ , III —  $CB$ .

Чтобы составить выражения для  $Q$  и  $M$ , применим метод сечений. Рассечем балку в произвольных сечениях на каждом участке и рассмотрим равновесие одной из отсеченных частей (рис. 12.18, б, в и г):

на участке I — равновесие левой части (ось  $z$  направлена вправо, начало координат в точке  $D$ );

на участках II и III — равновесие правых частей (ось  $z$  направлена влево, начало координат, соответственно, в точках  $B$  и  $C$ ). Отметим еще раз, что для уравнивания отсеченных частей в сечениях 1—1, 2—2 и 3—3 необходимо приложить поперечные силы и изгибающие моменты положительного направления —  $Q_1$  и  $M_1$ ,  $Q_2$  и  $M_2$ ,  $Q_3$  и  $M_3$ , соответственно (см. рис. 12.18, б, в и г).

Составив уравнения равновесия для каждой отсеченной части, получим выражения поперечных сил и изгибающих моментов:

*Участок I* ( $0 \leq z_1 \leq a$ ) (рис. 12.18, б):

$$Q_1 = -ga; \quad M_1 = -gaz_1.$$

*Участок II* ( $0 \leq z_2 \leq 2a$ ) (рис. 12.18, в):

$$Q_2 = -0,5ga + gz_2; \quad M_2 = 0,5ga(2a + z_2) - ga^2 - 0,5gz_2^2.$$

*Участок III* ( $0 \leq z_3 \leq 2a$ ) (рис. 12.18, г):

$$Q_3 = -0,5ga; \quad M_3 = 0,5gaz_3.$$

При помощи этих выражений построены эпюры  $Q$  и  $M_x$  (рис. 12.18, д, е).

**Пример 12.6.** Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для балки с промежуточным шарниром, изображенной на рис. 12.19, а.

*Решение.* Составная балка  $AE$  состоит из основной балки  $AC$  консольного типа и вспомогательной (подвесной) балки  $CE$ . Выделим вспомогательную балку, проведя сечение  $a-a$  через шарнир  $C$ . В месте разреза будет действовать только поперечная сила  $Q_C$  (рис. 12.19, б). Выделенная балка  $CE$  находится в равновесии.

Запишем для нее уравнение равновесия

$$\Sigma M_C = 0; \quad -V_E \cdot 2a + ga^2 + (ga)(3/2)a = 0; \quad V_E = (5/4)ga = 1,25ga.$$



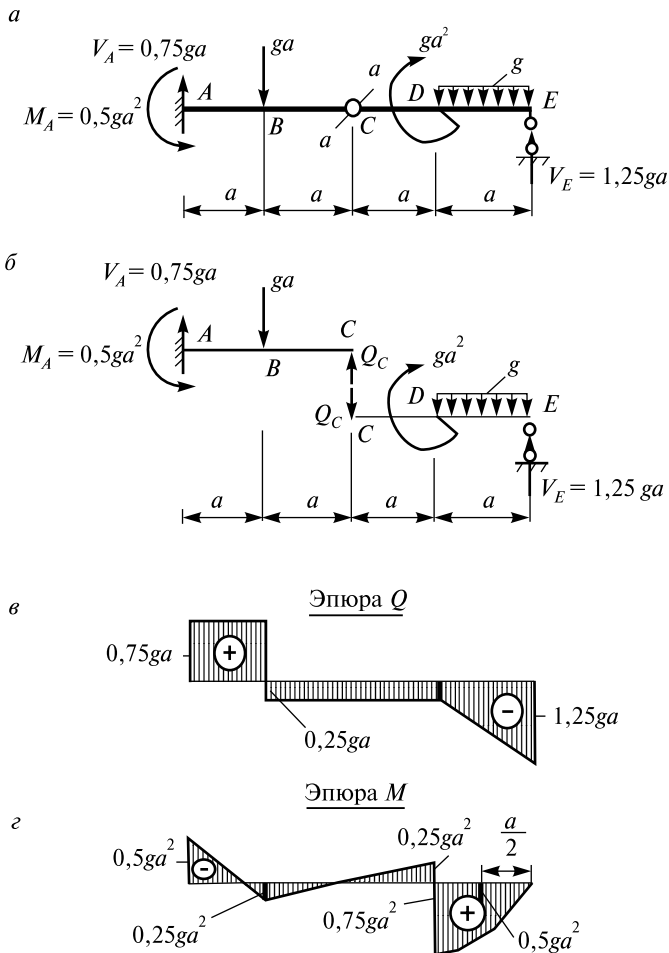


Рис. 12.19: *a* — балка с промежуточным шарниром; *б* — основная и вспомогательная балки; *в* — эпюра поперечных сил; *г* — эпюра изгибающих моментов

Далее можно строить эпюры  $Q$  и  $M$  как в обычной консольной балке, начиная с правого конца, так как наличие промежуточного шарнира  $C$  не влияет на определение внутренних усилий.

Разобьем балку на три участка  $ED$ ,  $DB$  и  $BA$  (см. рис. 12.19, *a*).

На участке  $ED$  балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой  $g$ ; поскольку  $dQ/dz = g = \text{const}$ , следовательно, сама функция  $Q(z)$  изменяется по линейному закону.

Чтобы построить эпюру  $Q$  на этом участке, достаточно вычислить значения  $Q$  в начале и в конце участка (в сечениях  $E$  и  $D$ ), рассматривая правую отсеченную часть балки:

$$Q_E = -1,25ga; \quad Q_D = -1,25ga + ga = -0,25ga.$$

Из дифференциальной зависимости  $dM/dz = Q$  следует, что если функция  $Q(z)$  изменяется по линейному закону, то функция  $M_x(z)$  изменяется по квадратичному закону. Для построения эпюры  $M_x$  надо знать три ординаты. Определим значения  $M_x$  в начале и в конце участка, рассматривая ту же правую отсеченную часть балки:

$$M_E = 0; \quad M_D = 1,25ga \cdot a - ga \cdot 0,5a = 0,75ga^2.$$

На этом участке нет характерного сечения, где функция  $M_x(z)$  достигала бы экстремума, так как поперечная сила не равняется нулю. Поэтому найдем значение  $M_x$  посередине участка ( $z = 0,5a$ ):

$$M_x = 1,25ga \cdot 0,5a - 0,5ga \cdot 0,25a = 0,5ga^2.$$

На участках  $DB$  и  $BA$  нет распределенной нагрузки,  $g = 0$ . Поэтому, как следует из дифференциальных зависимостей, поперечная сила  $Q$  постоянна, а изгибающий момент  $M_x$  изменяется по линейному закону.

Следовательно, на этих участках для построения эпюры  $Q$  достаточно вычислить по одному значению  $Q$ .

Для построения эпюры  $M_x$  необходимо определить значения  $M_x$  в начале и в конце участков.

Рассмотрим правые отсеченные части балки.

Участок  $DB$ :  $Q_{DB} = -1,25ga + ga = -0,25ga$ ;

$$M_D = 1,25ga \cdot a - ga \cdot 0,5a - ga^2 = -0,25ga^2;$$

$$M_B = 1,25ga \cdot 3a - ga \cdot 2,5a - ga^2 = 0,25ga^2.$$

Для контроля определим значение момента в шарнире  $C$ , где оно должно равняться нулю:

$$M_C = 1,25ga \cdot 2a - ga \cdot 1,5a - ga = 0,$$

т.е. вспомогательная балка  $CE$  находится в равновесии.

Участок  $BA$ :  $Q_{BA} = -1,25ga + ga + ga = 0,75ga$ ;

$$M_B = 1,25ga \cdot 3a - ga \cdot 2,5a - ga^2 = 0,25ga^2;$$

$$M_A = 1,25ga \cdot 4a - ga \cdot 3,5a - ga^2 - ga \cdot a = -0,5ga^2.$$

Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ , построенные по вычисленным ординатам, изображены на рис. 12.19, *в* и *г*.

Проверим равновесие балки  $AE$ . Из эпюр  $Q_y$  и  $M_x$  видно, что в заделке опорные реакции составляет:  $V_A = 0,75ga$  (направлена вверх);  $M_A = 0,5ga$  (момент направлен против хода часовой стрелки).

Составим уравнение равновесия:

$$\Sigma Y = 0; \quad 1,25ga + 0,75ga - ga - ga = 0;$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad -0,5ga^2 + ga \cdot a + ga^2 + ga \cdot 3,5a - 1,25ga \cdot 4a = 0.$$

Следовательно, балка находится в равновесии.

### ***Построение эпюр продольных и поперечных сил, изгибающих моментов в рамах***

В конструкциях сооружений и машин встречаются совокупности прямых и криволинейных стержней. Стержневая система, стержни которой (стойки и ригели) во всех или в некоторых узлах жестко соединены между собой, называется *рамой*.

В элементах плоских рам в отличие от рассмотренных балок, помимо поперечных сил и изгибающих моментов, в общем случае возникают и продольные силы. Поэтому для рам строят эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$ .

Правила знаков для продольной и поперечной сил остаются прежними, правило знаков для изгибающих моментов обычно не указывают, значения  $M_x$ , как и ранее, будем откладывать, аналогично балкам, со стороны растянутых волокон.

Ординаты положительных усилий  $N$ ,  $Q$  для вертикальных стержней будем откладывать вправо от оси, отрицательные, соответственно, — влево.

Рассмотрим пример построения эпюр  $N$ ,  $Q$  и  $M$  в раме.

**Пример 12.7.** Построить эпюры продольных и поперечных сил, а также изгибающих моментов для рамы, изображенной на рис. 12.20,  $a$ .

*Решение.* Определим опорные реакции, показанные на рис. 12.20,  $a$ , из следующих уравнений равновесия:

$$\Sigma Y = 0; \quad V_A - ga = 0; \quad V_A = ga;$$

$$\Sigma M_A = 0; \quad ga \cdot 3a - 2ga^2 - H_D \cdot 2a = 0; \quad H_D = 0,5ga;$$

$$\Sigma Z = 0; \quad H_D - H_A = 0; \quad H_A = H_D = 0,5ga.$$

Если возможно, следует выполнить проверку правильности определения опорных реакций. В нашем случае это можно сделать, составив уравнение равновесия:

$$\begin{aligned} \Sigma M_D = 0; \quad V_A \cdot 2a - H_A \cdot 2a + ga \cdot a - 2ga^2 &= 0, \text{ т.е.} \\ ga \cdot 2a - 0,5ga \cdot 2a + ga \cdot a - 2ga^2 &= 0, \end{aligned}$$

следовательно, опорные реакции вычислены правильно.



Разделим раму на три участка:  $AB$ ,  $BC$  и  $BD$ . На каждом участке в произвольном месте проведем сечения (рис. 12.20,  $a$ ) и составим уравнения равновесия для отсеченных частей рамы, изображенных на рис. 12.20,  $б$ ,  $в$ ,  $г$ :

- для определения продольной силы —  $\sum Z_i = 0$ ;
- для нахождения поперечной силы —  $\sum Y_i = 0$ ;
- для определения изгибающего момента —  $\sum M_{e_i} = 0$ .

После решения уравнений равновесия получим:

участок  $AB$  ( $0 \leq z_1 \leq 2a$ ) (рис. 12.20,  $б$ ):

$$N_1 = H_A = 0,5ga; \quad Q_1 = V_A = ga; \quad M_1 = V_A z_1 = ga \cdot z_1$$

(растянуты нижние волокна стержня  $AB$ );

участок  $BC$  ( $0 \leq z_2 \leq a$ ) (рис. 12.20,  $в$ ):

$$N_2 = 0; \quad Q_2 = F = ga; \quad M_2 = -F z_2 = -ga \cdot z_2$$

(растянуты верхние волокна стержня  $BC$ );

участок  $BD$  ( $0 \leq z_3 \leq 2a$ ) (рис. 12.20,  $г$ ):

$$N_3 = 0; \quad Q_3 = -H_D = -0,5ga; \quad M_3 = 2ga^2 + 0,5ga \cdot z_3$$

(растянуты левые волокна стержня  $BD$ ).

По этим выражениям построены эпюры продольных и поперечных сил, изгибающих моментов, которые изображены на рис. 12.20,  $д$ ,  $е$ ,  $ж$ .

Эпюры  $N$ ,  $Q$  и  $M$  необходимо проверить, используя дифференциальные зависимости между  $g$ ,  $Q$  и  $M$ . Кроме того, следует проверить равновесие узлов и отдельных частей рамы. Например, проведем сечение  $a-a$  и рассмотрим равновесие правой части рамы (см. рис. 12.20,  $a$  и  $з$ ). К этой части рамы приложим внешнюю нагрузку, а в местах рассечения стержней (в соответствии с эпюрами  $N$ ,  $Q$  и  $M$ ) — продольные и поперечные силы, изгибающие моменты. Составим уравнения равновесия для отсеченной части:

$$\sum Z = 0; \quad -0,5ga + 0,5ga = 0;$$

$$\sum Y = 0; \quad ga - ga = 0;$$

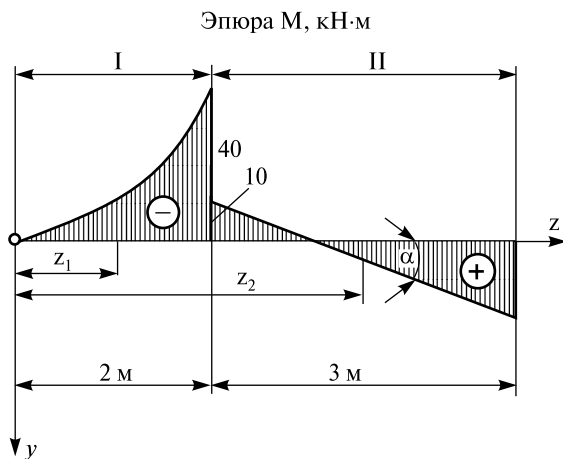
$$\sum M_B = 0; \quad ga^2 + ga \cdot a + ga \cdot a - 2,5ga^2 - 0,5ga \cdot a = 0.$$

Следовательно, рассматриваемая часть рамы находится в равновесии.

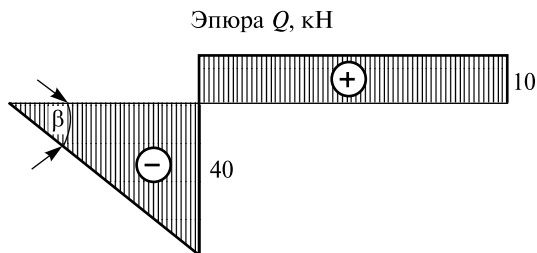
### **Обратная задача**

**Пример 12.8.** По эпюре изгибающих моментов, показанной на рис. 12.21,  $a$ , построить эпюру поперечных сил и определить нагрузку, действующую на балку. Криволинейный участок эпюры  $M$  очерчен по квадратной параболе, кружком отмечена ее вершина.

*a*



*б*



*в*

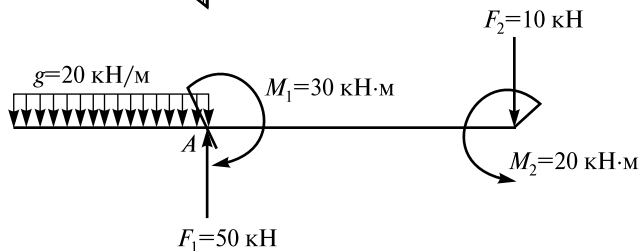


Рис. 12.21: *a* — эпюра изгибающих моментов; *б* — эпюра поперечных сил; *в* — нагрузка, примененная к балке

*Решение.* Получим выражения для первой (поперечной силы  $Q$ ) и второй (распределенной нагрузки  $g$ ) производных от функции изгибающего момента, заданной графически (эпюрой  $M$ ). Для этого сначала запишем функциональные зависимости для изгибающего момента на каждом участке.

Разобьем эпюру  $M$  на участки. Границами участков являются те сечения, в которых на эпюре  $M$  будут скачки и изломы. Имеем два участка. Выберем нача-

ло координат на левом конце балки. Выбранная система координат и участки показаны рис. 12.21,  $a$ .

На первом участке эпюра изгибающих моментов представлена графиком квадратной параболы, уравнение которой в общем случае имеет вид  $y = az^2 + bz + c$ . Для определения независимых переменных  $a$ ,  $b$ , и  $c$  обычно нужно знать координаты трех точек, через которые проходит эта функция, или другие условия (например, координаты точки, где первая производная функции равна нулю, т.е. положение вершины квадратной параболы). В нашем случае вершина квадратной параболы находится в начале координат. Уравнение такой функции имеет более простой вид:  $y = M_1 = az^2$ . Оно содержит один параметр  $a$ , который находим из условия, что парабола проходит через точку с координатами:  $z = 2$ ;  $y = -40$ . Тогда, подставляя координаты этой точки в уравнение параболы, получим  $-40 = a \cdot 2^2$ , откуда  $a = -10$ .

Таким образом, на первом участке ( $0 \leq z_1 \leq 2$ ) выражение изгибающего момента будет иметь вид

$$M_1(z) = -10z_1^2.$$

После дифференцирования функции  $M_1(z)$  получим зависимость для поперечной силы

$$Q_1(z) = \frac{dM_1}{dz} = -20z_1,$$

а после дифференцирования функции  $Q_1(z)$  выражение для распределенной нагрузки будет иметь вид

$$g_1(z) = \frac{dQ_1}{dz} = \frac{d^2M_1}{dz^2} = -20.$$

Из полученных выражений  $Q_1(z)$  и  $g_1(z)$  видно, что поперечная сила на этом участке является линейной функцией, а распределенная нагрузка — постоянная.

На втором участке эпюра изгибающих моментов представлена графиком линейной функции:  $y = M_2 = kz + b$  с двумя независимыми параметрами  $k$  и  $b$ . Для их определения используем условия, что данная прямая проходит через две точки, координаты которых известны:  $z_1 = 2$ ,  $y_1 = -10$  и  $z_2 = 5$ ,  $y_2 = 20$ ; получим

$$-10 = 2k + b; 20 = 5k + b,$$

отсюда  $k = 10$  и  $b = -30$ .

Следовательно, на втором участке ( $2 < z_2 < 5$ ) уравнение изгибающего момента будет иметь вид

$$M_2(z) = 10z_2 - 30.$$

После двукратного дифференцирования функции  $M_2(z)$  найдем

$$Q_2(z) = \frac{dM_2}{dz} = 10 \quad \text{и} \quad g_2(z) = \frac{d^2 M_2}{dz^2} = \frac{dQ_2}{dz} = 0.$$

Из этих выражений видно, что на втором участке поперечная сила постоянная, а распределенная нагрузка отсутствует.

На участках, где изгибающий момент изменяется по линейной зависимости, можно поперечную силу определять другим способом, не составляя выражений для момента  $M$ . Значение поперечной силы на этих участках равно тангенсу угла наклона линейной функции  $M(z)$  к горизонтальной оси, так как

$$Q(z) = \frac{dM}{dz} = \text{tg} \alpha. \quad \text{Знак поперечной силы устанавливается следующим образом:}$$

при возрастании функции  $M(z)$  первая производная (поперечная сила  $Q$ ) положительна, а при убывании ее она отрицательна.

В нашей задаче функция изгибающего момента на втором участке линейна и возрастает от  $-10$  до  $+20$  кН·м. Поэтому поперечная сила постоянна, положительна и равна

$$\text{tg} \alpha = Q_2 = \frac{20 + 10}{3} = 10.$$

Рассуждая аналогично, можно по эпюре  $Q$  (там, где она линейна) определить значение и знак распределенной нагрузки, поскольку  $g(z) = \frac{dQ}{dz} = \text{tg} \beta$ .

Тогда, поскольку функция  $Q(z)$  убывает от 0 до  $-40$  кН, распределенная нагрузка будет отрицательной и составит

$$\text{tg} \beta = g_1 = -\frac{40}{2} = -20.$$

По найденным выражениям  $Q(z)$  на первом и втором участках построена эпюра поперечных сил, (рис. 12.21, б).

Распределенная нагрузка  $g$  приложена к балке только на первом участке. Она получилась со знаком минус, и поэтому ее следует направить вниз, так как при выводе приведенных дифференциальных зависимостей распределенная нагрузка, направленная вверх, считалась положительной.

Помимо распределенной нагрузки к балке приложены сосредоточенные силы в тех сечениях, где на эпюре  $Q$  имеются скачки, и сосредоточенные моменты в местах скачков на эпюре  $M$ . Значения и направления сосредоточенных сил и моментов можно определить по следующим формулам, которые получены из рассмотрения равновесия элемента балки длиной  $dz$ , выделенного двумя сечениями слева и справа от скачков на эпюрах  $Q$  и  $M$ :

$$F = Q_{\text{пр}} - Q_{\text{лев}}; \quad M = M_{\text{пр}} - M_{\text{лев}},$$



где  $Q_{\text{пр}}$ ,  $Q_{\text{лев}}$ ,  $M_{\text{пр}}$ ,  $M_{\text{лев}}$  — ординаты эпюр поперечных сил и изгибающих моментов справа и слева от скачков, взятых со своими знаками. Положительное значение силы  $F$  соответствует ее направлению вверх, а момента  $M$  по ходу часовой стрелки, при  $z = 2$  сила  $F = 10 - (-40) = 50$  кН и направлена вверх; при  $z = 5$  момент  $M_2 = 0 - 20 = -20$  кН·м и направлен против хода часовой стрелки (рис. 12.21, в).

Правильность нагружения балки проверяем составлением уравнений равновесия, например:

$$\sum Y = 20 \cdot 2 - 50 + 10 = 0;$$

$$\sum M_A = -20 \cdot 2 \cdot 1 + 30 - 20 + 10 \cdot 3 = 0.$$

Нагрузка, приложенная к балке, показана на рис. 12.21, в.

## 12.10. Основные особенности при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов

С учетом рассмотренных примеров и дифференциальных зависимостей можно сформулировать ряд основных положений, оказывающих помощь при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в балках и позволяющих их контролировать.

1. На участках, где нет распределенной нагрузки ( $g = 0$ ), поперечная сила постоянная, изгибающий момент изменяется по линейному закону, причем тангенс угла наклона  $\alpha$  эпюры  $M_x$  равен значению поперечной силы  $Q_y$  ( $\text{tg} \alpha = Q$ ) (рис. 12.22, а).

В частном случае, когда одновременно  $g = 0$  и  $Q = 0$ , изгибающий момент постоянен (рис. 12.22, б).

2. На участке, где имеется равномерно распределенная нагрузка, поперечная сила изменяется по линейному закону (тангенс угла наклона  $\beta$  эпюры  $Q$  равен  $g$ ), а изгибающий момент — по квадратичному закону, выпуклость эпюры  $M_x$  обращена в сторону действия распределенной нагрузки  $g$  (рис. 12.22, в).

Если на этом участке поперечная сила в одном из сечений равна нулю, то здесь изгибающий момент достигает экстремального значения  $M_{\text{экстр}}$  — максимум или минимум (в этом сечении касательная к эпюре  $M_x$  параллельна оси стержня).

3. На участке, где имеется распределенная нагрузка, изменяющаяся по линейному закону (например, треугольная нагрузка), поперечная сила изменяется по квадратичному закону, а изгибающий момент — по кубическому закону. Выпуклость эпюры  $Q$  ус-

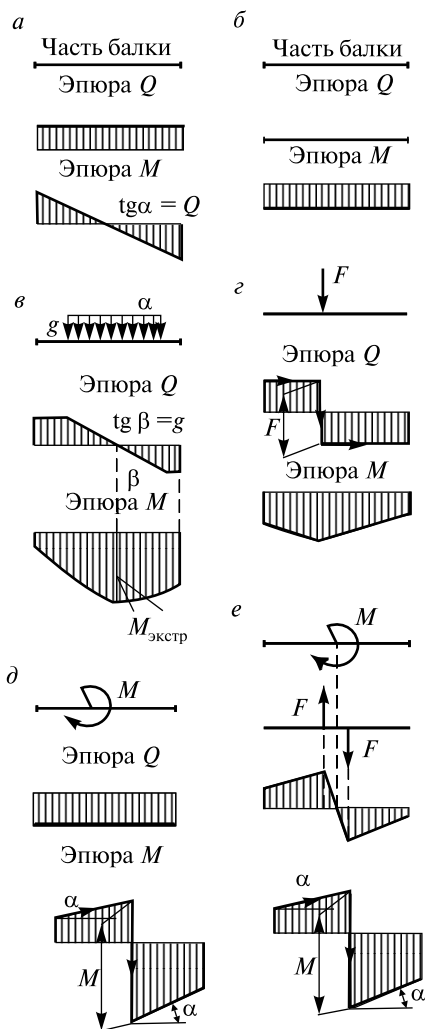


Рис. 12.22. Правила построения эпюр  $Q$  и  $M$  в балках

должно быть направлено в сторону действия силы (см. рис. 12.22, е). Уменьшая затем плечо пары до нуля и переходя к сосредоточенному моменту, получим эпюру, изображенную на рис. 12.22, д, е. Если эпюру  $M$  обходить слева направо — по стрелкам, указанным

танавливается в зависимости от характера нагружения распределенной нагрузкой с использованием дифференциальной зависимости или по ряду вычисленных значений  $Q$ . Выпуклость эпюры  $M$  обращена в сторону действия распределенной нагрузки.

4. В сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила  $F$ , на эпюре  $Q$  будет скачок. Скачок равен значению этой силы и направлен в ту же сторону, что и сила  $F$  (если эпюру  $Q$  обходить слева направо — по стрелкам, указанным на эпюре  $Q$ , рис. 12.22, з). Эпюра  $M$  будет иметь перелом, острие которого направлено в сторону действия силы  $F$  (см. рис. 12.22, з).

5. В сечении, где приложен внешний сосредоточенный изгибающий момент  $M$ , на эпюре  $M$  будет скачок, равный значению этого момента (рис. 12.22, д), а на эпюре  $Q$  изменений не будет.

Для определения направления скачка на эпюре  $M$  можно заменить сосредоточенный момент парой сил с малым плечом (рис. 12.22, е). При этом острие перелома под каждой силой  $F$

на эпюрах рис. 12.22,  $\delta$ ,  $e$ , то скачок от момента, направленного по ходу часовой стрелки, будет вниз, а от момента, направленного против хода часовой стрелки, — вверх.

## Глава 13. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

### 13.1. Напряжения и деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука

Под растяжением (сжатием) понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только продольная сила. Такой вид деформации стержня наиболее часто встречается в элементах конструкций и машин. Например, трос подъемника при подъеме груза растянут; на сжатие под действием собственного веса при отсутствии ветровой нагрузки работают сооружения башенного типа; элементы ферм моста могут быть растянутыми или сжатыми.

*В простейшем случае растянутый (сжатый) стержень — это стержень с силами, приложенными к его концам и направленными вдоль его оси.*

Распределение напряжений в сечениях бруса, примыкающих к месту приложения внешних сил и в местах стеснения деформаций, зависит от способа приложения нагрузки и может быть неравномерным. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что это нарушение равномерности распределения напряжений носит местный характер. В сечениях стержня, отстоящих от места нагружения на расстоянии, примерно равном наибольшему из поперечных размеров стержня, распределение напряжений считается практически равномерным.

Рассмотренное положение является частным случаем **принципа Сен-Венана**, который можно сформулировать следующим образом: *распределение напряжений существенно зависит от способа приложения внешних сил лишь вблизи места нагружения, а в частях, достаточно удаленных от места приложения сил, распределение напряжений практически зависит только от статического эквивалента этих сил.* За пределами указанной области прямоугольная сетка не искажается и остается равномерной, изменяются лишь размеры ее ячейки. Если представить, что стержень состоит из продольных волокон

(стерженьков с бесконечно малым поперечным сечением, рис. 13.1), то все они удлиняются и поперечные сечения перемещаются параллельно начальным положениям. Такая картина деформации стержня соответствует гипотезе плоских сечений (*гипотезе Я. Бернулли*): *поперечные сечения стержня плоские и перпендикулярные его продольной оси до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными оси и после деформации.*

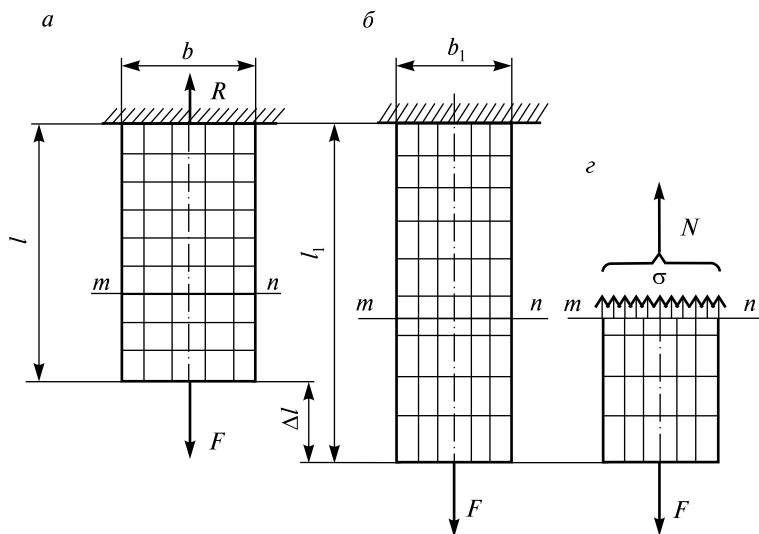


Рис. 13.1. Продольные и поперечные деформации стержня

На основании этой гипотезы можно заключить, что все продольные волокна деформируются одинаково. При однородном материале равным деформациям соответствуют равные напряжения,  $\sigma_z = \text{const}$ .

Для определения нормальных напряжений используем зависимость

$$N = \int_A \sigma_z dA$$

и, учитывая изложенное, получим

$$N = \sigma_z A,$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения стержня, откуда

$$\sigma_z = N/A. \quad (13.1)$$

Правило знаков для нормальных напряжений принимается как и для продольной силы. *Растягивающие напряжения считаем положительными, сжимающие — отрицательными.*

При действии продольных сил стержень деформируется. Если стержень растянут, то длина его увеличивается (рис. 13.1) и становится равной

$$l_1 = l + \Delta l,$$

где  $\Delta l$  — абсолютная продольная деформация (удлинение) стержня.

Поперечный его размер уменьшается на величину  $b - \Delta b = b_1$ , где  $\Delta b$  — абсолютная поперечная деформация стержня.

Отношение абсолютной продольной деформации стержня к его первоначальной длине называется *относительной продольной деформацией*:

$$\varepsilon_{\text{прод}} = \varepsilon_z = \Delta l / l. \quad (13.2)$$

Отношение абсолютной поперечной деформации стержня к его первоначальной длине называется *относительной поперечной деформацией*:

$$\varepsilon_{\text{попер}} = \varepsilon_x = -(\Delta b / b). \quad (13.3)$$

Знаки «+» и «−» у деформаций поставлены потому, что при растяжении продольные размеры стержня увеличиваются, а поперечные уменьшаются. Деформации  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_x$  называют также линейными деформациями, и они являются безразмерными величинами.

Напряжения и деформации в упругой стадии работы большинства конструкционных материалов связаны прямой пропорциональной зависимостью. Это утверждение носит название *закона Гука*

и записывается в виде

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (13.4)$$

Коэффициент пропорциональности  $E$  называется *модулем продольной упругости* или *модулем упругости при растяжении*. Он имеет размерность напряжения и измеряется в паскалях или гигапаскалях ( $1 \text{ ГПа} = 10^9 \text{ Па}$ ). Модуль упругости  $E$  — физическая константа, характеризующая жесткость материала. Чем больше  $E$ , тем меньше деформируется материал при одном и том же напряжении.

В табл. 13.1 даны значения модуля упругости для некоторых материалов.

Таблица 13.1

**Модуль упругости и коэффициент поперечной деформации для некоторых конструкционных материалов**

Материал	Модуль упругости $E$ , ГПа (кг/см <sup>2</sup> )	Коэффициент Пуассона $\mu$
Сталь	200 ( $2 \cdot 10^6$ )	0,3
Чугун	100 ( $1 \cdot 10^6$ )	0,25
Медь	100 ( $1 \cdot 10^6$ )	0,32
Алюминий	70 ( $0,7 \cdot 10^6$ )	0,3
Стеклопластики	20 ( $0,2 \cdot 10^6$ )	0,11...0,22
Дерево	10 ( $0,1 \cdot 10^6$ )	—

Абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации при растяжении или сжатии в области действия закона Гука называется *коэффициентом Пуассона*:

$$\mu = \left| \varepsilon_{\text{попер}} / \varepsilon_{\text{прод}} \right|. \quad (13.5)$$

Это безразмерный коэффициент, характеризующий свойства материала и определяемый экспериментально.

Коэффициент Пуассона  $\mu$  (коэффициент поперечной деформации) для широкого класса конструкционных материалов изменяется в диапазоне  $0 \leq \mu \leq 0,5$ . Для некоторых материалов значения коэффициента Пуассона  $\mu$  представлены в табл. 13.1.

### 13.2. Напряжения в сечениях, наклоненных к оси стержня, при растяжении и сжатии

Осевое растяжение (сжатие) стержня является простейшей деформацией, при которой напряженное состояние всех точек однородно (одинаково). Размеры выделенного элемента при таком нагружении не влияют на распределение напряжений в пределах выделенной площадки.

Исследовать напряженное состояние в точке значит получить зависимости для определения нормальных и касательных напряжений на любой площадке, проходящей через эту точку (рис. 13.2, а).

Рассечем брус на две части плоскостью, наклоненной под углом  $\alpha$  к произвольному поперечному сечению, и отбросим нижнюю часть (рис. 13.2, в). Условимся считать угол  $\alpha$  положительным, если он отсчитывается против хода часовой стрелки от поперечного сечения к наклонному (см. рис. 13.2, а).

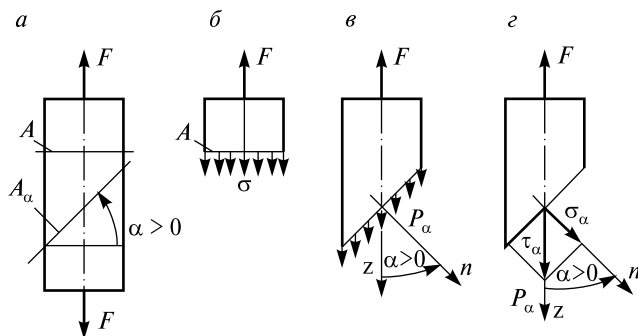


Рис. 13.2. Напряжения на наклонных площадках растянутого стержня

По наклонному сечению, площадь которого  $A_\alpha = A/\cos\alpha$ , равномерно распределено полное напряжение  $P_\alpha$ , направленное параллельно продольной силе. Напряжение  $P_\alpha$  определим из уравнения равновесия

$$\sum Z = 0; \quad -P_\alpha A_\alpha + F = 0,$$

откуда

$$P_\alpha = F/A_\alpha = (F/A)\cos\alpha = \sigma\cos\alpha,$$

где  $\sigma = F/A$  — нормальное напряжение в поперечном сечении стержня.

Разложив полное напряжение на нормальное и касательное напряжения, имеем:

$$\sigma_{\alpha} = P_{\alpha} \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha; \quad \tau_{\alpha} = P_{\alpha} \sin \alpha = (\sigma/2) \cdot \sin 2\alpha. \quad (13.6)$$

Возможны два варианта  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$ , рис. 13.3.

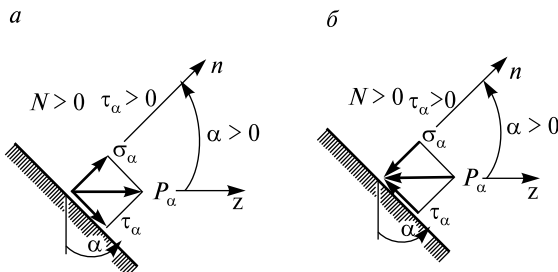


Рис. 13.3. Варианты действия напряжений  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$

Проанализируем формулу (13.6). Значения напряжений на наклонных площадках зависят от ориентации площадки, т.е. от угла наклона.

На площадках, совпадающих с поперечным сечением, т.е. при  $\alpha = 0^\circ$  в поперечных сечениях растянутого (сжатого) стержня нормальные напряжения максимальны, а касательные отсутствуют:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\max} = N / A; \quad \tau_{\alpha} = 0.$$

На площадках, наклоненных под углом  $\alpha = 45^\circ$ , имеем:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_z / 2 = N / (2A); \quad \tau_{\alpha} = \tau_{\max} = \sigma_z / 2,$$

т.е. касательные напряжения максимальны и равны половине нормальных.

На продольных площадках, т.е. при  $\alpha = 90^\circ$ ,

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\min} = 0; \quad \tau_{\alpha} = 0.$$

Следовательно, нормальные и касательные напряжения будут иметь наименьшие значения.



### 13.3. Определение перемещений в общем случае растяжения и сжатия

Рассмотрим стержень, нагруженный на правом конце равномерно распределенной продольной нагрузкой, которая вызывает его растяжение (рис. 13.4).

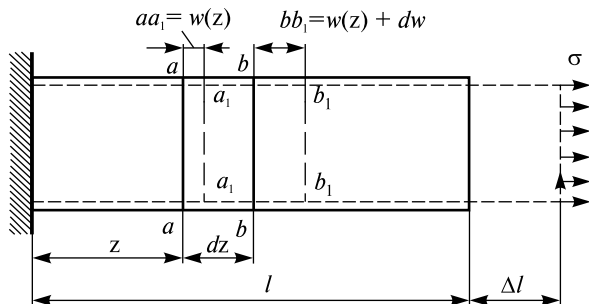


Рис. 13.4. Перемещение сечений в растянутом стержне

Сформулируем правило знаков для продольных перемещений: положительным перемещениям соответствуют перемещения, совпадающие с положительным направлением оси  $z$ .

Выделим два произвольных сечения  $a-a$  и  $b-b$ , расстояние между которыми  $dz$ . От действия нагрузки сечение  $a-a$  переместится в положение  $a_1-a_1$  на расстояние  $aa_1$ , равное  $w(z)$ , а сечение  $b-b$ , соответственно, в положение  $b_1-b_1$  на расстояние  $bb_1 = w(z)+dw$ . Удлинение участка стержня длиной  $dz$  равно  $\Delta dz = dw$ , а относительную деформацию для линейно-упругого материала с учетом формул (13.1) и (13.4) можно записать в виде

$$\epsilon_z = dw/dz = \sigma_z/E = N/EA. \quad (13.7)$$

Интегрируя уравнение (13.7), определим перемещение произвольного сечения

$$w(z) = w_0 + \int_0^z \frac{N}{EA} dz, \quad (13.8)$$

где  $w_0$  — перемещение стержня при  $z = 0$ ;

$E$  — модуль упругости материала.

Если на некотором участке  $\sigma_z = N/A = \text{const}$ , то на этом участке перемещения изменяются по линейной зависимости, а деформация  $\epsilon_z = \text{const}$ .

Тогда удлинение (укорочение) стержня определяется по формуле

$$\Delta l = w(l) - w_0 = \frac{Nl}{EA} = \frac{\sigma l}{E}, \quad (13.9)$$

где  $l$  — длина стержня.

Удлинение стержня (бруса) при растяжении (сжатии) прямо пропорционально продольной силе, длине стержня (бруса) и обратно пропорционально его жесткости.

Произведение  $EA$  называется *жесткостью стержня при растяжении или сжатии*. Чем эта жесткость больше, тем меньше удлинение бруса.

Если стержень нагружен продольными нагрузками так, что имеется несколько участков, то на каждом участке вычисляется удлинение при постоянном напряжении  $\sigma$  и площади поперечного сечения  $A$ , а результат алгебраически суммируется:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA_i}. \quad (13.10)$$

Если по длине стержня  $l$  продольная сила  $N(z)$  и площадь сечения  $A(z)$  переменные и изменяются по какому-либо непрерывному закону, то удлинение  $\Delta l$  определяется по формуле

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{N_i(z) dz}{EA_i(z)}. \quad (13.11)$$

Если наряду с внешними нагрузками имеется температурное воздействие, то согласно принципу суперпозиции деформация рассматривается как сумма силовой и температурной деформаций. Для однородного стержня, равномерно нагретого и нагруженного по концам силой  $F$ , имеем

$$\Delta l = Fl/EA + \alpha l \Delta t, \quad (13.12)$$

где  $\alpha$  — коэффициент температурного расширения.

Температурный коэффициент  $\alpha$  для стали равен  $12 \cdot 10^{-6}$ , для чугуна —  $10 \cdot 10^{-6}$ , для меди —  $16 \cdot 10^{-6}$ .

### 13.4. Испытание материалов на растяжение и сжатие

Для проектирования транспортных конструкций и их деталей необходимо знать механические свойства материалов, из которых они будут изготовлены. Для получения числовых значений механических свойств материалов проводятся испытания.

Механические испытания проводят на образцах, форма и размеры которых (рис. 13.5, а, б) устанавливаются ГОСТами или техническими условиями (ТУ).

Как правило, испытательные машины снабжены автоматическими устройствами, регистрирующими растягивающую силу и деформацию образца. В процессе испытания это устройство вычерчивает *диаграмму растяжения*. Типичная диаграмма растяжения образца низкоуглеродистой стали показана на рис. 13.5, в.

Из этой группы сталей наибольшее применение для конструкций железнодорожного транспорта находят стали марки С235—С345.

В начальной стадии нагружения до некоторой точки А диаграмма растяжения представляет собой наклонную прямую, что указывает на пропорциональность между нагрузкой и деформацией и подтверждает справедливость закона Гука. Нагрузка, при которой эта пропорциональность еще не нарушается, на диаграмме обозначается

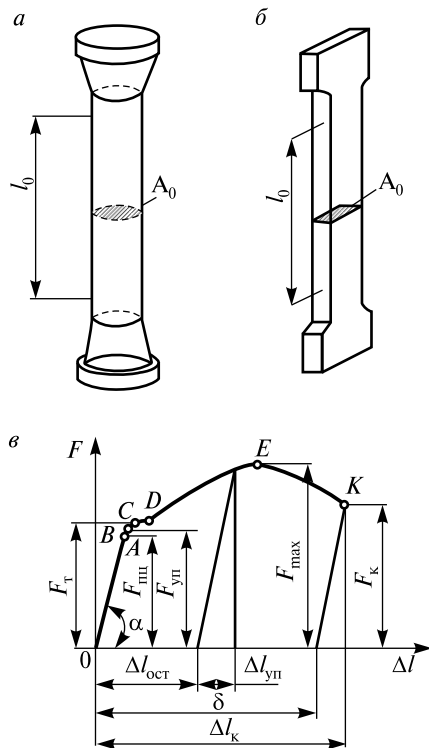


Рис. 13.5. Форма образцов для испытаний на растяжение (а, б) и диаграмма растяжения (в) стального образца

на через  $F_{\text{пц}}$  и используется для вычисления предела пропорциональности:

$$\sigma_{\text{пц}} = F_{\text{пц}} / A_0. \quad (13.13)$$

*Пределом пропорциональности*  $\sigma_{\text{пт}}$  называется наибольшее напряжение, до которого существует прямо пропорциональная зависимость между нагрузкой и деформацией.

Для стали С235 предел пропорциональности  $\sigma_{\text{пт}}$  приблизительно равен 195...200 МПа.

Зона ОА (см. рис. 13.5, в) называется *зоной упругости*. Данные, характеризующие эту зону, используются для определения модуля упругости  $E$ . После достижения предела пропорциональности деформации начинают расти быстрее, чем нагрузка, и диаграмма становится криволинейной. На этом участке в непосредственной близости от точки  $A$  находится точка  $B$ , соответствующая пределу упругости.

*Пределом упругости*  $\sigma_{\text{уп}}$  называется максимальное напряжение, при котором в материале не обнаруживаются признаки пластической (остаточной) деформации.

Предел упругости характеризует начало перехода от упругой деформации к пластической. Для стали С235  $\sigma_{\text{уп}} = 205...210$  МПа. При дальнейшем нагружении криволинейная часть диаграммы переходит в почти горизонтальный участок  $CD$  — *площадку текучести*. Здесь деформации растут практически без увеличения нагрузки. Нагрузка  $F_T$ , соответствующая точке  $D$ , используется при определении физического предела текучести:

$$\sigma_T = F_T / A_0. \quad (13.14)$$

*Физическим пределом текучести*  $\sigma_T$  называется напряжение, при котором образец деформируется без заметного увеличения растягивающей нагрузки.

Предел текучести является одной из основных механических характеристик прочности металлов. Для сталей С235—С255  $\sigma_T = 235...255$  МПа.

Зона ВД называется *зоной общей текучести*. В этой зоне развиваются пластические деформации, у образца повышается температура, изменяются электропроводность и магнитные свойства.

Особенно наглядно фронт распространения пластической деформации вдоль образца можно наблюдать при испытании плоских полированных образцов. Полированная поверхность образца становится матовой, и на ней можно обнаружить сетку линий, наклоненных к оси образца под углом примерно  $45^\circ$  (линии Людерса—Чернова, рис. 13.6, *а*). Эти линии представляют собой микроскопические неровности, возникающие вследствие необратимых сдвигов, происходящих в кристаллах под действием наибольших касательных напряжений.

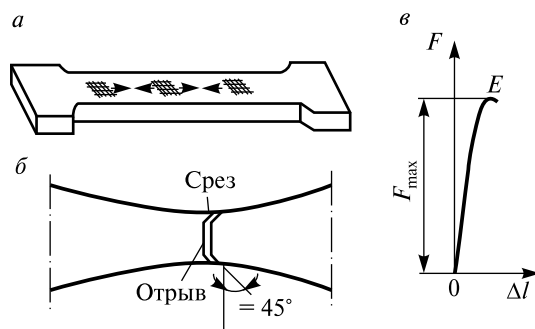


Рис. 13.6. Момент образования остаточных деформаций: *а* — линии Людерса—Чернова; *б* — характер разрушения стального образца, «чашечка—конус»; *в* — диаграмма растяжения чугуна

По окончании стадии текучести материал вновь начинает сопротивляться деформации, а связь между силой и удлинением нелинейная: удлинение растет быстрее увеличения нагрузки. Этот участок ( $DE$ ) диаграммы называют *зоной упрочнения*. Образец приобретает способность воспринимать усилие до значения  $F_{\max}$  (точка  $E$  на диаграмме). Усилие  $F_{\max}$  используется для вычисления временного сопротивления:

$$\sigma_{\text{в}} = F_{\max} / A_0. \quad (13.15)$$

Напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца, называется *временным сопротивлением*.

Для сталей марки С235—С345 временное сопротивление равно 360—490 МПа.

При максимальном усилии или несколько меньшем его в наиболее слабом месте возникает локальное уменьшение поперечного сечения — *шейка* (иногда их две) (рис. 13.6, б). Дальнейшая деформация происходит в этой зоне. Сечение в середине шейки продолжает уменьшаться, но напряжения в этом сечении нарастают, хотя сила сопротивления убывает. В точке *K* (см. рис. 13.5, в) образец разрушается. Нагрузка, соответствующая точке *K*, называется разрушающей  $F_K$ , а напряжение — *истинным сопротивлением разрыву*  $S_K$  (истинным пределом прочности):

$$S_K = F_K / A_K, \quad (13.16)$$

где  $A_K$  — площадь поперечного сечения в месте разрыва.

Зону *EK* называют *зоной местной текучести*. Истинные напряжения в момент разрыва (в шейке) образца для стали С235 достигают 900...1000 МПа.

Иногда временное сопротивление называют пределом прочности. Строго говоря, такое допустимо только в том случае, когда разрыв образца происходит без образования шейки. Это имеет место в случае с хрупкими материалами, например с чугуном.

Помимо указанных характеристик прочности, определяют *характеристики пластичности*.

*Относительное удлинение после разрыва*  $\delta$  (%) — это отношение приращения расчетной длины образца после разрыва к ее первоначальному значению, вычисляемое по формуле

$$\delta = \frac{l_K - l_0}{l_0} \cdot 100 \%. \quad (13.17)$$

Другой характеристикой пластичности является *относительное сужение после разрыва*  $\psi$  (%), представляющее собой отношение уменьшения площади поперечного сечения образца в месте разрыва к начальной площади поперечного сечения образца:

$$\psi = \frac{A_0 - A_K}{A_0} \cdot 100 \%. \quad (13.18)$$

Для стали марки С235 характеристики пластичности следующие:  $\delta = 21...25$  %;  $\psi = 60...70$  %.

**Диаграмма растяжения чугуна.** Эта диаграмма, изображенная на рис. 13.6, в, является типичной для хрупких материалов. Она не имеет прямолинейного участка, так как упругие деформации не пропорциональны нагрузкам даже при небольших напряжениях. Нагрузка плавно увеличивается до наибольшего значения (точка  $E$ ). Напряжения при нагрузке  $F_{\max}$  соответствуют пределу прочности  $\sigma_B$ . После точки  $E$  без уменьшения нагрузки происходит разрыв образца. Он разрушается при весьма незначительном удлинении и без образования шейки. Остаточные деформации очень малы, обычно менее 1 % от расчетной длины образца.

**Испытания на сжатие.** Создание однородного одноосного напряженного состояния при сжатии — более сложная задача, чем при растяжении. Свойства материалов при сжатии изучают на образцах кубической, призматической или цилиндрической форм. Цилиндрическая форма характерна для металлов, причем отношение высоты цилиндра к диаметру  $h_0/d_0$  должно быть не более трех (рис. 13.7, а). В противном случае образец может искривиться и потерять прямолинейную форму.

Испытания на сжатие пластических материалов, несмотря на простоту, менее распространены, чем испытания на растяжение. Объясняется это тем, что в упругой стадии и при малом развитии пластических деформаций сжатия низкоуглеродистой стали почти полностью повторяет диаграмму растяжения. Пределы пропорцио-

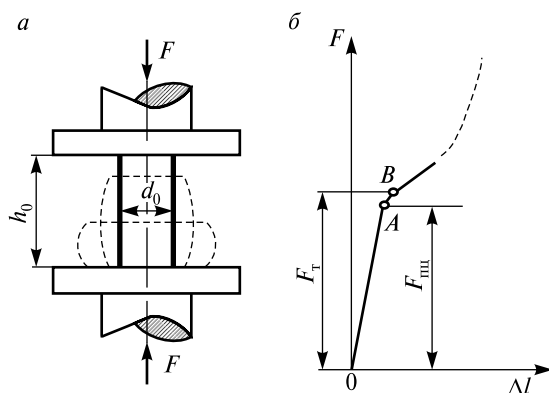


Рис. 13.7. Цилиндрическая форма образца для испытаний на сжатие (а) и диаграмма деформирования низкоуглеродистой стали (б)

нальности, упругости, текучести имеют те же значения. Углы наклона прямолинейных участков на обеих диаграммах одинаковы, следовательно, одинаковы и модули  $E$  (рис. 13.7, б).

Диаграмма сжатия чугуна по виду напоминает диаграмму растяжения (см. рис. 13.7, б), но сопротивление сжатию в несколько раз больше, чем растяжению. Форма и размеры испытуемого образца изменяются незначительно. По мере приближения к максимальной нагрузке кривая диаграммы становится более полой, и образец принимает слегка бочкообразную форму. Когда нагрузка достигает наибольшего значения, на поверхности образца появляются трещины, угол наклона которых приблизительно равен  $45^\circ$ . Наступает разрушение образца. Оно происходит от сдвигов по площадкам с наибольшими касательными напряжениями.

Предел прочности серого чугуна на сжатие равен 560...900 МПа, а на растяжение 120...190 МПа, т.е. примерно в 4—5 раз больше.

**Диаграмма сжатия древесины.** Древесина является анизотропным материалом, ее сопротивляемость внешней нагрузке зависит от расположения волокон при проведении испытаний. Диаграммы сжатия древесины вдоль (кривая 1) и поперек (кривая 2) волокон показаны на рис. 13.8, а. При сжатии образца вдоль волокон на участке  $OA$  древесина работает почти упруго и рост деформаций фактически происходит пропорционально увеличению нагрузки. При дальней-

шем увеличении нагрузки деформации начинают расти быстрее, чем усилия. Это указывает на упругопластическую область работы материала. Разрушение образца происходит при нагрузке  $F_{\max}$  (точка  $E$ ) пластично в результате потери местной устойчивости стенок ряда волокон древесины, проявляющейся в образовании характерной складки (рис. 13.8, б). Оно может также сопровождаться обмятием торцов образца и появлением продольных трещин.

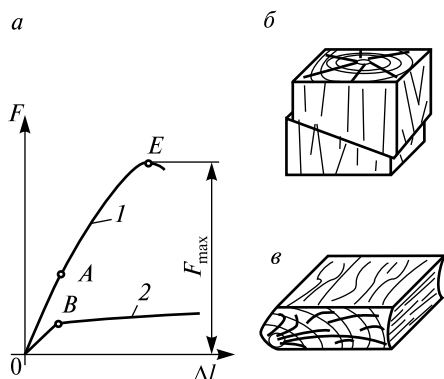


Рис. 13.8. Диаграмма сжатия древесины вдоль и поперек волокон (а), характер разрушения древесины (б, в)



При сжатии образца поперек волокон до небольшой нагрузки (точка *B* на рис. 13.8, *a*, кривая 2), соответствующей пределу пропорциональности, между нагрузкой и деформацией существует линейная зависимость. Затем деформации быстро увеличиваются, а нагрузка растет незначительно. В результате образец спрессовывается — уплотняется (рис. 13.8, *в*). При наличии в нем пороков (сучки, трещины и др.) образец может разрушиться. Разрушающая нагрузка определяется условно. Она соответствует деформации сжатия образца примерно на 1/3 первоначальной его высоты.

**Влияние различных факторов на механические свойства материалов.** Существенное влияние на свойства материалов оказывают такие факторы, как изменение температуры, термическая обработка, скорость нагружения и, следовательно, скорость деформирования, технологические условия обработки при высоких температурах, радиоактивное облучение, фактор времени (проявление ползучести материала) и т.д.

За последние десятилетия широкое применение на железнодорожном транспорте получили новые синтетические материалы: резины, лаки, клеи, стеклопластики, полиэтилены, фторопласты. Их физико-механические свойства достаточно полно отражены в литературе.

### 13.5. Методы расчета конструкций на прочность

**Метод допускаемых напряжений.** Основой расчета по методу допускаемых напряжений является предположение, что критерием надежности конструкции будет выполнение следующего условия прочности:

$$\sigma_{\max} \leq \sigma = N/A \leq [\sigma] = \frac{\sigma_0}{n}, \quad (13.19)$$

где  $\sigma_{\max}$  — наибольшее рабочее напряжение, возникающее в одной из точек опасного сечения и определяемое расчетом;

$[\sigma]$  — допускаемое (предельное) для данного материала напряжение, полученное на основании экспериментальных исследований;

$\sigma_0$  — опасное напряжение;

$n$  — коэффициент запаса прочности.

Для пластических материалов за опасное напряжение при статической нагрузке принимается предел текучести  $\sigma_T$ ; для хрупких материалов — временное сопротивление (предел прочности)  $\sigma_B$ .

Значения допускаемых напряжений или коэффициентов запаса прочности устанавливаются *техническими условиями и нормами проектирования*. Для стальных конструкций значение коэффициента запаса прочности принимается  $n = 1,4...1,6$ ; для хрупких материалов  $n = 2,5...3,5$ ; для древесины  $n = 3,5...6$ ;

Формула (13.19) требует, чтобы наибольшие напряжения в наиболее опасном сечении не превосходили допускаемых и были близки к ним. Недонапряжения должны быть как можно меньшими. Перенапряжение допускаются не более 3 %.

Используя формулу (13.19), можно определить необходимую площадь сечения элемента

$$A = N / [\sigma] \quad (13.20)$$

и грузоподъемность

$$[N] = A[\sigma]. \quad (13.21)$$

Кроме проверки прочности, осуществляется проверка жесткости стержня, для чего определяют наибольшее удлинение  $\Delta l$  и сравнивают его с допускаемым  $[\Delta l]$ .

Условие жесткости при растяжении имеет вид

$$\Delta l = (Nl) / (EA) \leq [\Delta l]. \quad (13.22)$$

Допускаемое удлинение обычно назначают как  $n$ -ю часть первоначальной длины; например, для конструкций, используемых в локомотивостроении:

$$\Delta l = 1/500...1/1000.$$

**Метод предельных состояний.** Предельным считается состояние, при котором конструкция перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям или требованиям, предъявляемым в процессе ее изготовления.

Различают две группы предельных состояний: *первая* — непригодность к эксплуатации вследствие потери несущей способности; *вторая* — непригодность к нормальной эксплуатации в соответствии с предусмотренными технологическими условиями. В правильно запроектированной механической конструкции не должно возник-

нуть ни одно из указанных предельных состояний, т.е. должна быть обеспечена надежность ее работы.

Условие прочности имеет вид

$$\sigma = N_{\text{расч}}/A = (N_{\text{нор}} n/A) \leq R = R_{\text{нор}}/k, \quad (13.23)$$

где  $N_{\text{расч}}$  — предельное расчетное усилие, найденное с учетом возможных перегрузок;

$N_{\text{нор}}$  — нормативное усилие;

$n > 1$  — коэффициент перегрузки от случайных или перспективных увеличений нагрузок;

$R$  — расчетное сопротивление материала;

$R_{\text{нор}}$  — нормативное сопротивление материала (предел текучести или предел прочности);

$k$  — коэффициент однородности материала.

По формуле (13.23) можно найти необходимое сечение  $A$  или расчетное усилие  $N_{\text{расч}}$ .

Метод предельных состояний более прогрессивен. В нем учитывается возможное увеличение нагрузки и неоднородность материала, в то время как в методе допускаемых напряжений все факторы учитываются одним коэффициентом запаса.

**Метод разрушающих нагрузок.** Критерий прочности, принятый в методе допускаемых напряжений, а именно напряжения в точке, не всегда и не полностью характеризует условия наступления разрушения конструкции. В ряде случаев за такой критерий целесообразнее принимать предельную нагрузку, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь и существенно не изменяя свою форму. При этом условие прочности, состоящее в том, что предельная или разрушающая нагрузка не должна превышать допускаемую, можно представить в виде

$$F_{\text{max}} \leq [F] = F_{\text{пред}}/n, \quad (13.24)$$

где  $n$  — коэффициент запаса прочности, принимаемый таким же, как и в методе допускаемых напряжений.

При определении разрушающей нагрузки для конструкций из пластического материала служит схематизированная диаграмма напряжений — диаграмма Прандтля (рис. 13.9).

Схематизация диаграммы заключается в предположении, что материал работает в упругой стадии вплоть до предела текучести, а

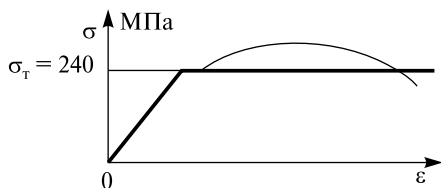


Рис. 13.9. Диаграмма Прандтля

затем материал характеризуется безграничной площадкой текучести. Материал, работающий по такой модели, называется *идеально упругопластическим*. Как правило, эта схематизированная диаграмма напряжений больше всего соответствует

действительной диаграмме материала, имеющего ярко выраженную площадку текучести. Заметим, что определение разрушающей нагрузки возможно только для несложных расчетных схем.

### 13.6. Напряженное состояние в точке

Через любую точку тела можно провести бесконечное множество плоскостей, и в каждом случае нормальное и касательное напряжения будут различными как по модулю, так и по направлению.

*Напряженным состоянием в точке* называют совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через эту точку.

Предположим, что в окрестности исследуемой точки  $K$  (рис. 13.10,  $a$ ) мысленно выделен параллелепипед со сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Ввиду малости параллелепипеда можно считать, что напряженное состояние во всех его точках одинаково и совпадает с напря-

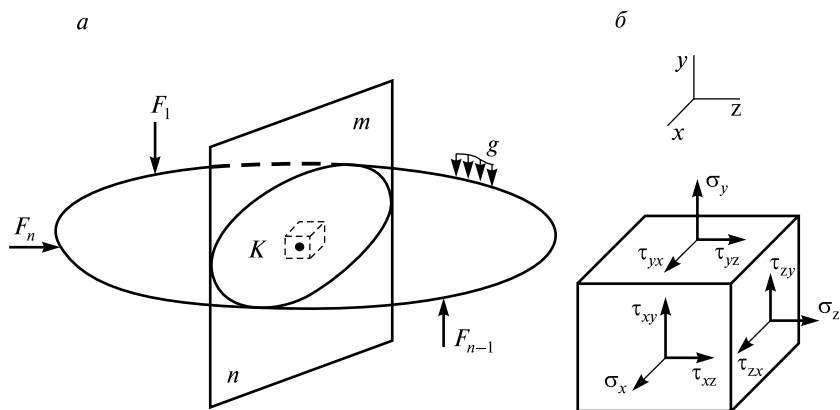


Рис. 13.10. Общий случай деформируемого тела

женным состоянием в исследуемой точке  $K$ . Поэтому как по граням, так и по любым его сечениям напряжения считаются равномерно распределенными.

Различают однородное и неоднородное напряженное состояния. При *однородном* напряжения одинаковы в каждой точке какого-либо сечения и во всех параллельных ему плоскостях. Поэтому в таком случае размеры выделенных элементов не играют никакой роли. Центральное растяжение или сжатие бруса является простейшим видом деформации тела, когда напряженное состояние всех его точек одинаково.

При *неоднородном напряженном состоянии* напряжения различны в каждой точке произвольного сечения. В этом случае вокруг исследуемой точки необходимо выделять бесконечно малый объем, что обеспечит с достаточной точностью предположение о равномерности распределения напряжений по граням элемента.

Будем считать, что напряжения, возникающие на гранях параллелепипеда, известны. Каждое из этих напряжений может быть разложено на три составляющие, параллельные координатным осям (рис. 13.10, б). Эти площадки и возникающие на них напряжения называются *исходными*. Таким образом, в общем случае на трех исходных площадках возникают девять составляющих напряжений. Эти составляющие напряжений носят название *компонент напряженного состояния в данной точке*. Из девяти компонент независимыми являются шесть, так как составляющие касательных напряжений попарно равны друг другу:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

Приведенные соотношения известно под названием *закона параллельности касательных напряжений*: на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные общему ребру, равны и направлены либо к ребру, либо от ребра.

Среди бесчисленного множества площадок, которые можно провести через исследуемую точку, есть три взаимно перпендикулярные площадки, нормальные напряжения на которых принимают экстремальные значения, а касательные напряжения отсутствуют. Эти площадки принято называть *главными площадками*, а нормальные напряжения на них — *главными напряжениями*. В порядке воз-

растания эти напряжения обозначают через  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Например, если одно из главных напряжений равно нулю, другое растягивающее 40 МПа, а третье сжимающее — 60 МПа, то их следует обозначить:  $\sigma_1 = 40$  МПа,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -60$  МПа.

В зависимости от наличия главных напряжений, отличных от нуля, различают: *объемное напряженное состояние* (рис. 13.11, а), если все три главных напряжения отличны от нуля; *плоское напряженное состояние* (рис. 13.11, б), если два главных напряжения отличны от нуля, и *линейное (одноосное) напряженное состояние* (рис. 13.11, в), если отлично от нуля одно главное напряжение.

Остановимся на исследовании плоского напряженного состояния. При плоском напряженном состоянии всегда можно выделить элемент таким образом, чтобы одна из его граней была свободна от напряжений (рис. 13.11, г). Эта грань является одной из главных площадок, касательные напряжения на ней отсутствуют. Зависимости, позволяющие определить нормальное и касательное напря-

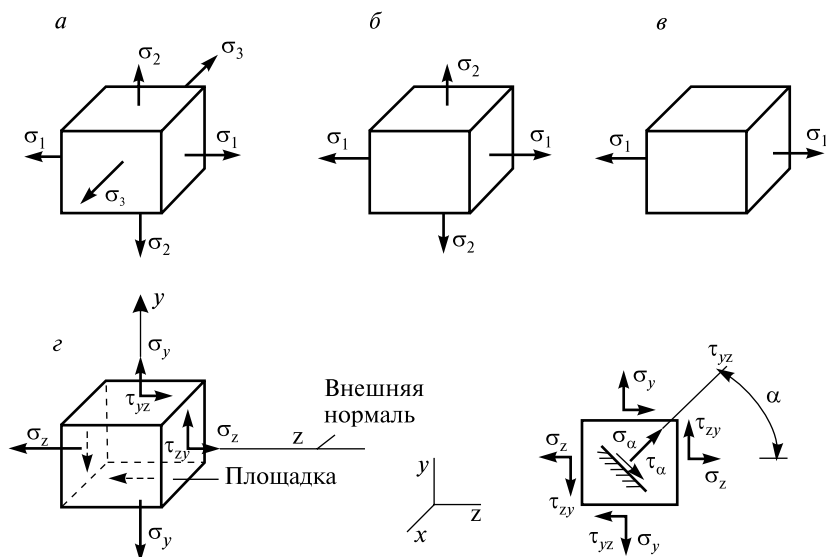


Рис. 13.11. Напряженное состояние материала:

а — объемное; б — плоское; в — линейное, представленное главными напряжениями; г — напряжения на гранях элемента в общем случае плоского напряженного состояния

жения, возникающие на произвольной площадке (рис. 13.11, з), нормаль к которой составляет угол  $\alpha$  с осью  $z$ , имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha} &= \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{zy} \sin 2\alpha; \\ \tau_{\alpha} &= -\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{zy} \cos 2\alpha.\end{aligned}\quad (13.25)$$

В этих выражениях *угол поворота*  $\alpha$  считается положительным, если он совершается от оси  $z$  к оси  $y$  по кратчайшему угловому пути. Для принятых направлений осей  $z$  и  $y$ , угол  $\alpha > 0$ , если поворот совершается против хода часовой стрелки. Знак касательных напряжений  $\tau$  связан с направлением осей координат: если внешняя нормаль данной площадки совпадает с положительным направлением соответствующей координатной оси, то на этой площадке напряжение  $\tau$  положительно, когда оно совпадает с положительным направлением соответствующей оси. Если же внешняя нормаль противоположна направлению оси (невидимые грани параллелепипеда рис. 13.11, з), то напряжение  $\tau$  положительно тогда, когда оно также противоположно своей координатной оси. Это правило кратко называют *правилом внешней нормали*.

Все напряжения, показанные на рис. 13.11 в осях  $y, z$ , положительны.

При анализе плоского напряженного состояния в точке напряжения  $\sigma_z, \sigma_y, \tau_{zy}$  и  $\tau_{yz}$  считаются заданными и поэтому их называют *исходными напряжениями*.

Среди площадок рассматриваемой серии есть две главные площадки (рис. 13.12, а), направление нормалей к которым определяются из выражения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z - \sigma_y}.\quad (13.26)$$

Выражение (13.26) дает два взаимно перпендикулярных направления с углами наклона  $\alpha'_0$  и  $\alpha''_0 = \alpha'_0 + 90^\circ$ , по которым действуют главные напряжения  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ . При этом полезно запомнить следующее правило: *направление  $\sigma_{\max}$  всегда проходит через те две четверти осей координат, к которым сходятся стрелки касательных напряжений  $\tau_{zy}$  и  $\tau_{yz}$ .*

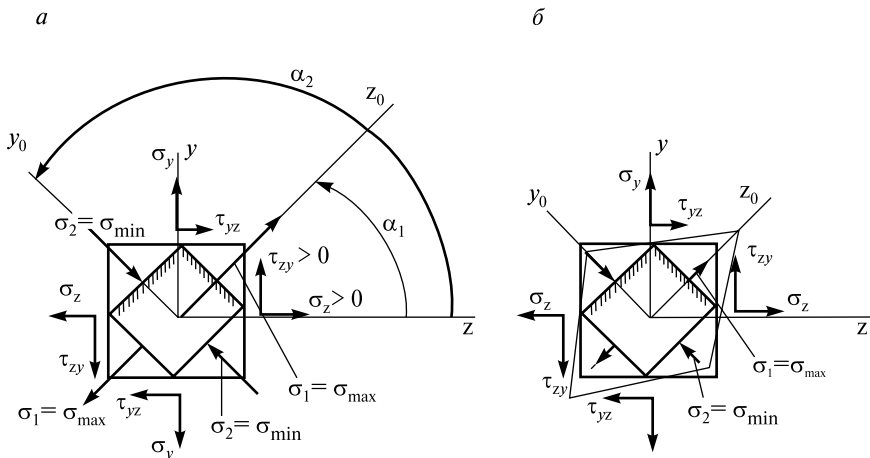


Рис. 13.12. Главные площадки и главные напряжения

Указанное правило становится физически более понятным, если обратить внимание на то, что касательные напряжения создают удлинение одной из диагоналей элемента (рис. 13.12, б). Именно к этой диагонали и тяготеет направление  $\sigma_{\max}$ .

Значения соответствующих главных напряжений определяются по формуле

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}. \quad (13.27)$$

Максимальные и минимальные касательные напряжения связаны с главными напряжениями зависимостью

$$\tau_{\max}^{\min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}. \quad (13.28)$$

Угол наклона искомой главной площадки удобнее определять по формуле для тангенса одиночного угла:

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\tau_{zy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y}. \quad (13.29)$$



В зависимости от того, какое из главных напряжений  $\sigma_1$  или  $\sigma_2$ , подставляют в эту формулу, получают соответственно тангенс угла  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$ .

**Упрощенное плоское напряженное состояние.** Так принято условно называть частный случай напряженного состояния, при котором лишь по одной грани возникают нормальные напряжения, отличные от нуля (рис. 13.13, а).

В рассматриваемом примере  $\sigma_y = 0$ , используя приведенные формулы, получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{zy}}{\sigma_z}; \quad \sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{zy}^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha_{1,3} = \frac{\tau_{zy}}{\sigma_{1,3}}.$$

Частным случаем плоского напряженного состояния является *чистый сдвиг* (рис. 13.13, б). При чистом сдвиге главные напряже-

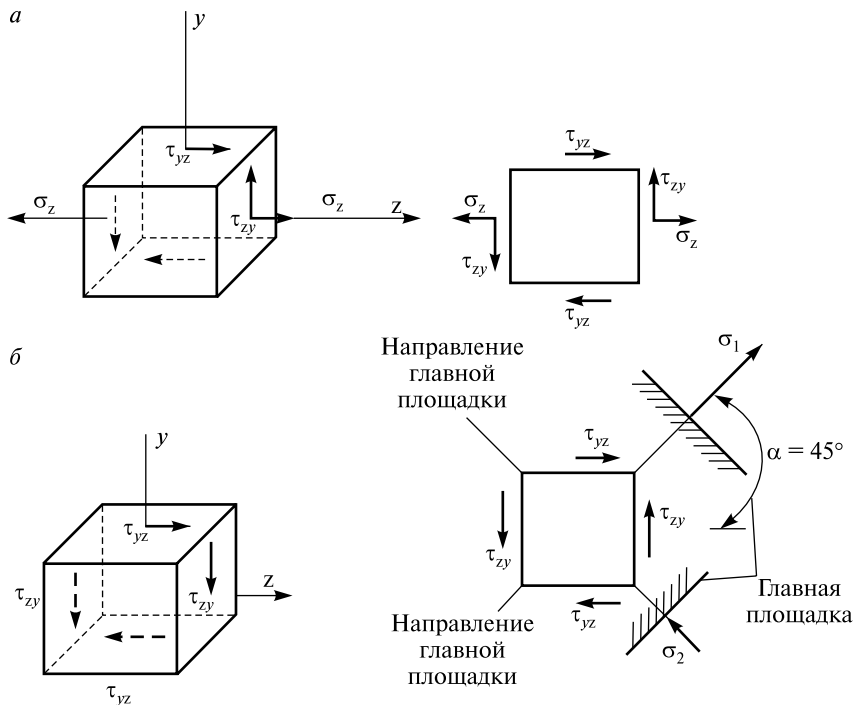


Рис. 13.13. Напряженное состояние материала:  
а — упрощенное плоское; б — чистый сдвиг

ния связаны с исходными касательными напряжениями зависимостью

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{zy} = \tau_{\max}.$$

Таким образом, чистый сдвиг можно охарактеризовать как такой случай плоского напряженного состояния, для которого отличные от нуля главные напряжения равны по модулю и противоположны по знаку.

### 13.7. Примеры расчета стержней на растяжение—сжатие

**Пример 13.1.** Определить максимальное нормальное напряжение в листе, ослабленном отверстиями (рис. 13.14, а), поперечные размеры листа и отверстий даны в сантиметрах. В наклонном сечении  $B_\alpha$ — $B_\alpha$  определить действующие напряжения, если  $\alpha = 30^\circ$ . Концентрация напряжений не учитывается.

*Решение.* Определим продольное усилие, действующее в стержне, из условия равновесия:

$$\sum F_z = 0; F - N_z = 0, \text{ находим } N_z = F = 60 \text{ кН.}$$

В каждом сечении стержня (рис. 13.14, а, б) найдем площадь поперечного сечения и нормальное напряжение.

*Сечение 1—1:*

$$A_1 = hb - d_1 b = 10 \cdot 2 - 6 \cdot 2 = 8 \text{ см}^2 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$\sigma_1 = N_z / A_1 = 60 \cdot 10^3 / 8 \cdot 10^{-4} = 75 \text{ МПа.}$$

*Сечение 2—2:*

$$A_2 = hb - 2d_2 b = 10 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ см}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$\sigma_2 = N_z / A_2 = 60 \cdot 10^3 / 4 \cdot 10^{-4} = 150 \text{ МПа.}$$

*Сечение 3—3:*

$$A_3 = hb - h_1 b = 10 \cdot 2 - 7 \cdot 2 = 6 \text{ см}^2 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$\sigma_3 = N_z / A_3 = 60 \cdot 10^3 / 6 \cdot 10^{-4} = 100 \text{ МПа.}$$

*Сечение 4—4:*

$$A_4 = hb - 2sb \sin 45^\circ = 10 \cdot 2 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 3 \text{ см}^2 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

$$\sigma_4 = N_z / A_4 = 60 \cdot 10^3 / 3 \cdot 10^{-4} = 200 \text{ МПа.}$$

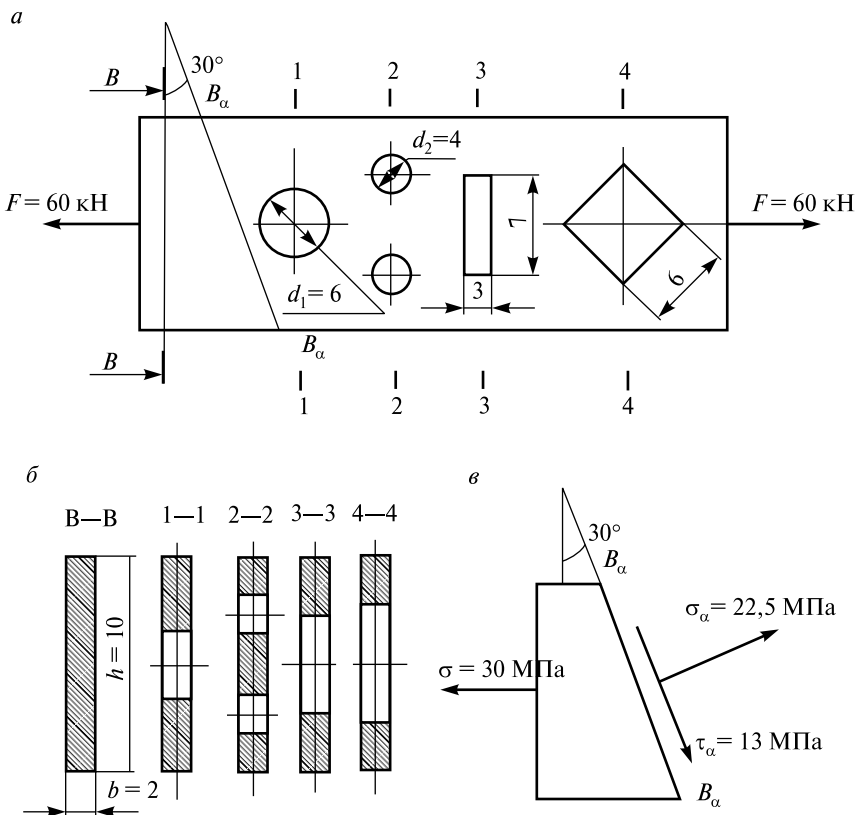


Рис. 13.14. Лист, ослабленный отверстиями (*a*); поперечные сечения листа (*б*); нормальные и касательные напряжения в наклонной площадке (*в*)

Следовательно, в сечение 4—4 нормальное напряжение достигает максимального значения.

В наклонном сечении  $B_\alpha$ — $B_\alpha$  (рис. 13.14, *в*) возникают нормальные и касательные напряжения. Определим  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$ :

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2 \alpha = 30(\sqrt{3}/2)^2 = 22,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha = 30/2(\sqrt{3}/2) \approx 13 \text{ МПа}.$$

**Пример 13.2.** Проверить прочность ступенчатого чугунного бруса (рис. 13.15), если требуемый коэффициент запаса прочности  $[n] = 3,5$ . Предел прочности материала стержня на растяжение  $\sigma_{\text{пр}} = 80$  МПа, на сжатие  $\sigma_{\text{сж}} = 240$  МПа.

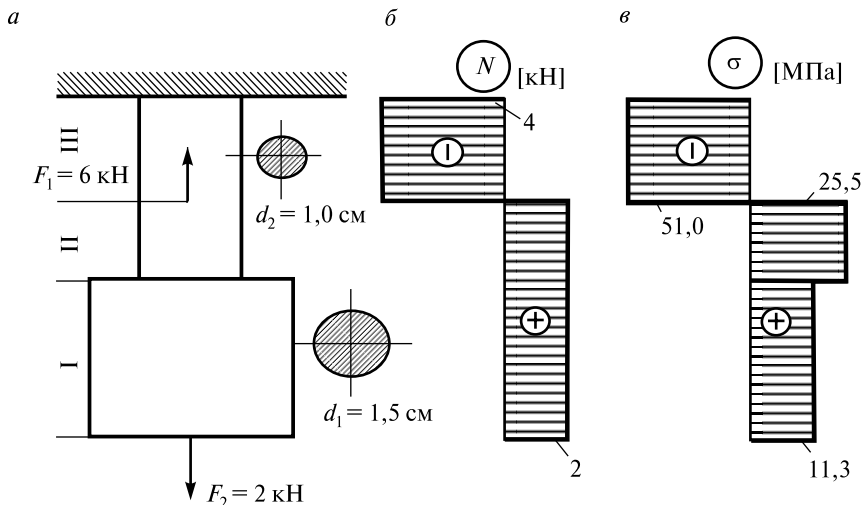


Рис. 13.15. Статически определимый ступенчатый чугунный брус (а); эпюры продольных сил и нормальных напряжений (б, в)

**Решение.** Построим эпюры продольных сил и нормальных напряжений (рис. 13.15, б, в). Методика построения таких эпюр изложена в ранее рассмотренных примерах.

Наибольшие по абсолютному значению напряжения возникают в поперечных сечениях третьего участка (рис. 13.15, в), работающего на сжатие. Прочность бруса на этом участке обеспечена.

Коэффициент запаса прочности на этом участке

$$n_3 = \sigma_{\text{сж}} / \sigma_{\text{III}} = 240 / 51 = 4,7.$$

Первый и второй участок стержня работают на растяжение. Наибольшие напряжения растяжения (рис. 13.15, в) возникают на втором участке.

Коэффициент запаса прочности на этом участке

$$n_2 = \sigma_{\text{пр}} / \sigma_{\text{II}} = 80 / 25,5 = 3,14.$$

Полученный коэффициент запаса прочности недостаточен, так как он меньше требуемого.

### 13.8. Учет влияния собственного веса бруса

В ряде задач в качестве внешней нагрузки встречается равномерно распределенная продольная нагрузка. К таким задачам относится собственный вес стержня при условии, что поперечное сечение его остается постоянным на некотором участке.

Собственный вес стержня (бруса) учитывается в тех случаях, когда его величина соизмерима с величинами приложенных нагрузок. В этом случае распределенная нагрузка равна

$$t_z = \gamma A_z, \quad (13.30)$$

где  $\gamma$  — объемный вес (вес единицы объема) материала стержня;  
 $A_z$  — площадь поперечного сечения.

Порядок решения задач, учитывающих собственный вес бруса, рассмотрим на примере.

Стержень с постоянным поперечным сечением площадью  $A$  закреплен верхним концом и нагружен только собственным весом. Для этого стержня необходимо построить эпюры  $N$ ,  $\sigma$ ,  $W$  (рис. 13.16, а).

Представим расчетную схему в виде невесомого стержня, нагруженного продольной нагрузкой  $t = \gamma A$  (рис. 13.16, б).

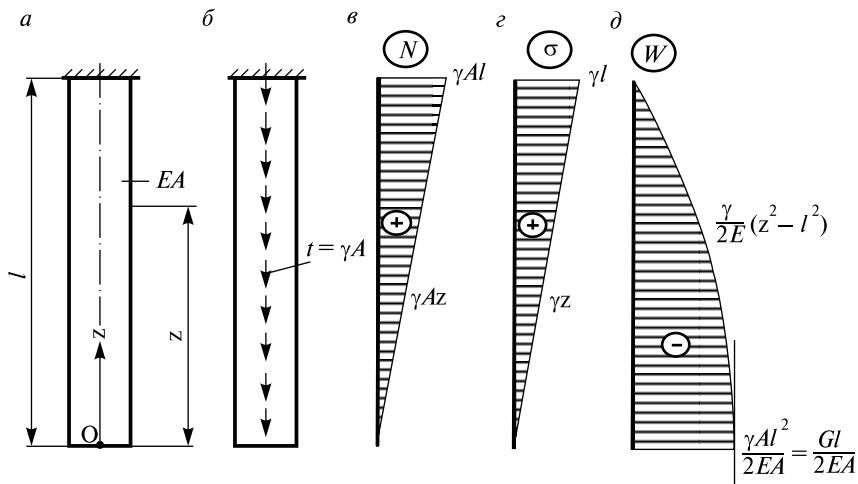


Рис. 13.16. Учет собственного веса стержня:

а — заданный стержень; б — невесомый стержень; в, г, д — эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений соответственно

Выберем систему координат с началом отсчета в точке О (нижнее сечение см. на рис. 13.16, а).

Значение продольной силы в произвольном сечении (на расстоянии  $z$  от нижнего конца) равно весу нижележащей части стержня.

*Участок I* ( $0 \leq z \leq l$ ):  $N = tz = \gamma Az$ .

Напряжение в этом сечении  $\sigma = N/A = \gamma z$ .

Следовательно, продольная сила и нормальное напряжение пропорциональны  $z$ . Эпюры  $N$  и  $\sigma$  изображены на рис. 13.16, в, г. Перемещение произвольного сечения от действия собственного веса

$$w(z) = w_0 + \int_0^z \frac{N(z)dz}{EA} = w_0 + \int_0^z \frac{\gamma Az}{EA} dz = w_0 + \frac{\gamma A}{EA} \frac{z^2}{2}. \quad (13.31)$$

Найдем  $w_0$  из условия, что при  $z = l$  (сечение у заделки)

$$w(l) = 0; \quad w_0 + \frac{\gamma A}{EA} \frac{l^2}{2} = 0,$$

отсюда

$$w_0 = -\gamma Al^2 / (2EA).$$

Выражение для определения перемещений

$$w(z) = -\frac{\gamma Al^2}{2EA} + \frac{\gamma Az^2}{2EA} = \frac{\gamma A}{2EA} (z^2 - l^2). \quad (13.32)$$

Следовательно, перемещение  $w$  изменяется по квадратичной зависимости с экстремумом при  $z = 0$ , оно в нижнем сечении стержня составит

$$\max |w| = \Delta l = \frac{\gamma Al^2}{2EA}, \quad \text{или} \quad \Delta l = \frac{Gl}{2EA},$$

где  $G = \gamma Al$  — вес стержня.

Эпюра перемещений показана на рис. 13.16, д.

**Пример 13.3.** Для ступенчатого стержня, изображенного на рис. 13.17, а, построить эпюры продольных сил  $N$  и нормальных напряжений  $\sigma$  и определить перемещение сечения I—I с учетом собственного веса и сосредоточенной силы.

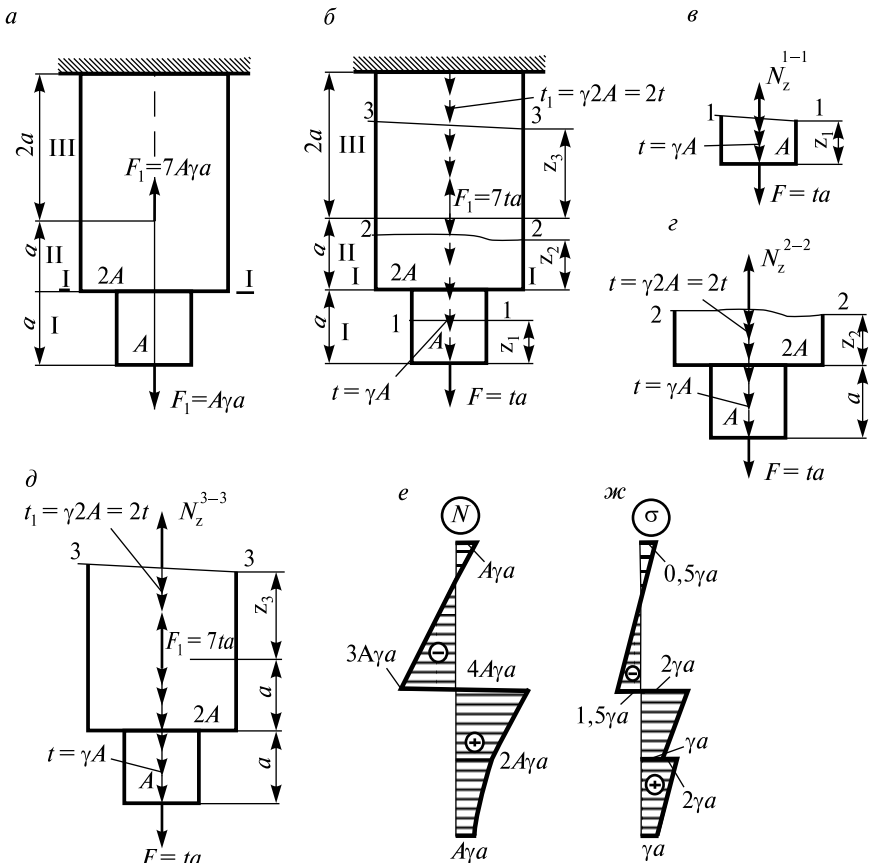


Рис. 13.17. Учет собственного веса:

*a* — ступенчатый стержень; *б* — расчетная схема; *в*, *г*, *д* — отсеченные части бруса в сечениях 1—1, 2—2, 3—3; *е*, *ж* — эпюры продольных сил и нормальных напряжений

**Решение.** Разобьем стержень на три участка: I, II и III. Выберем локальную систему координат на каждом участке. Примем за расчетную схему стержня невесомый ступенчатый стержень, нагруженный равномерно распределенной продольной нагрузкой, направленной вниз, интенсивностью  $t = \gamma A$  и  $t_1 = 2t$  (рис. 13.17, б).

Определим значение продольной силы и нормального напряжения на каждом участке бруса.

Участок 1—1  $0 \leq z_1 \leq a$  (рис. 13.17, *б*):

$$\sum z = 0; N_z^{1-1} = ta + tz_1;$$

$$z_1 = 0 \longrightarrow N_z^{1-1} = ta = A\gamma a; \quad \sigma = \gamma a;$$

$$z_1 = a \longrightarrow N_z^{1-1} = 2ta = 2A\gamma a; \quad \sigma = 2\gamma a.$$

Участок 2—2  $0 \leq z_2 \leq a$  (рис. 13.17, *в*):

$$\sum z = 0; N_z^{2-2} = 2ta + t_1 z_2 = 2ta + 2tz_2;$$

$$z_2 = 0 \longrightarrow N_z^{2-2} = 2ta = 2A\gamma a; \quad \sigma = \gamma a;$$

$$z_2 = a \longrightarrow N_z^{2-2} = 4ta = 4A\gamma a; \quad \sigma = 2\gamma a.$$

Участок 3—3  $0 \leq z_3 \leq 2a$  (рис. 13.17, *д*):

$$\sum z = 0; N_z^{3-3} = 4ta + 2tz_3 - 7ta;$$

$$z_3 = 0 \longrightarrow N_z^{3-3} = -3ta = -3A\gamma a; \quad \sigma = -1,5\gamma a;$$

$$z_3 = 2a \longrightarrow N_z^{3-3} = ta = A\gamma a; \quad \sigma = 0,5\gamma a.$$

Эпюры  $N$  и  $\sigma$  для заданного стержня изображены на рис. 13.17, *е, ж*.

Далее построим эпюру перемещений для сечения 1—1 с учетом собственного веса и сосредоточенной силы.

Расчетная схема бруса показана на рис. 13.18, *а*. Определение перемещений необходимо начать от неподвижного конца, т.е. от заделки.

На каждом участке, а их два, выберем локальные системы координат с началом в точках  $O_3$  и  $O_2$ . Запишем перемещения на каждом участке.

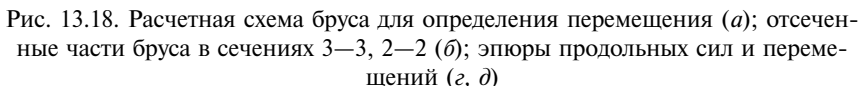
Для сечения 3—3,  $0 \leq z_3 \leq 2a$  (рис. 13.18, *б*).

Перемещение произвольного сечения  $z_3$  верхнего участка стержня равно удлинению той части стержня, которая заключена между этим сечением и заделкой. Имеем

$$w_3 = w_{03} + \int_0^{z_3} \frac{N_3 dz_3}{EA} = w_{03} + \int_0^{z_3} \frac{A\gamma a - 2A\gamma z_3}{E \cdot 2A} dz_3 = w_{03} + \frac{ta z_3}{E \cdot 2A} - \frac{tz_3^2}{E \cdot 2A}.$$

Значение  $w_{03}$  определим из условия, что перемещение сечения у заделки должно быть равно нулю.




$$w_3 = \frac{taz_3}{E \cdot 2A} - \frac{tz_3^2}{E \cdot 2A} = \frac{t}{E \cdot 2A}(az_3 - z_3^2) = \frac{\gamma}{2E}(az_3 - z_3^2);$$

$$\text{при } z_3 = 2a \quad w_3 = -\frac{\gamma a^2}{E}.$$

Для сечения 2—2  $0 \leq z_7 \leq a$  (рис. 13.18, в):

$$w_2(z_2) = w_{02} + \int_0^{z_2} \frac{N(z_2) dz_2}{E \cdot 2A} = \int_0^{2a+z_2} \frac{A \gamma a dz}{E \cdot 2A} + \int_0^{z_2} \frac{7A \gamma a dz}{E \cdot 2A} - \int_0^{2a+z_2} \frac{2t z dz}{E \cdot 2A} = \frac{ta(2a+z_2)}{E \cdot 2A} + \frac{7ta z_2}{E \cdot 2A} - \frac{2t(2a+z_2)(2a+z_2)}{2E \cdot 2A};$$

при  $z_2 = 0$

$$w_2 = \frac{t \cdot 2a^2}{E \cdot 2A} - \frac{2t \cdot 2a \cdot 2a}{2E \cdot 2A} = \frac{ta^2}{EA} - \frac{2ta^2}{EA} = -\frac{\gamma a^2}{E};$$

при  $z_2 = 0$

$$w_2 = \frac{ta \cdot 3a}{2EA} + \frac{7ta \cdot a}{2EA} - \frac{2t \cdot 3a \cdot 3a}{4EA} = \frac{\gamma a^2}{2E}.$$

Эпюра перемещений показана на рис. 13.18, д.

Существуют и иные способы определения перемещений. Одним из них является принцип независимости действия сил. Воспользуемся им:

$$\Delta l^{I-I} = \frac{2A\gamma a \cdot 3a}{E \cdot 2A} - \frac{7A\gamma a \cdot 2a}{E \cdot 2A} + \frac{2t \cdot 3a \cdot 3a}{E \cdot 2A \cdot 2} = \frac{\gamma a^2}{2E}.$$

Первое слагаемое данного выражения представляет собой удлинение части бруса от действия внешней силы  $F^*$  (см. рис. 13.18, а). Второе слагаемое — укорочение верхней части бруса от действия внешней силы  $F_1 = 7A\gamma a$ . Третье слагаемое — удлинение бруса от собственного веса.

Полученное выражение показывает, что удлинение бруса (участка бруса) постоянного поперечного сечения от действия собственного веса вдвое меньше, чем удлинение от сосредоточенной силы, равной собственному весу и приложенной к свободному концу бруса.

Проверкой полученного результата может служить также один из приемов определения перемещения сечения I—I, заключающийся в следующих действиях.

Перемещение сечения I—I равно площади эпюры  $N$  на участке от сечения I—I до заделки (рис. 13.18, з), деленной на жесткость стержня  $EA$ .

Пользуясь этим приемом, определим перемещение сечения I—I:

$$\Delta l^{I-I} = \frac{(-3A\gamma a + A\gamma a)2a}{2E \cdot 2A} + \frac{(4A\gamma a + 2A\gamma a)a}{2E \cdot 2A} = \frac{\gamma a^2}{2E}.$$

### 13.9. Статически неопределимые системы

Во всех рассмотренных ранее задачах опорные реакции (усилия в наложенных на стержень связях) и напряжения в поперечном сечении бруса определяли при помощи только уравнений равновесия. Такие системы называются *статически определимыми*.

В инженерной практике встречаются системы, в которых число наложенных связей (и, соответственно, неизвестных усилий) больше числа уравнений равновесия. Такие системы называются *статически неопределимыми*.

Разность между числом ( $n_{\text{общ}}$ ) неизвестных усилий и числом ( $n_{\text{ст}}$ ) независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы, называют *степенью статической неопределимости* ( $i$ ):

$$i = n_{\text{общ}} - n_{\text{ст}}. \quad (13.33)$$

Степень статической неопределимости соответствует числу «лишних» неизвестных усилий. Здесь под «лишними» неизвестными ( $i$ , соответственно, связями) понимают такие, которые не являются необходимыми для обеспечения равновесия системы или ее геометрической неизменяемости, а их наличие связано с конструктивной или эксплуатационной необходимостью.

Определение неизвестных усилий в статически неопределимых системах возможно, если уравнения равновесия дополнить уравнениями, характеризующими деформированное состояние системы — *уравнениями совместности деформаций — перемещений* (или, просто, *уравнениями перемещений*).

Число дополнительных уравнений равно степени статической неопределимости. При их составлении следует рассмотреть деформированное состояние системы и установить связь между перемещениями точек ее элементов. Решая совместно уравнения равновесия и уравнения перемещений, определим все неизвестные усилия или, как говорят, раскроем статическую неопределимость.

Некоторые примеры статически неопределимых систем приведены на рис. 13.19.

На рис. 13.19, *а* изображен стержень, жестко заделанный обоими концами; в заделках возникают реакции, направленные вдоль оси стержня. На стержень действует система сил, направленных по одной прямой. Для такой системы можно составить только одно уравнение статики  $\sum Z = 0$ , а неизвестные — две реакции.

Для балки, подвешенной на трех параллельных стержнях (рис. 13.19, *б*), можно составить два уравнения равновесия, которых конечно, недостаточно для определения усилий в стержнях. Вырезая узел *А*, у системы, показанной на рис. 13.19, *в*, можно составить только два уравнения равновесия как для плоской системы сходящихся сил, а неизвестных — три.

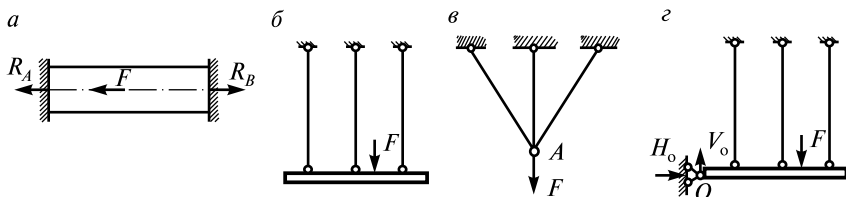


Рис. 13.19. Схемы для пояснения статической неопределимости конструкции: *а* — стержень, жестко заделанный обоими концами; *б* — балка, подвешенная на трех стержнях; *в* — система сходящихся трех стержней; *г* — дважды статически неопределимая система

Рассмотренные конструкции относятся к категории *один раз статически неопределимых систем*. У этих двух конструкций число неизвестных усилий на единицу больше числа уравнений статики.

К категории дважды статически неопределимых систем относится показанная на рис. 13,19, *г*. Для решения статически неопределимых задач необходимо помимо уравнений статики составить *уравнения перемещений*, основанные на рассмотрении деформации системы.

Рассмотрим ряд примеров, позволяющих получить достаточно полное представление о методике решения статически неопределимых задач при растяжении—сжатии.

**Пример 13.4.** Стальной стержень переменного поперечного сечения жестко зашпелен левым концом, нагружен силами  $F_1 = 450$  кН и  $F_2 = 100$  кН. До нагружения стержня между его правым торцом и абсолютно жесткой стенкой имеется зазор  $\Delta = 0,006 \cdot 10^{-2}$  м (рис. 13.20, *а*). Построить эпюры продольных сил  $N$  и нормальных напряжений  $\sigma$ . Модуль упругости стали  $E = 200$  ГПа.

**Решение.** Если при нагружении стержня зазор  $\Delta = 0,006 \cdot 10^{-2}$  м не исчезнет, то система будет статически определимая. Определим удлинение стержня при отсутствии правой стенки (заделки):

$$\Delta l_F = \sum \frac{N_i l_i}{EA_i} = \frac{450 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{200 \cdot 10^9 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} - \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{200 \cdot 10^9 \cdot 60 \cdot 10^{-4}} - \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1}{200 \cdot 10^9 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 1,667 \cdot 10^{-4} \text{ м} > \Delta = 0,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Следовательно, после нагружения стержня силами  $F_1$ ;  $F_2$  зазор исчезнет и возникнут реакции  $R_C$  и  $R_B$ . Для их определения можно составить только одно уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0; R_C + 450 \cdot 10^3 - 100 \cdot 10^3 - R_B = 0.$$

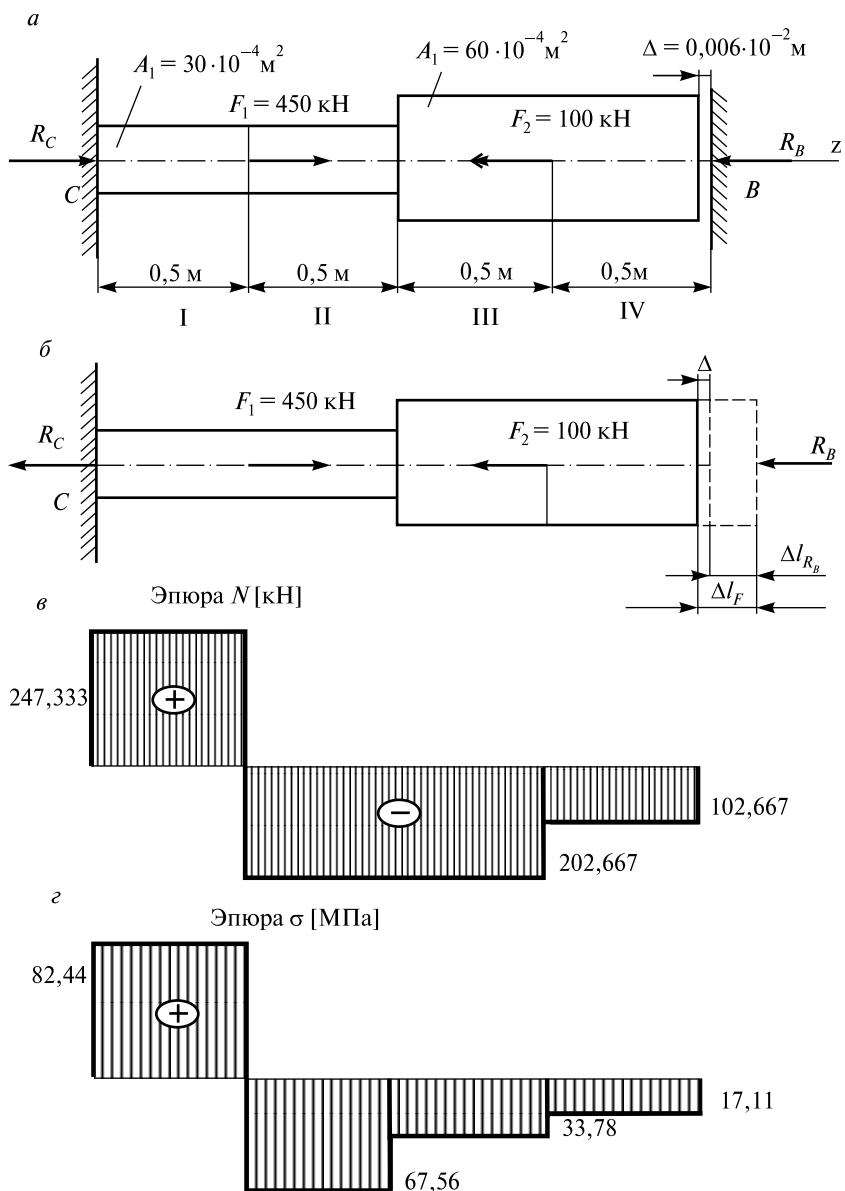


Рис. 13.20. Раскрытие статической неопределенности для определения усилий в ступенчатом стержне (*a*, *б*); эпюры продольных сил (*в*); нормальных напряжений (*г*)

Таким образом, имеем одно уравнение с двумя неизвестными усилиями, следовательно, система один раз статически неопределимая.

Чтобы решить эту задачу, необходимо составить еще одно уравнение — перемещений — из условия, что полное удлинение стержня должно равняться зазору  $\Delta$ .

Для этого отбросим правую заделку (ту, где находится зазор) и заменим ее действие на стержень реакцией  $R_B$  (рис. 13.20, б). Тогда

$$\Delta l_F - \Delta l_{R_B} = \Delta,$$

или

$$\Delta = \frac{450 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{200 \cdot 10^9 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} - \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{200 \cdot 10^9 \cdot 60 \cdot 10^{-4}} - \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 1}{200 \cdot 10^9 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} - \frac{R_B \cdot 1}{200 \cdot 10^9 \cdot 60 \cdot 10^{-4}} - \frac{R_B \cdot 1}{200 \cdot 10^6 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} = 0,006 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Отсюда  $R_B = 102,667 \text{ кН}$ . Подставив значение реакции  $R_B$  в уравнение равновесия, определим:

$$R_C = 100\,000 - 450\,000 + 102\,667 = -247\,333 \text{ Н} = -247,333 \text{ кН.}$$

Из решения уравнений реакция  $R_B$  получена с положительным знаком, что указывает на совпадение ее предполагаемого направления с действительным;  $R_C$  получена с отрицательным знаком и, следовательно, ее предполагаемое направление не совпадает с действительным. Поэтому реакцию  $R_C$  нужно направить влево (на рис. 13.20, б показано действительное направление  $R_C$ ).

*Замечание.* В случае отсутствия зазора между правым торцом стержня и заделкой уравнение равновесия будет таким же, а уравнение перемещений примет вид  $\Delta l_F - \Delta l_{R_B} = 0$ , так как длина стержня измениться не может.

Рекомендуется эту задачу решить самостоятельно.

*Ответ:*  $R_C = 283,333 \text{ кН}$ ,  $R_B = 66,667 \text{ кН}$ , обе реакции направлены влево.

Таким образом, статическая неопределимость раскрыта — имеем стержень, заделанный левым концом (см. рис. 13.20, б) и нагруженный известными силами  $F_1$ ,  $F_2$  и  $R_B$ . В этом стержне, используя метод сечений, строим эпюру продольных сил (рис. 13.20, в). Эпюру нормальных напряжений строим, определяя напряжения на каждом участке по формуле

$$\sigma = N/A,$$

где  $N$  — продольное усилие;

$A$  — площадь поперечного сечения.

На первом участке  $\sigma_1 = 247\,333 / 30 \cdot 10^{-4} = 82,44 \text{ МПа}$ ;

на втором участке  $\sigma_2 = -202\,667 / 30 \cdot 10^{-4} = -67,56 \text{ МПа}$ ;

на третьем участке  $\sigma_3 = -202\,667 / 60 \cdot 10^{-4} = -33,78 \text{ МПа}$ ;

на четвертом участке  $\sigma_4 = -102\,667 / 60 \cdot 10^{-4} = -17,11 \text{ МПа}$ .

Вид эпюры  $\sigma$  показан на рис. 13.20, г.

В качестве внешнего воздействия на системы, помимо различных видов нагрузок, может быть изменение температуры — охлаждение или нагревание.

При изменении температуры в элементах статически неопределимых систем возникают дополнительные усилия, так называемые *температурные напряжения*. Рассмотрим пример расчета таких систем.

**Пример 13.5.** В таком же стержне (пример 13.4) построить эпюры  $N$  и  $\sigma$  при увеличении температуры на  $t = +60^\circ\text{C}$  (рис. 13.21, а). Коэффициент линейного расширения стали  $\alpha_t = 12,5 \cdot 10^{-6}$  1/град.

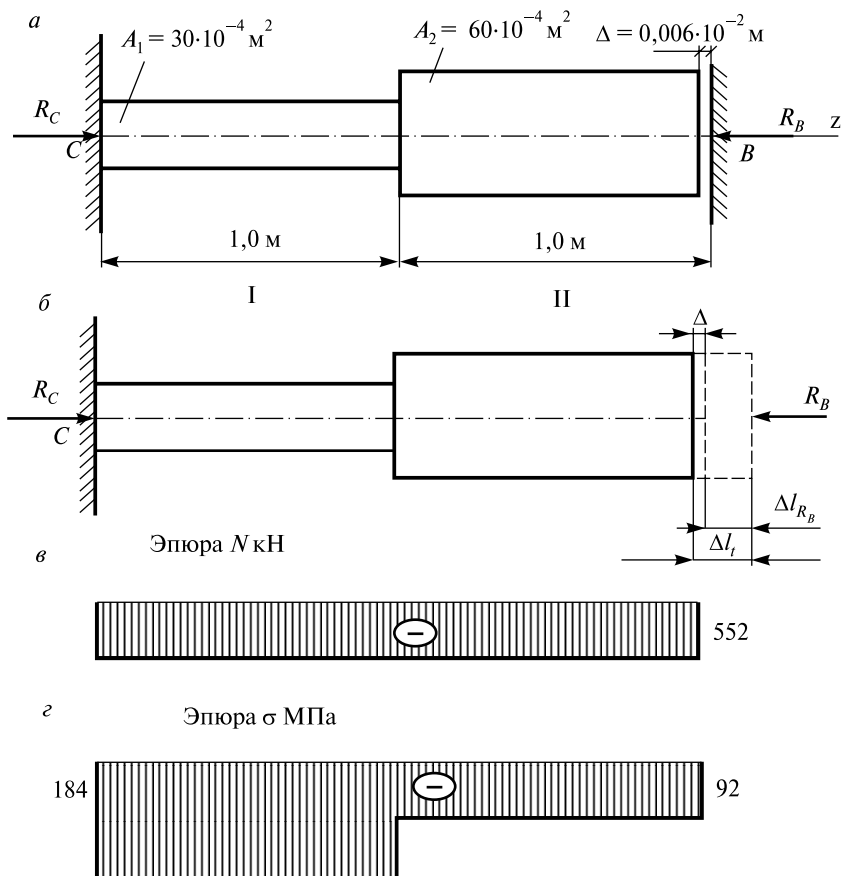


Рис. 13.21. Пример раскрытия статической неопределимости, возникающей вследствие стеснения температурной деформации (а, б); эпюры продольных сил (в), нормальных напряжений (г)

*Решение.* Выясним, исчезнет или зазор при нагревании стержня. Найдем его удлинение при отсутствии правой стенки:

$$\Delta l_t = \alpha_t l \Delta t = 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 60 = 15 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Так как  $\Delta l_t > \Delta$ , зазор исчезнет и возникнут реакции  $R_C$  и  $R_B$ , вызывающие сжатие стержня (см. рис. 13.21, а).

Составим уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0, R_C - R_B = 0; \text{ отсюда } R_C = R_B.$$

Система один раз статически неопределимая. Уравнение перемещений будет иметь вид (рис. 13.21, б)

$$\Delta l_t - \Delta l_{RB} = \Delta$$

или

$$\Delta = 15 \cdot 10^{-3} - \frac{R_B \cdot l}{200 \cdot 10^9 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} - \frac{R_B \cdot l}{200 \cdot 10^9 \cdot 60 \cdot 10^{-4}} = 0,006 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Отсюда  $R_B = 552 \text{ кН} = R_C$ .

Вид эпюр продольных сил  $N$  и нормальных напряжений  $\sigma$  показан на рис. 13.21, в, г.

Продолжим рассмотрение статически неопределимых систем при растяжении—сжатии. Рассмотрим задачи, часто встречающиеся в практике транспортного строительства.

**Пример 13.6.** Система, состоящая из абсолютно жесткого бруса, который опирается на шарнирную опору и поддерживается при помощи двух стальных стержней площадью поперечного сечений  $A_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  и  $A_2 = 10 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$  (рис. 13.22, а).

Требуется определить предельное значение силы  $F$  в двух случаях:

- исходя из условия упругой работы системы  $F_{\text{упр}}$ ;
- исходя из условий предельного равновесия  $F_{\text{пред}}$ , считая, что материал стержней следует диаграмме Прандтля.

В обоих случаях предел текучести  $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$ , модуль упругости стали  $E = 200 \text{ ГПа}$ . Вычислить отношение  $\beta = F_{\text{пред}} / F_{\text{упр}}$ .

*Решение.* Проведем сечение  $\sigma$ — $\sigma$  (рис. 13.22, б) и отбросим часть системы (на рисунке она показана пунктиром). Предположим, что в рассеченных стержнях возникнут растягивающие усилия  $N_1$  и  $N_2$ , а на опоре — опорные реакции  $V_0$  и  $H_0$ , т.е. имеем четыре неизвестных усилия. Для их определения можно составить три уравнения равновесия:

$$\sum F_x = 0; \sum F_y = 0 \text{ и } \sum M_0 = 0.$$

Следовательно, система один раз статически неопределимая.

Первые два уравнения равновесия составлять не имеет смысла, так как в них войдут опорные реакции  $V_0$  и  $H_0$ , которые для решения задачи не нужны.



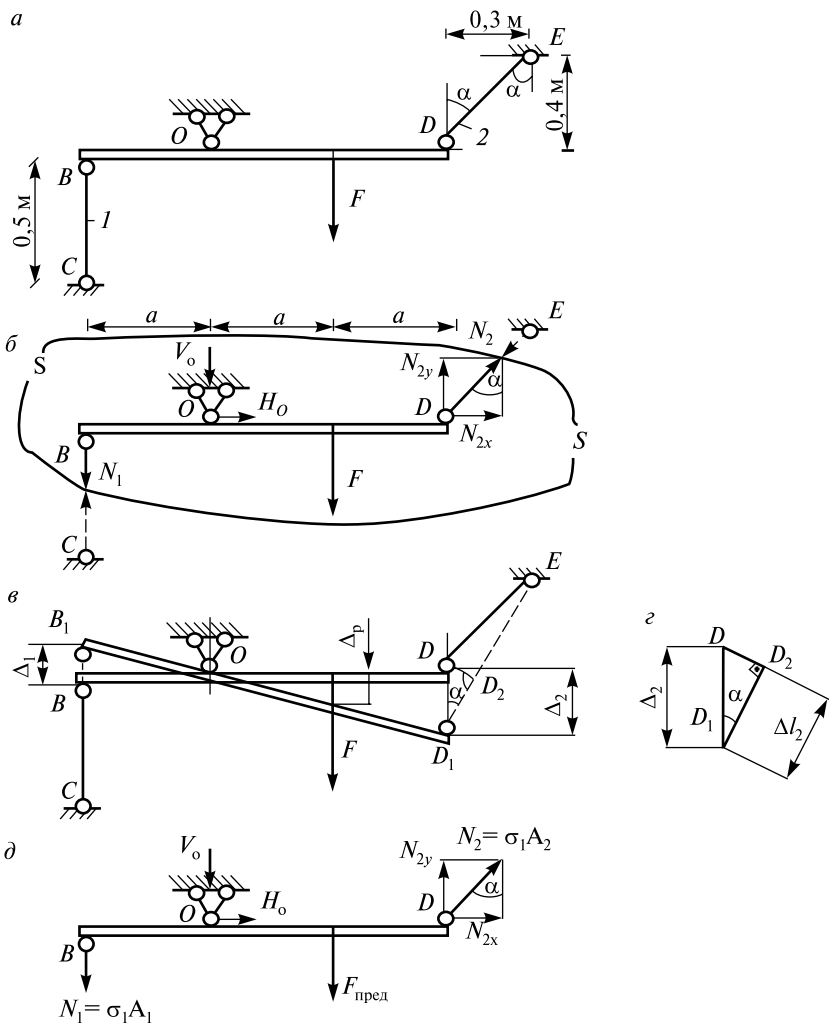


Рис. 13.22. Статически неопределимая система (а); отсеченная часть конструкции (б); деформированный вид системы (в); зависимость между перемещениями (г); к определению предельной нагрузки (д)

Составим третье уравнение равновесия:

$$\sum M_o = 0; \quad -N_1 a - N_2 \cdot 2a \cos \alpha + Fa = 0$$

и после сокращения на  $a$  получим:

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha = F. \quad (*)$$

Уравнение (13.34) содержит два неизвестных усилия. Для их определения составим еще одно уравнение — перемещений (так как система один раз статически неопределимая). Для этого рассмотрим, как будет деформироваться система (рис. 13.22, в).

Под действием силы  $F$  абсолютно жесткий брус, оставаясь прямолинейным, повернется относительно шарнирной опоры (точка  $O$ ) по ходу часовой стрелки. При этом точки прикрепления стержней 1 и 2 к брусу переместятся. Точка  $B$  вверх на величины  $\Delta_1$  и займет положение  $B_1$ . Точка  $D$  вниз на величины  $\Delta_2$  и займет положение  $D_1$ . Считаем, что перемещения ввиду их малости, происходят не по дуге с радиусами  $OB$  и  $OD$ , а по направлениям, перпендикулярным к первоначальному положению абсолютно жесткого бруса  $BD$ .

В стержнях  $BC$  и  $DE$  возникнут растягивающие усилия, как и предполагалось (см. рис. 13.22, в, на котором деформированное состояние системы показано пунктиром). Из подобия треугольников  $OB B_1$  и  $OD D_1$  получим

$$(\Delta_1/\Delta_2) = (a/2a), \text{ или } 2\Delta_1 = \Delta_2.$$

Установим связь между перемещениями  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и удлинениями  $\Delta l_1$ ,  $\Delta l_2$  стержней 1 и 2:  $\Delta l_1 = \Delta l_1$ ;  $\Delta l_2 = \Delta l_2 / \cos \alpha$ .

Последнее соотношение получено из рассмотрения треугольника  $DD_1 D_2$  (см. рис. 13.22, в и г). Заметим, что при определении  $\Delta l_2$  дуга радиусом  $ED$  заменена хордой, перпендикулярной к новому положению стержня  $ED_1$  (в деформированном состоянии), а угол  $DD_1 D_2$  приближенно будет равен углу  $\alpha$  ввиду малости деформации стержня 2.

Тогда  $2\Delta l_1 = \Delta l_2 / \cos \alpha$  или  $2((N_1 l_1)/(EA_1)) = (N_2 l_2)/(EA_2 \cos \alpha)$ .

Подставляя данные задачи и проведя преобразования, получим

$$2(N_1 \cdot 0,5)/(E \cdot 5 \cdot 10^{-4}) = (N_2(\sqrt{0,3^2 + 0,4^2}))/ (E \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0,4/0,5))$$

или

$$3,2N_1 = N_2. \quad (**)$$

Решая совместно уравнения (\*) и (\*\*), определим усилия в стержнях 1 и 2:

$$N_1 = 0,1634F \text{ и } N_2 = 0,5288F.$$

Усилия  $N_1$  и  $N_2$  получены со знаком плюс. Это указывает на то, что предполагаемые направления усилий соответствуют действительным. Если бы усилия были получены со знаком минус, то это указывало бы на то, что фактические направления усилий должны быть противоположны.

Определим напряжения в стержнях 1 и 2:

$$\sigma_1 = N_1/A_1 = 0,1634F/5 \cdot 10^{-4} = 326,8F;$$

$$\sigma_2 = N_2/A_2 = 0,5288F/10 \cdot 10^{-4} = 528,8F.$$

Из этих выражений видно, что  $\sigma_2 > \sigma_1$  и, следовательно, при увеличении силы  $F$  напряжения в стержне 2 быстрее достигнут значения предела текучести ( $\sigma_T = 240$  МПа). Поэтому, приняв  $\sigma_2 = \sigma_T = 240$  МПа, определим

$$F_{\text{упр}} = 240 \cdot 10^6 / 528,8 = 453,86 \text{ кН.}$$

Напряжения в стержне 1 будут меньше:

$$\sigma_1 = 326,8 F_{\text{упр}} = 326,8 \cdot 453,86 \cdot 10^3 = 148,321 \text{ МПа (см. рис. 13.23).}$$

При дальнейшем увеличении нагрузки  $F > F_{\text{упр}}$  напряжения будут увеличиваться только в стержне 1. В стержне 2 напряжения остаются постоянными и равными  $\sigma_T = 240$  МПа.

Определим величину силы  $F_{\text{пред}}$ , которая вызывает текучесть в обоих стержнях. Это явление соответствует разрушению системы, а нагрузка  $F = F_{\text{пред}}$  (рис. 13.22, д). В этом случае система становится статически определимой, так как известны усилия в обоих стержнях. Из рассмотрения предельного равновесия системы (рис. 13.22, д) найдем  $F_{\text{пред}}$ :

$$\sum M_O = 0;$$

$$-N_1 a - N_2 \cdot 2a \cos \alpha + F_{\text{пред}} a = 0, \text{ или}$$

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha = F_{\text{пред}};$$

$$\sigma_T A_1 + 2\sigma_T A_2 \cos \alpha = F_{\text{пред}};$$

откуда

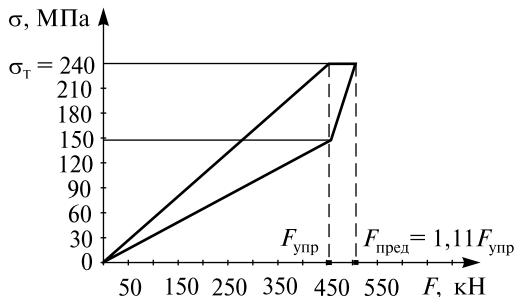
$$F_{\text{пред}} = 240 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 240 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0,8 = 504 \text{ кН.}$$

Коэффициент  $\beta$ , выражающий дополнительные резервы несущей способности статически неопределимой конструкции при учете упругопластических свойств материала:

$$\beta = \frac{F_{\text{пред}}}{F_{\text{упр}}} = \frac{504}{453,86} = 1,11.$$

Таким образом, после появления пластических деформаций в стержне 2 до момента разрушения системы нагрузка увеличилась на 11 %.

Рис. 13.23. Зависимость между напряжениями и усилиями в стержнях



**Пример 13.7.** В системе, состоящей из трех стальных стержней и изображенной на рис. 13.24, *а*, из-за неточности, допущенной при изготовлении, длина среднего стержня  $BD$  оказалась меньше проектной длины на величину  $\delta = 1$  мм. Определить усилия в стержнях после сборки конструкции, если  $l = 1$  м; площадь поперечного сечения стержней  $A = 5 \text{ см}^2$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $E = 200 \text{ ГПа}$ , величина допускаемых напряжений для стали равна  $160 \text{ МПа}$ .

**Решение.** Очевидно, что сборка конструкции начата с установки наклонных стержней, которые займут положение согласно рис. 13.24, *а*, точка  $B$ . Присоединение стержня  $B_0D$ , длина которого  $l - \delta$ , в конструкцию оказывается возможным, если точка  $B$  перейдет в положение  $B_1$  (рис. 13.24, *в*). В этом случае в наклонных стержнях возникнут сжимающие усилия, а в среднем — растягивающие. Изменением угла  $\alpha$  будем пренебрегать. Составим уравнения равновесия (рис. 13.24, *б*):

$$\sum X = 0; \quad N_1 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0, \quad \text{или} \quad N_1 = N_3;$$

$$\sum Y = 0; \quad -N_1 \cos \alpha + N_2 - N_3 \cos \alpha = 0.$$

Учитывая первое уравнение равновесия, второе уравнение примет вид

$$N_2 = 2N_1 \cos \alpha. \quad (*)$$

Полученных уравнений равновесия недостаточно для определения усилий в стержнях.

Система один раз статически неопределимая. Чтобы определить усилия в стержнях конструкции, необходимо дополнительно составить уравнение деформаций. Для этого рассмотрим деформированное состояние системы (рис. 13.24, *в*). Из треугольника  $BB_1B_2$  установим связь между отрезками  $BB_2$  и  $BB_1$  и получим

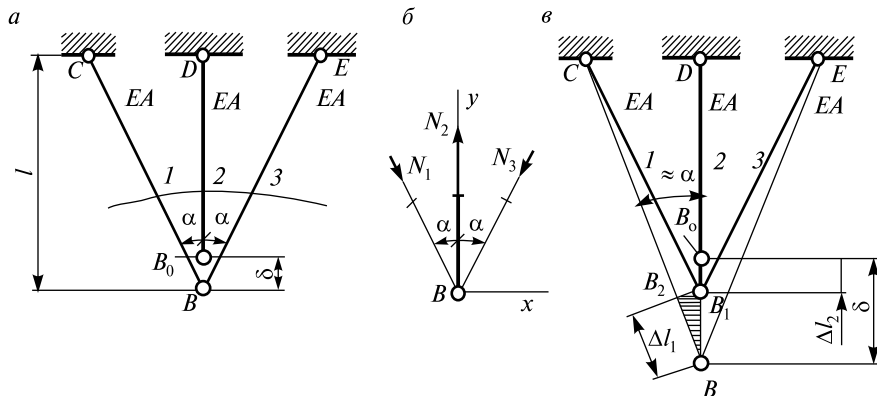


Рис. 13.24. Статически неопределимая конструкция, состоящая из трех стержней (*а*); отсеченная часть конструкции (*б*); деформированный вид конструкции (*в*)

$$\Delta l_1 = (\delta - \Delta l_2) \cos \alpha.$$

Имея в виду, что  $\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA \cos \alpha}$ , а  $\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA}$ , выразим уравнение деформаций через неизвестные усилия  $N_1$  и  $N_2$ :

$$\frac{N_1 l}{\cos \alpha \cdot EA} = (\delta - \frac{N_2 l}{EA}) \cos \alpha. \quad (**)$$

Подставляя значения исходных данных и решая совместно уравнения (\*) и (\*\*), получим усилия в стержнях конструкции:

$$N_1 = N_3 = 32,644 \text{ кН (сжатие)}; \quad N_2 = 65,288 \text{ кН.}$$

Положительные знаки усилий указывают на то, что направление усилий было выбрано удачно. Тогда напряжения в стержнях конструкции будут равны:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = 65,288 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 130,576 \text{ МПа.}$$

Полученные значения напряжений не превышают допускаемых.

**Пример 13.8.** Абсолютно жесткий брус опирается на три симметрично расположенные железобетонные колонны длиной 3,0 м, поперечное сечением  $A = 300 \text{ см}^2$ . Брус нагружен силой  $F$ , равной 700 кН (рис. 13.25). При монтаже конструкции средняя колонна была смонтирована короче крайних на 1 мм. Приведенный модуль упругости колонн  $E = 20 \text{ ГПа}$ . Определить усилия в колоннах. Полученный результат сравнить для случая точного изготовления всех колонн.

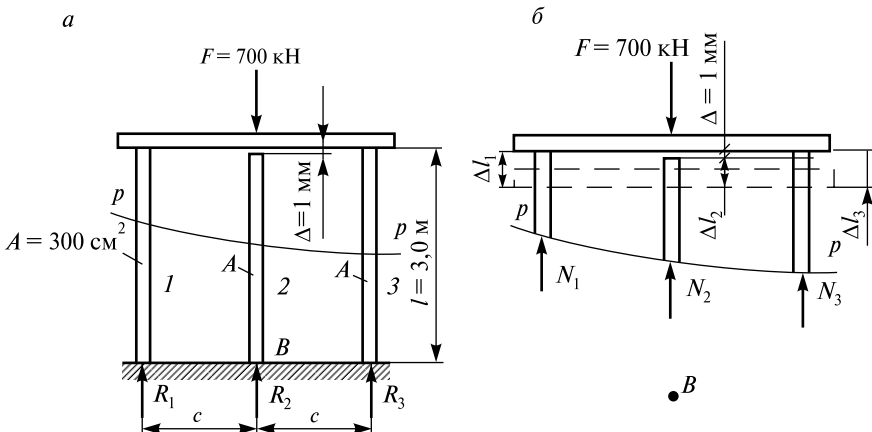


Рис. 13.25. Абсолютно жесткий брус, опирающийся на три колонны (а); деформированное состояние системы (б)

*Решение.* Для заданной конструкции (рис. 13.25, б) можно составить два независимых уравнения равновесия,:

$$\sum Y = 0; \quad N_1 + N_2 + N_3 - F = 0; \quad N_1 + N_2 + N_3 = 700; \quad (*)$$

$$\sum M_B = 0; \quad N_1 c - N_3 c = 0; \quad N_1 = N_3. \quad (**)$$

Подставляя (\*\*) в (\*), получим

$$2N_1 + N_2 = 700.$$

Неизвестных усилий в колоннах три. Следовательно, заданная система один раз статически неопределимая.

Рассмотрим деформированное состояние системы. При нагружении вначале будут деформироваться крайние колонны. После исчезновения зазора три колонны воспримут всю заданную нагрузку. Уравнение перемещений (рис. 13.25, б) будет иметь вид

$$\Delta l_1 - \Delta l_2 = \Delta, \quad \text{или} \quad \frac{N_1 l}{EA} - \frac{N_2 l}{EA} = \Delta.$$

Подставляя исходные данные, получим

$$N_1 - N_2 = \frac{\Delta EA}{l} = \frac{1 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 10^9 \cdot 300 \cdot 10^{-4}}{3} = 200 \text{ кН},$$

$$\text{или} \quad N_1 = N_2 + 200 \text{ кН}. \quad (***)$$

Решая совместно уравнения (\*), (\*\*) и (\*\*\*), определим усилия в колоннах:  $N_1 = N_3 = 300 \text{ кН}$ ,  $N_2 = 100 \text{ кН}$ .

Тогда напряжения в колоннах будут равны:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{A} = \frac{-300 \cdot 10^3}{300 \cdot 10^{-4}} = -10 \cdot 10^6 \text{ Па} = -10 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{-100 \cdot 10^3}{300 \cdot 10^{-4}} = -3,33 \cdot 10^6 \text{ Па} = -3,33 \text{ МПа}.$$

Определим напряжения в колоннах при точном изготовлении всех стоек. Усилия в стойках колонн будут равны:

$$N_1 = N_2 = N_3 = 700/3 = 233,33 \text{ кН},$$

а напряжения  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -7,77 \text{ МПа}$ .

Сравнивая полученные данные, видим, что отклонение от проектных размеров при изготовлении средней колонны привело к перегрузке крайних на 28,7 % и разгрузке средней колонны на 57,14 %.

## Глава 14. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ

### 14.1. Основные понятия

При расчете элементов конструкций используются различные геометрические характеристики поперечных сечений стержня. При растяжении—сжатии использовалась площадь поперечного сечения. Оказывается, при других деформациях эта геометрическая характеристика не является достаточной. Необходимо использовать другие, более сложные геометрические характеристики.

Последнее утверждение проиллюстрируем на следующем примере. Возьмем линейку длиной 20—25 см. Зажмем ее так, чтобы больший размер поперечного сечения располагался горизонтально (рис. 14.1, *а*) и приложим силу на другом конце.

Линейка изогнется, свободный конец линейки переместится в вертикальном направлении на некоторую величину  $v_1$ . Повторим тот же опыт, но линейку повернем на  $90^\circ$  относительно продольной оси (рис. 14.1, *б*). Линейка изогнется, конец переместится в вертикальном направлении, но на величину  $v_2$ , значительно меньшую, чем  $v_1$ .

Следовательно, при одной и той же площади поперечного сечения стержня, но при разном расположении его стержень по-разному сопротивляется изгибу. Этот проведенный опыт позволяет сделать вывод о том, что площадь поперечного сечения не может характеризовать сопротивляемость стержня изгибу.

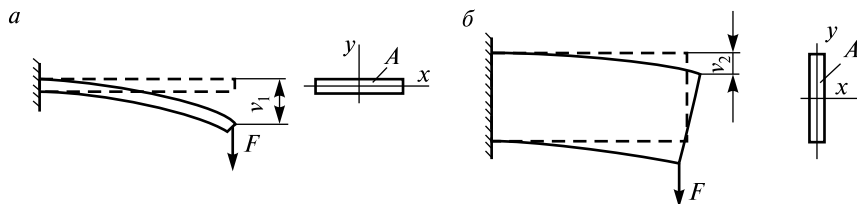


Рис. 14.1. К понятию о моменте инерции:

*а* — больший размер поперечного сечения располагается горизонтально; *б* — линейка повернута на  $90^\circ$

## 14.2. Статические моменты инерции и центр тяжести

Пусть поперечное сечение стержня представляет собой плоскую фигуру произвольного очертания площадью  $A$  в системе координат  $XOY$  (рис. 14.2). Выделим элемент площади  $dA$  с координатами  $x$  и  $y$  и введем следующие геометрические характеристики: статические моменты относительно осей  $X$  и  $Y$ .

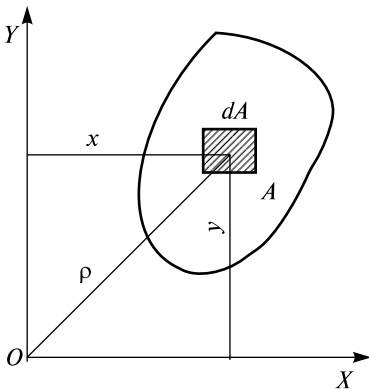
*Статическим моментом сечения* относительно данной оси называется взятая по всей площади сечения сумма произведений элементарных площадей  $dA$  на их расстояние до этой оси:

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA. \quad (14.1)$$

Статический момент инерции имеет размерность длины в третьей степени и выражается в метрах кубических (сантиметрах кубических). В зависимости от положения оси, относительно которой вычисляется статический момент, он может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной*. Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести сечения*.

Координаты центра тяжести сечения  $x_c$  и  $y_c$  определяются по формулам:



$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad (14.2)$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^n A_i}.$$

Рис. 14.2. К понятию о статическом моменте сечения и моменте инерции



Если сечение имеет ось или центр симметрии, то определение положения центра тяжести упрощается — он находится соответственно на оси симметрии или на пересечении этих осей. При вычислении координат центра тяжести сечения сложной формы его следует разбить на простые составные части (рис. 14.3), для которых известны площади  $A_i$  и координаты центра тяжести  $x_i$  и  $y_i$  в предварительно выбранной вспомогательной системе координат. Так, для сечения, показанного на рис. 14.3, координаты его центра тяжести относительно вспомогательной системы координат  $XOY$  в соответствии с (14.2) вычисляются следующим образом:

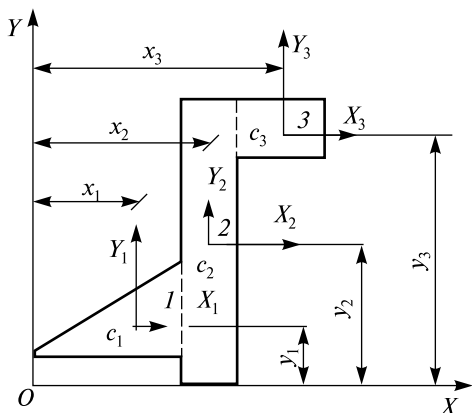


Рис. 14.3. К определению положения центра тяжести сечения

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i x_{ci}}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{A^I x_1 + A^{II} x_2 + A^{III} x_3}{A^I + A^{II} + A^{III}};$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{A^I y_1 + A^{II} y_2 + A^{III} y_3}{A^I + A^{II} + A^{III}}.$$

Следует иметь в виду, что при вычислении статических моментов составных частей сечения необходимо учитывать знаки координат их центров тяжести относительно выбранной вспомогательной системы координат.

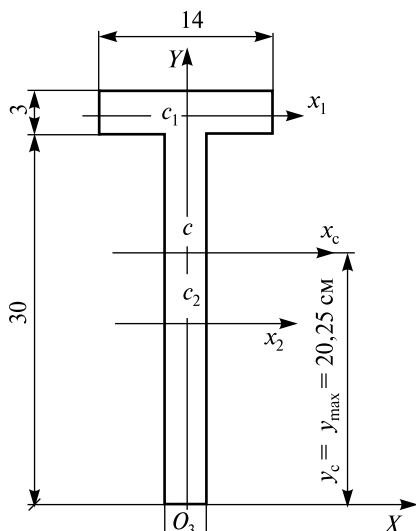


Рис. 14.4

По формуле (14.2) вычисляем вертикальную координату центра тяжести поперечного сечения:

$$y_c = \frac{14 \cdot 3 \cdot 31,5 + 3 \cdot 30 \cdot 15}{14 \cdot 3 + 30 \cdot 3} = 20,25 \text{ см.}$$

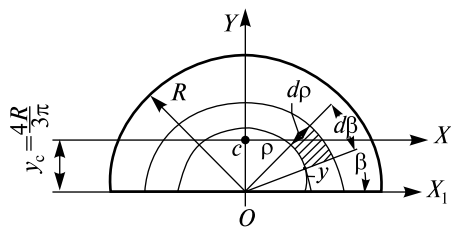


Рис. 14.5

Выбор различных вспомогательных координатных систем можно использовать для контроля определения, положения центра тяжести сечения.

**Пример 14.1.** Определить координаты центра тяжести сечения (рис. 14.4). Размеры даны в сантиметрах.

*Решение.* Выберем вспомогательную систему осей координат  $YOX$ . Разобьем сечение на два прямоугольника так, чтобы ось  $Y$  совпала с осью симметрии, а оси  $x_1$  и  $x_2$  прошли через центр тяжести каждого прямоугольника. В этой системе координаты центра тяжести первого прямоугольника  $x_1 = 0$ ;  $y_1 = 31,5$  см; второго —  $x_2 = 0$ ;  $y_2 = 15$  см. Определим площади поперечного сечения прямоугольников:  $A_1 = 14 \cdot 3 = 42 \text{ см}^2$ ,  $A_2 = 3 \cdot 30 = 90 \text{ см}^2$ .

**Пример 14.2.** Определить положение центра тяжести полукруга (рис. 14.5).

*Решение.* Направим ось  $y$  по оси симметрии полукруга, а ось  $x_1$  совместим с его основанием. В этом случае  $x_c = 0$ . Определим координату  $y_c$ . Подсчитаем статический момент полусечения непосредственным интегрированием по площади полукруга:

$$S_x = \int_A y dA = \int_A \rho \sin \beta \cdot \rho d\beta d\rho = \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^\pi \sin \beta \cdot d\beta = \frac{2}{3} R^3.$$

Используя формулу (14.2), находим расстояние центра тяжести от основания полукруга:

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{4R}{3\pi}.$$

### 14.3. Осевые и центробежные моменты инерции

*Осевым моментом инерции плоского сечения относительно данной оси* называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до этой оси (рис. 14.2).

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (14.3)$$

*Полярным моментом инерции сечения относительно данной точки (полюса  $O$ )* называется сумма произведений элементарных площадок на квадрат расстояний до этой точки от начала координат:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (14.4)$$

Размерность осевого и полярного моментов инерции сантиметры (метры) в четвертой степени.

Установим связь между полярным и осевым моментом инерции сечения (рис 14.2).

По определению,  $I_\rho = \int_A \rho^2 dA$ , но  $\rho^2 = y^2 + x^2$ , следовательно,

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA,$$

и окончательно получим

$$I_\rho = I_x + I_y. \quad (14.5)$$

Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей.

*Центробежным моментом инерции относительно осей  $X$  и  $Y$*  называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок на их расстояние до двух взаимно перпендикулярных осей:

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (14.6)$$

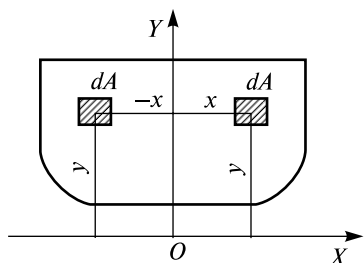


Рис. 14.6. К свойству центробежного момента инерции

Центробежный момент инерции выражается в сантиметрах (метрах) в четвертой степени и в зависимости от выбранной системы координат может быть положительными, отрицательными и равен нулю (в частных случаях). Например, если одна из осей поперечного сечения является осью симметрии, а другая — любая ей перпендикулярная (рис. 14.6), то центробежный момент инерции сечения относительно этой пары осей равен нулю.

Познакомимся еще с одной геометрической характеристикой — радиусом инерции сечения.

*Радиусом инерции сечения относительно некоторой оси*, например,  $X$  или  $Y$ , называют величину, определяемую из выражений

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (14.7)$$

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *главными центральными осями инерции сечения*, а соответствующие им экстремальные осевые моменты инерции называются *главными моментами инерции*. Они соответственно обозначаются  $I_{\max}$ ,  $I_{\min}$ .

Вычислим моменты инерции простейших фигур.

**Прямоугольник** (рис. 14.7) с основанием  $b$  и высотой  $h$ .

Вычислим момент инерции относительно центральной оси  $OX$ .

Разобьем прямоугольник на элементарные полосы шириной  $b$  и высотой  $dy$  и, подставляя значение элементарной площади  $dA = bdy$  в интегральное выражение (14.3), получим

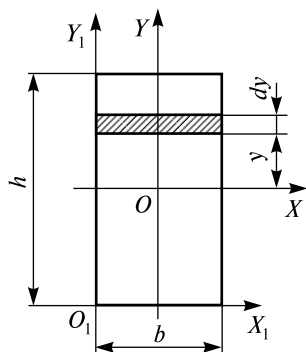


Рис. 14.7. Вычисление момента инерции для прямоугольника

$$I_x = \int_A y^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = bh^3 / 12. \quad (14.8)$$

Аналогичным образом можно вычислить момент инерции относительно оси  $Y$ :

$$I_y = hb^3/12. \quad (14.9)$$

**Треугольник** (рис. 14.8). Определим момент инерции относительно центральной оси  $OX$ . Площадь элементарной площадки, отстоящей на расстоянии  $y$  от оси  $X$  (заштрихованной на рис. 14.8), равна  $dA = b_y dy$ . Ширина элементарной площадки, определится из подобия треугольников:

$$b_y = \frac{b}{h} \left( \frac{2}{3}h - y \right).$$

Подставляя это выражение в (14.3), получаем

$$I_x = \int_A y^2 dA = \frac{b}{h} \int_{-h/3}^{2h/3} \left( \frac{2}{3}hy^2 - y^3 \right) dy = \frac{bh^3}{36}. \quad (14.10)$$

Аналогично определим момент инерции относительно оси  $O_1X_1$ :

$$I_{x1} = \int_A y_1^2 dA = \frac{b}{h} \int_0^h y_1^2 (h - y_1) dy_1 = \frac{bh^3}{12}. \quad (14.11)$$

Найдем теперь момент инерции относительно оси симметрии  $OY$ . Ширину элементарной площадки  $b_x$  определим из подобия треугольников:

$$b_x = \frac{h}{b/2} (b/2 - x).$$

Тогда

$$I_y = \int_A x^2 dA = 2 \frac{2h}{b} \int_0^{b/2} \left( \frac{b}{2} - x \right) \times x^2 dx = \frac{hb^3}{48}. \quad (14.12)$$

**Круг** (рис. 14.9). Для него удобнее сначала определить полярный момент инерции, а через него — моменты инерции относительно центральных осей.

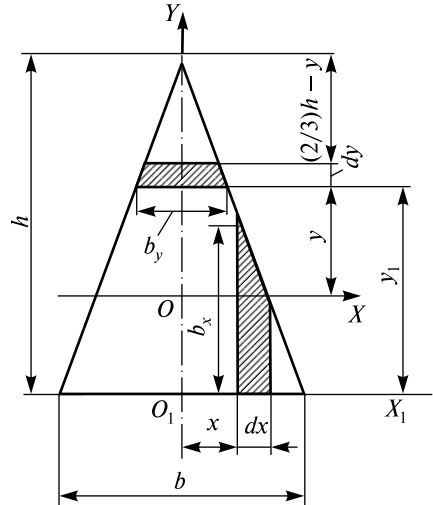


Рис. 14.8. Вычисление момента инерции для треугольника

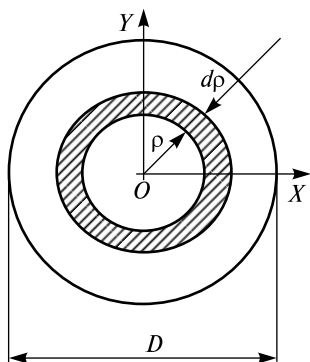


Рис. 14.9. Вычисление момента инерции для круга

Площадь элементарного кольца радиусом  $\rho$  равна произведению длины его окружности на толщину  $d\rho$ :

$$dA = 2\pi\rho d\rho.$$

Подставляя это значение в интегральное выражение (14.4), получим

$$I_{\rho} = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{D/2} \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho = \pi D^4 / 32. \quad (14.13)$$

Учитывая, что полярный момент инерции равен сумме двух осевых моментов (14.5), получим

$$I_x = I_y = I_{\rho} / 2 = \pi D^4 / 64. \quad (14.14)$$

Кольцо (рис. 14.10). Полярный момент инерции кольца может быть найден как разность моментов инерции двух кругов: наружного и внутреннего. В соответствии с формулой (14.13) имеем

$$\begin{aligned} I_{\rho} &= \pi D^4 / 32 - \pi d^4 / 32 = \\ &= (\pi D^4 / 32)(1 - d^4 / D^4). \end{aligned} \quad (14.15)$$

Осевые моменты инерции кольца будут:

$$I_x = I_y = I_{\rho} / 2 = (\pi D^4 / 64)(1 - d^4 / D^4). \quad (14.16)$$

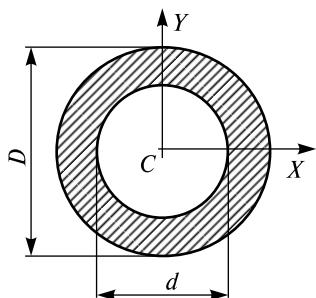


Рис. 14.10. Вычисление момента инерции для кольца

## 14.4. Вычисление моментов инерции при параллельном переносе осей

При вычислении моментов инерции сложных сечений возникает необходимость определять их относительно осей, ориентированных различным образом в плоскости. Для этого удобно использовать известные значения моментов инерции простейших плоских сечений относительно собственных центральных осей. В общем случае поставленную задачу можно представить как последовательность преобразований — параллельный перенос осей.

Будем считать, что известны моменты инерции  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_{xy}$  относительно осей  $x$  и  $y$ , проходящих через центр тяжести сечения  $c$  (рис. 14.11). Определим моменты инерции относительно новых осей  $X_1$  и  $Y_1$ , параллельных центральным осям  $X$  и  $Y$ .

Из рис. 14.11 легко установить зависимости между новыми и старыми координатами элементарной площади  $dA$ :

$$x_1 = x + b; \quad y_1 = y + a.$$

Используя полученные выра-

жения, найдем осевые моменты инерции  $I_{x_1}$  и  $I_{y_1}$  относительно новых осей  $x_1$  и  $y_1$ :

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA.$$

Первый интеграл представляет собой момент инерции  $I_x$  относительно первоначальной оси  $X$ , второй обращается в ноль, так как статический момент площади относительно центральной оси равен нулю, третий есть сама площадь. Окончательно получим

$$I_{x_1} = I_x + Aa^2. \quad (14.17)$$

Аналогично

$$I_{y_1} = I_y + Ab^2. \quad (14.18)$$

Таким образом, момент инерции сечения относительно любой оси, параллельной центральной, равен моменту инерции относительно центральной оси плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между осями.

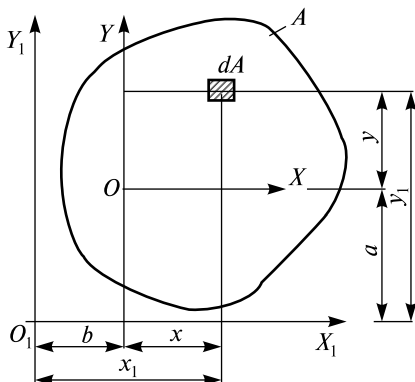


Рис. 14.11. К выводу зависимостей между моментами инерции при параллельном переносе осей

Нетрудно убедиться, что похожая зависимость существует и между центробежным моментом инерции:

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + Aab. \quad (14.19)$$

Центробежный момент инерции относительно произвольных осей, параллельных центральным, равен центробежному моменту инерции относительно центральных осей плюс произведение площади сечения на квадраты расстояния между указанными осями.

Если одна из центральных осей сечения является осью симметрии, то  $I_{xy} = 0$  и центробежный момент инерции относительно осей, параллельных центральным, равен

$$I_{x_1 y_1} = Aab. \quad (14.20)$$

Складывая формулы (14.17) и (14.18) и учитывая, что  $I_{\rho_1} = I_{x_1} + I_{y_1}$ , получим зависимость для полярного момента инерции при параллельном переносе осей из центра тяжести (полюс О) в произвольную точку (полюс О<sub>1</sub>):

$$I_{\rho_1} = I_{\rho} + (a^2 + b^2)A. \quad (14.21)$$

**Пример 14.3.** Определить моменты инерции прямоугольника относительно осей  $X_1$  и  $Y_1$ , совпадающих с его сторонами (см. рис. 14.7).

*Решение.* Используем формулы (14.17)–(14.19) для перехода к осям, параллельным центральным, и получим:

$$I_{x_1} = I_x + Aa^2 = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3};$$

$$I_{y_1} = I_y + Ab^2 = \frac{hb^3}{12} + bh\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{hb^3}{3};$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + Aab = 0 + bh \frac{h}{2} \frac{b}{2} = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

**Пример 14.4.** Определить момент инерции полукруга относительно центральной оси  $x$  (см. рис. 14.5).



*Решение.* Положение центра тяжести фигуры известно (пример 14.2). Тогда, используя зависимости, обратные формулам (14.17)–(14.19), получим:

$$I_x = I_{x1} - Aa^2; \quad I_y = I_{y1} - Ab^2; \quad I_{xy} = I_{x1y1} - Aab.$$

Для рассматриваемой задачи имеем

$$I_x = I_{x1} - Aa^2 = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2} \cdot \left( \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \right)^2 = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4.$$

## 14.5. Зависимость между моментами инерции при повороте координатных осей

Получим зависимости для вычисления моментов инерции сечения относительно осей  $U$  и  $V$ , повернутых на некоторый угол  $\alpha$ , против хода часовой стрелки (положительное значение угла) по отношению к координатным осям  $x$ ,  $y$  (рис. 14.12).

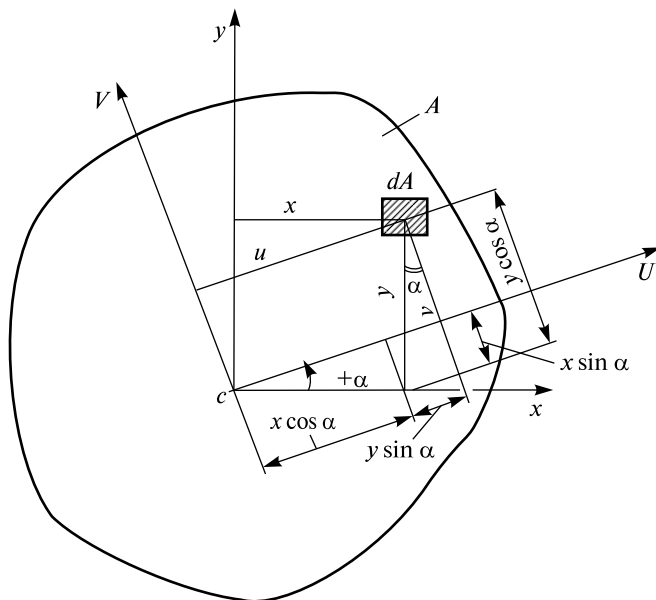


Рис. 14.12. К выводу зависимостей между моментами инерции при повороте осей

Моменты инерции сечения относительно осей  $x$ ,  $y$  будем считать известными:

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA; \quad I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (14.22)$$

Запишем координаты элементарной площади  $dA$  в системе координат  $u$ ,  $v$ . Из рис. 14.12 видно, что

$$u = y \sin \alpha + x \cos \alpha; \quad v = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \quad (14.23)$$

Найдем момент инерции относительно оси  $U$ . Согласно определению,

$$I_u = \int_A v^2 dA. \quad (14.24)$$

Подставляя в формулу (14.24) выражение для  $v$  и с учетом (14.22), получим

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha. \quad (14.25)$$

Поступая аналогично, найдем момент инерции относительно другой оси —  $V$ :

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha, \quad (14.26)$$

а также центробежный момент инерции относительно осей  $U$  и  $V$ . После несложных преобразований имеем

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (14.27)$$

Если сложим выражения (14.25) и (14.26), то получим

$$I_u + I_v = I_x + I_y. \quad (14.28)$$

Это соотношение показывает, что сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей не зави-

сит от угла  $\alpha$  и при повороте осей сохраняет постоянное значение. Величины, не изменяющиеся при повороте координатных осей, называются инвариантами. Следовательно, сумма  $I_x + I_y$  является инвариантом.

**Пример 14.5.** Для прямоугольника (рис. 14.13) вычислить относительно осей  $U$  и  $V$  осевые и центробежные моменты инерции. Ось  $U$  совпадает с диагональю прямоугольника, а ось  $V$  перпендикулярна к ней.

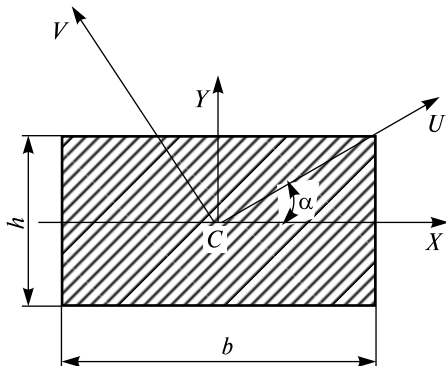


Рис. 14.13

*Решение.* Используя рис. 14.13, находим:

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}}.$$

Определим осевые  $I_u$ ,  $I_v$  и центробежный  $I_{uv}$  моменты инерции:

$$\begin{aligned} I_u &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha = \\ &= \frac{bh^3}{12} \left( \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right)^2 + \frac{hb^3}{12} \left( \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right)^2 - 0 = \frac{h^3 b^3}{6(h^2 + b^2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_v &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha = \frac{bh^3}{12} \left( \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right)^2 + \\ &+ \frac{hb^3}{12} \left( \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right)^2 + 0 = \frac{hb(h^4 + b^4)}{12(h^2 + b^2)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{uv} &= (I_x - I_y) \sin \alpha \cdot \cos \alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = \left( \frac{bh^3}{12} - \frac{hb^3}{12} \right) \times \\ &\times \left( \frac{h}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right) \left( \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}} \right) + 0 = \frac{h^2 b^2 (h^2 - b^2)}{12(h^2 + b^2)}. \end{aligned}$$

## 14.6. Главные оси и главные моменты инерции

*Главными осями инерции* называют две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Направление главных осей инерции определяется выражением

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}. \quad (14.29)$$

По этой формуле определяются два значения угла  $\alpha'_0$  и  $\alpha''_0 = \alpha'_0 + 90^\circ$ , отличающиеся друг от друга на  $90^\circ$ , и положение главных осей, которые взаимно перпендикулярны.

*Главными моментами инерции* называют осевые моменты инерции, вычисленные относительно главных осей инерции, которые имеют экстремальные значения.

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (14.30)$$

Здесь знак плюс перед вторым слагаемым соответствует максимальному, а знак минус — минимальному моменту инерции.

Главные оси, проходящие через тяжести сечения, называют *главными центральными осями*, а моменты инерции относительно этих осей — *главными центральными моментами инерции*.

Ось симметрии плоского сечения является главной центральной осью инерции этого сечения.

Как частный случай зависимости (14.28) следует, что

$$I_x + I_y = I_{\max} + I_{\min} = \text{const.}$$

Положение главных осей инерции находят с помощью выражений

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{I_{xy}}{I_{\max} - I_y}; \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{I_{xy}}{I_{\min} - I_y}, \quad (14.31)$$

где  $\alpha_1$  — угол между осью  $x$  и осью, относительно которой момент инерции равен  $I_{\max}$ ;

$\alpha_2$  — угол между осью  $X$  и осью, относительно которой момент инерции равен  $I_{\min}$ .

Положительные значения углов отсчитываются от оси  $x$  против хода часовой стрелки. Напомним, что  $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 90^\circ$ .

Для вычисления главных моментов инерции составных сечений их разбивают на простейшие части, моменты инерции которых определяют по известным формулам (см. п. 14.3). Дальнейший расчет ведут в следующем порядке (рассматриваются сечения, имеющие хотя бы одну ось симметрии):

- определяют положение центра тяжести сечения;
- вычисляют значения моментов инерции отдельных частей сечения относительно собственных центральных осей;
- вычисляют моменты инерции частей, составляющих сечение, относительно центральных осей (всего сечения);
- определяют главные центральные моменты инерции всего сечения.

Таким образом, при вычислении моментов инерции составных сечений руководствуются следующим правилом:

*Момент инерции сечения относительно данной оси равен сумме моментов инерции частей, составляющих это сечение, относительно той же оси.* Это правило вытекает из свойства определенного интеграла: *интеграл суммы нескольких слагаемых равен сумме интегралов этих слагаемых.*

## 14.7. Примеры вычисления геометрических характеристик составных сечений

**Пример 14.6.** Вычислить величины главных центральных моментов инерции сечения, изображенного на рис. 14.4.

*Решение.* Из анализа полученного ранее решения (смотри пример 14.1) устанавливаем, что одной из главных осей рассматриваемого сечения является ось симметрии  $y$ , а другая главная ось  $x_c$  проходит через центр тяжести сечения и перпендикулярна к первой. Вычислим моменты инерции. Момент инерции относительно оси  $x$  определим, применив формулу перехода к оси, параллельной центральной:

$$I_{xc} = I_{xc}^I + I_{xc}^{II} = I_{x1}^I + a_1^2 A_1 + I_{x2}^{II} + a_2^2 A_2,$$

где  $I_{x1}^I$  и  $I_{x2}^{II}$  — моменты инерции I и II прямоугольников относительно собственных центральных осей  $x_1$  и  $x_2$ ;

$a_1$  и  $a_2$  — расстояние между собственными центральными осями и осью  $x$ .

Ось  $y$  является одновременно как главной осью прямоугольников I и II, так и всего сечения; тогда

$$I_{y_c} = I_y^I + I_y^{II}.$$

Выполнив вычисления, получим:

$$I_{x_c} = \frac{14 \cdot 3^3}{12} + (31,5 - 20,25)^2 \cdot 14 \cdot 3 + \frac{3 \cdot 30^3}{12} + (20,25 - 15)^2 \cdot 3 \cdot 30 = 14560 \text{ см}^4;$$

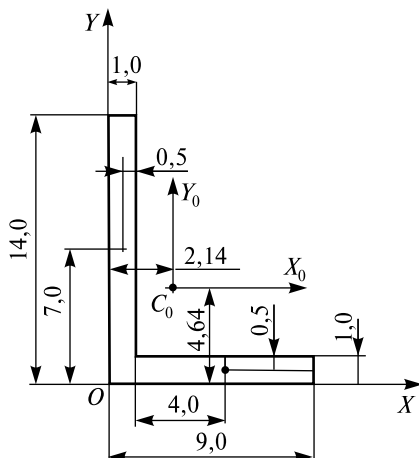
$$I_{y_c} = \frac{3 \cdot 14^3}{12} + \frac{30 \cdot 3^3}{12} = 686 + 67,5 = 753,5 \text{ см}^4$$

На основании выполненных вычислений устанавливаем:

$$I_1 = I_{x_c} = 14560 \text{ см}^4; \quad I_2 = I_{y_c} = 753,5 \text{ см}^4.$$

**Пример 14.7.** Для сечения, изображенного на рис. 14.14, определить моменты инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести.

*Решение.* Проведем произвольные оси  $X$  и  $Y$  и разобьем сечение на части так, чтобы положение центра тяжести каждой из них было известно. Для определения координат центра тяжести всего сечения вычислим площадь  $A$  и статические моменты  $S_x$  и  $S_y$  всего сечения:



$$A = A_1 + A_2 = 14 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 22 \text{ см}^2;$$

$$S_x = S_{x1} + S_{x2} = 14 \cdot 1 \cdot 7 + 8 \cdot 1 \cdot 0,5 = 102 \text{ см}^3;$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} = 14 \cdot 1 \cdot 0,5 + 8 \cdot 1 \cdot 5 = 47 \text{ см}^3.$$

Тогда координаты центра тяжести всего сечения можно вычислить следующим образом:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{47}{22} = 2,14 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{102}{22} = 4,64 \text{ см}.$$

Определим центральные осевые и центробежный моменты инерции.

Рис. 14.14

$$\begin{aligned}
I_{x_0} &= I_{x_1} + A_1 a_1^2 + I_{x_2} + A_2 a_2^2 = \frac{1 \cdot 14^3}{12} + 1 \cdot 14(7 - 4,64)^2 + \frac{8 \cdot 1^3}{12} + \\
&\quad + 8 \cdot 1 \cdot (4,64 - 0,5)^2 = 444,42 \text{ см}^4; \\
I_{y_0} &= I_{y_1} + A_1 b_1^2 + I_{y_2} + A_2 b_2^2 = \frac{14 \cdot 1^3}{12} + 14 \cdot 1(2,14 - 0,5)^2 + \\
&\quad + \frac{1 \cdot 8^3}{12} + 8 \cdot 1(5 - 2,14)^2 = 146,92 \text{ см}^4; \\
I_{x_0 y_0} &= I_{x_1 y_1} + A_1 a_1 b_1 + I_{x_2 y_2} + A_2 a_2 b_2 = 0 + 14 \cdot 1 \cdot 2,36(-1,64) + \\
&\quad + 0 + 8 \cdot 1 \cdot 2,86(-4,14) = -148,91 \text{ см}^4 = |148,91| \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

Полученные значения сравним с данными ГОСТ 8510-86 для неравнополочного уголка 140×90×10 см.

Данный угловой профиль отличается от рассматриваемого сечения закруглениями. Из сортамента устанавливаем, что

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2,12 \text{ см}; y_0 = 4,58 \text{ см}; \\
I_x &= 444 \text{ см}^4; I_y = 146 \text{ см}^4; I_{xy} = 147 \text{ см}^4.
\end{aligned}$$

Результаты сравнения показывают, что выполненные по ГОСТу закругления прокатных профилей не оказывают существенного влияния на величины моментов инерции и положения центра тяжести.

**Пример 14.8.** Определить положение главных центральных осей и вычислить моменты инерции относительно этих осей для сечения, составленного из швеллера № 22 и уголка 110×110×8, рис. 14.15.

*Решение.* Сечение разбиваем на две части: швеллер № 22 и уголок 110×110×8. Геометрические характеристики швеллера № 22 принимаем по ГОСТ 8240-89:

$$A_1 = 26,7 \text{ см}^2; I_{x_1} = 2110 \text{ см}^4; I_{y_1} = 151 \text{ см}^4; z_0 = 2,21 \text{ см}.$$

Характеристики уголка 110×110×8 принимаем по ГОСТ 8509-93:

$$\begin{aligned}
A_1 &= 17,2 \text{ см}^2; I_{x_2} = 198 \text{ см}^4; I_{\max} = 315 \text{ см}^4; I_{\min} = 81,8 \text{ см}^4; \\
|I_{xy}| &= 116 \text{ см}^4; z_0 = 3 \text{ см}.
\end{aligned}$$

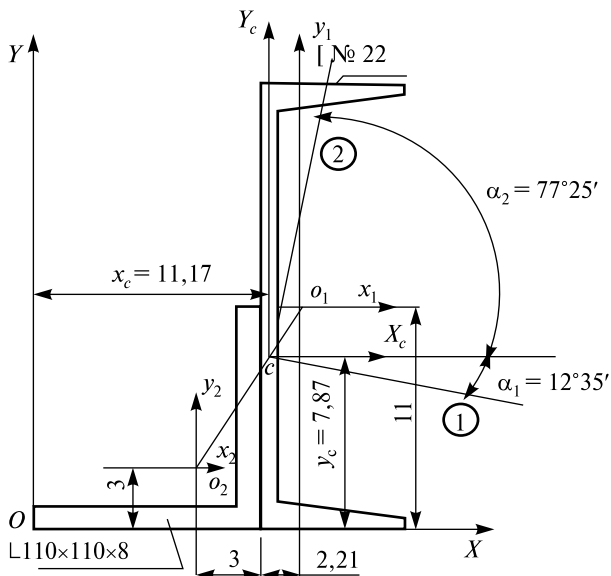


Рис. 14.15

Выбираем в качестве вспомогательных осей оси  $Y$  и  $X$  и определим координаты центра тяжести сечения в этих осях:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{26,7(11+2,21)+17,2(11-3)}{26,7+17,2} = \frac{490,307}{43,9} = 11,17 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{26,7 \cdot 11 + 17,2 \cdot 3}{26,7+17,2} = 7,87 \text{ см}.$$

Отложив эти значения от осей  $Y$  и  $X$ , найдем положение центра тяжести сечения  $с$  и проведем центральные оси  $X_c$ ,  $Y_c$ .

Аналитическое определение положения центра тяжести всей фигуры можно проверить графически. Для этого необходимо в масштабе показать все сечение и центры тяжести швеллера  $o_1$  и уголка  $o_2$  и всего сечения  $с$ . Эти три точки должны находиться на одной прямой (см. рис. 14.15).

Вычислим моменты инерции всей фигуры относительно найденных центральных осей:

$$I_{x_c} = 2110 + 26,7(11-7,87)^2 + 198 + 17,2(7,87-3)^2 = 2977,51 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = 151 + 26,7(13,21-11,17)^2 + 198 + 17,2(11,17-(11-3))^2 = 632,96 \text{ см}^4;$$



$$I_{x_c y_c} = 0 + 26,7 \cdot (-11 - 7,87) \cdot (-13,21 - 11,17) + 116 + \\ + 17,2(11,17 - (11 - 3)) \cdot (7,87 - 3) = 552,02 \text{ см}^4.$$

Главные моменты инерции всего определим по формуле

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2}\right)^2 + I_{x_c y_c}^2} = \\ = \frac{2977,51 + 632,96}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2977,51 - 632,96}{2}\right)^2 + 552,02^2} = 1805,235 \pm 1295,75 \text{ см}^4,$$

или окончательно получим

$$I_{\max} = I_1 = 3100,985 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = I_2 = 509,485 \text{ см}^4.$$

Полученные результаты можно проверить исходя из различных соображений. Удостоверимся в том, что наибольший момент инерции действительно является максимальным, а наименьший — минимальным и положительным:

$$I_{\max} > I_x > I_y > I_{\min} > 0;$$

$$3100,985 > 2977,51 > 632,96 > 509,485.$$

Далее проверим инвариантность. Получаем тождество

$$3100,985 + 509,485 = 2977,51 + 632,96; \quad 3610,47 = 3610,47.$$

Определим положение главных центральных осей по формулам (14.31):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{552,02}{3100,985 - 632,96} = -0,223; \quad \alpha_1 = -12^\circ 35';$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{552,02}{509,485 - 632,96} = 4,47; \quad \alpha_2 = 77^\circ 25'.$$

Это углы наклона главных центральных осей, отложенных от оси  $X$ .

Проверка дает  $|\alpha_1| + |\alpha_2| = 90^\circ$ .

Напомним, что положительные углы откладываются от оси  $X$  против хода часовой стрелки, а отрицательные — по ходу часовой стрелки. Положение главных центральных осей (ось максимум обозначена цифрой 1, а ось минимум — цифрой 2) показано на рис. 14.15.

Окончательно убеждаемся в правильности проведенных вычислений: имеет место равенство нулю центробежного момента инерции сечения  $I_{1,2}$  относительно главных центральных осей.

Используя выражение (14.27), определим:

$$I_{1,2} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha = \frac{2977,51 - 632,96}{2} \sin 2(12^\circ 35') - 552,02 \cos 2(12^\circ 35') = 0.$$

Проверка выполнена.

## Глава 15. ПРЯМОЙ ИЗГИБ

### 15.1. Классификация видов изгиба. Основные определения

*Изгибом* называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты относительно поперечных осей сечения. Если изгибающие моменты являются единственными внутренними силовыми факторами в поперечных сечениях, то стержень испытывает *чистый изгиб*. Если же изгибающие моменты возникают совместно с поперечными силами, то такой изгиб называется *поперечным* (рис. 15.1).

Введем некоторые понятия. Плоскость, в которой действуют внешние нагрузки, вызывающие изгиб стержня, называется *силовой плоскостью* (рис. 15.1, а), линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения — *силовой линией*.

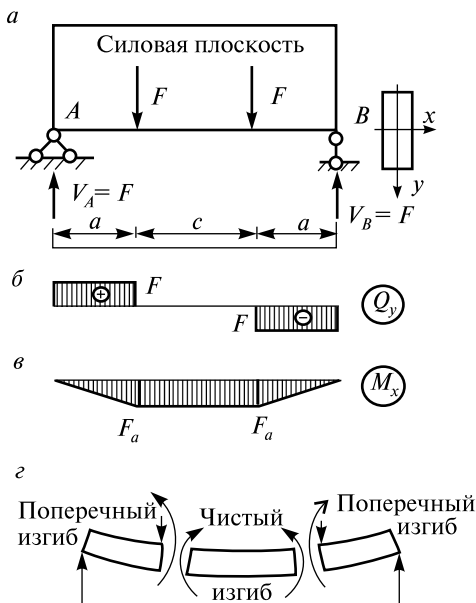


Рис. 15.1. Схема загрузки балки (а), когда в сечениях возникает чистый и поперечный изгиб (г). Показаны эпюры поперечных сил (б) и изгибающего момента (в)

Плоскость, проходящая через одну из главных центральных осей сечения и продольную ось бруса, называется *главной плоскостью*.

В зависимости от взаимного расположения силовой и главных плоскостей стержня (балки) изгиб может быть прямым или косым. Если силовая плоскость совпадает с одной из главных плоскостей, то стержень испытывает *плоский изгиб*, если же не совпадает — *косой изгиб*.

При прямом изгибе изогнутая ось стержня лежит в силовой плоскости, при косом — в плоскости, отличной от силовой.

Наблюдая за изгибом резиновой модели стержня, можно заметить, что часть его продольных волокон растягивается, а другая часть сжимается. Очевидно, между растянутыми и сжатыми волокнами стержня существует слой волокон, не испытывающих ни растяжения, ни сжатия. Этот слой называется *нейтральным*. Линия пересечения нейтрального слоя стержня с плоскостью его поперечного сечения называется *нейтральной*, или *нулевой линией*.

## 15.2. Нормальные напряжения при чистом изгибе

При изгибе метод сечений позволяет найти значения и направление изгибающего момента и поперечной силы в любом произвольном сечении, но не позволяет определить закон распределения напряжений по площади сечения.

Для установления этого закона рассмотрим деформацию стержня при изгибе и воспользуемся следующими допущениями:

- 1) справедлива гипотеза Бернулли: сечения, плоские и перпендикулярные к оси стержня до изгиба, остаются плоскими и перпендикулярными к оси после изгиба;
- 2) справедлива гипотеза о ненадавливании продольных волокон друг на друга;
- 3) справедлива гипотеза линейности деформаций;
- 4) по ширине сечения напряжения постоянные.

На рис. 15.2 изображена модель стержня, иллюстрирующая высказанные гипотезы. Она представляет собой набор жестких пластинок — «поперечных сечений», пространство между которыми заполнено «продольными волокнами», условно изображенными в виде упругих пружин. Деформация растяжения—сжатия продольных волокон в этой модели происходит за счет относительного перемещения и поворота соседних сечений.

Рассмотрим наиболее простой случай изгиба — чистый изгиб. Нанесем на поверхность бруса в пределах участка чистого изгиба сетку продольных и поперечных прямых (рис. 15.3, *a*). При изгибе продольные линии искривятся (изогнутся), а поперечные линии, оставаясь прямыми, повернутся на некоторый угол (рис. 15.3, *б*).

Выделим элемент длиной  $dz$  и найдем удлинение волокна, находящегося на расстоянии  $y$  от нейтрального слоя (рис 15.4, *a*). Этот элемент изображен в большем масштабе. Длина дуги  $OO_1$  равна  $dz$ , так как нейтральный слой при изгибе не меняет длины.

Обозначим радиус кривизны изогнутой оси бруса через  $\rho$ . Удлинение волокна  $AA_1$  будет равно разности длин дуг  $AA_1$  и  $OO_1$ , но длина дуги  $AA_1 = (\rho + y)d\phi$ , а дуги  $OO_1 = \rho d\phi$ .

Нейтральный слой, следовательно и ось стержня при изгибе лишь искривляется, не меняя первоначальную длину, т.е.  $\rho d\phi = dz$ .

Найдем относительное удлинение  $\varepsilon$  рассматриваемого волокна:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\phi - \rho d\phi}{\rho d\phi} = \frac{y}{\rho}. \quad (15.1)$$

Если предположить, что отдельные волокна не надавливают друг на друга, то каждое из них при изгибе будет находиться в состоянии простого растяжения или сжатия. В таком случае можно вос-

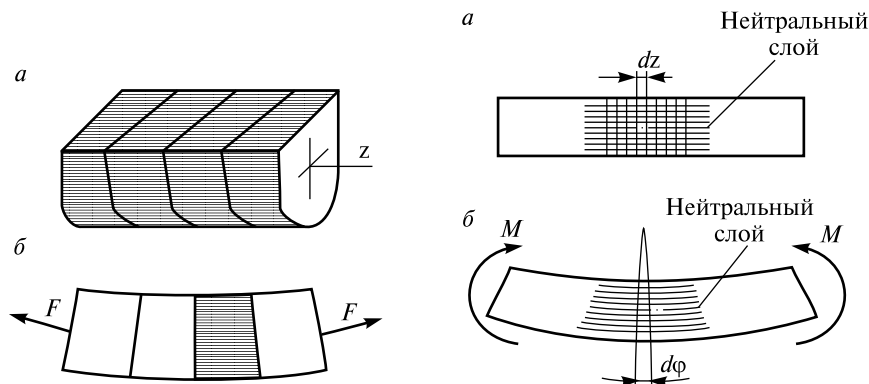


Рис. 15.2. Модель стержня, иллюстрирующая гипотезу плоских сечений (*a*) и гипотезу (*б*) ненадавливания продольных волокон

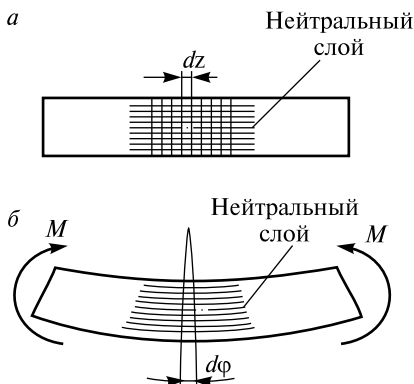


Рис. 15.3. Зона чистого изгиба, сетка продольных и поперечных прямых (*a*). Сечения остаются плоскими, повернутыми на некоторый угол (*б*)

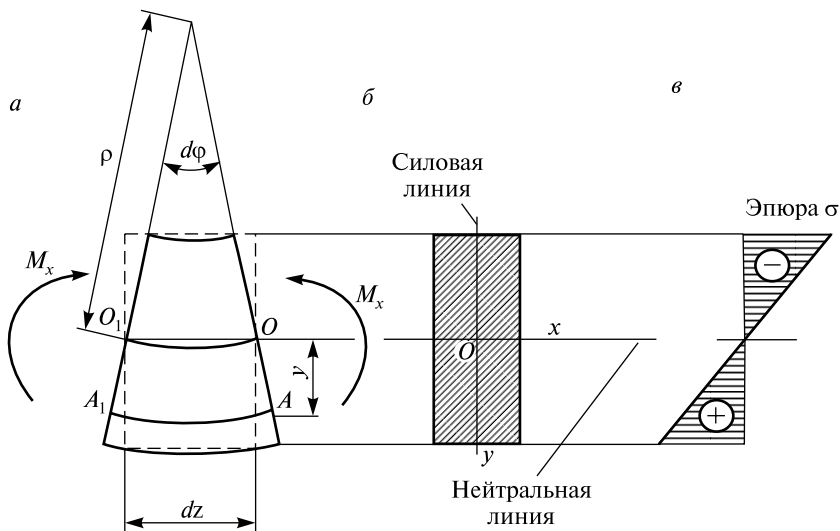


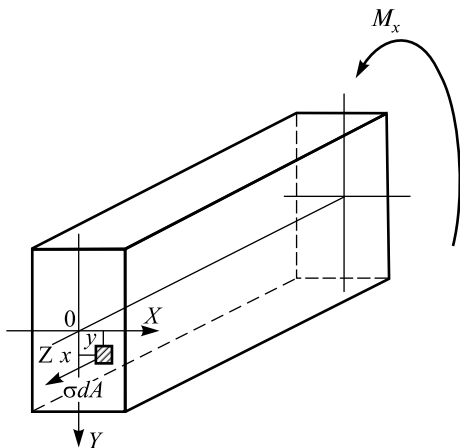
Рис. 15.4. Элемент длиной  $dz$  в зоне чистого изгиба (*а*), след силовой линии (*б*), эпюра нормальных напряжений (*в*)

пользоваться законом Гука и найти напряжение, возникающее в рассматриваемом волокне:

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho} y. \quad (15.2)$$

Полученная зависимость позволяет сформулировать вывод: при чистом изгибе напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону, т.е. чем дальше находится точка от нейтрального слоя, тем большие в ней возникают нормальные напряжения. Расстояние от любой точки поперечного сечения до нейтрального слоя стержня равно расстоянию от этой точки до нейтральной линии поперечного сечения. Следовательно, напряжение в какой-либо точке поперечного сечения стержня при изгибе будет пропорционально расстоянию от этой точки до нейтральной (нулевой) линии сечения, а значит, в точках, равноудаленных от нейтральной оси данного сечения, возникают равные по величине напряжения.

Установим положение нейтральной оси сечения (рис. 15.5).



Продольная сила, действующая в некотором сечении площади  $A$ , равна:

$$N_z = \int_A \sigma dA.$$

При чистом изгибе  $N_z = 0$ , т.е.

$$\int_A \sigma dA = 0,$$

или 
$$\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0.$$

Рис. 15.5. Изгибающий момент, возникающий на бесконечно малой площадке поперечного сечения балки

Так как  $E \neq 0$ , т.е. материал балки обладает определенной жесткостью и  $\rho \neq \infty$ , изогнутая ось балки имеет конечный радиус кривизны,  $\int_A y dA = 0$ . Этот

интеграл представляет собой статический момент площади сечения балки относительно нейтральной оси. Если статический момент площади относительно некоторой оси равен нулю, то эта ось является *центральной*. Таким образом, приходим к выводу, что нейтральная ось при чистом изгибе проходит через центр тяжести сечения.

Воспользоваться для определения нормальных напряжений формулой (15.2) невозможно, так как неизвестна кривизна изогнутого стержня. Получим формулу, которая позволила бы определить нормальные напряжения в каждой точке поперечного сечения через возникающий в сечении изгибающий момент.

Определим момент внутренних сил относительно нейтральной оси  $X$  сечения (рис. 15.5):

$$M_x = \int_A (\sigma dA) y.$$

Используя (15.2), получаем:

$$M_x = \int_A \left( \frac{E}{\rho} y dA \right) y = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA.$$

Интеграл, входящий в это выражение, есть ни что иное как момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси  $X$ :

$$\int_A y^2 dA = I_x.$$

Тогда

$$M_x = \frac{EI_x}{\rho}. \quad (15.3)$$

Выразив кривизну оси бруса  $1/\rho$  из (15.2):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{Ey},$$

и подставив ее в (15.3), получим

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y. \quad (15.4)$$

По этой формуле нетрудно вычислить нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения стержня.

Все величины, входящие в формулу нормальных напряжений (15.4), подставляются по модулю. Знак нормальных напряжений определяется положением точки в сечении относительно нейтральной оси и формой изгиба балки в данном сечении.

Из формулы (15.4) следует, что наибольшие нормальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max}. \quad (15.5)$$

Частное от деления главного момента инерции сечения на расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной от нее точки сечения называется *моментом сопротивления сечения изгибу* и обозначается  $W_x$  или  $W_{\text{изг}}$ :

$$W_x = I_x / y_{\max}. \quad (15.6)$$

Эту геометрическую характеристику часто называют *моментом сопротивления*. Момент сопротивления имеет размерность метры (сантиметры) кубические. Чем больше момент сопротивления, тем меньше напряжения, возникающие в поперечном сечении балки при данной нагрузке (изгибающем моменте) и тем большую нагрузку может выдержать балка, выполненная из какого-либо материала.

Таким образом,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}. \quad (15.7)$$

### 15.3. Моменты сопротивления сечений простейших фигур

Зная формулы для момента инерции относительно оси  $x$  и расстояние от центральной оси (нейтральной линии сечения) до наиболее удаленных точек сечения и используя формулу (15.6), получим выражения для определения моментов сопротивления простейших фигур.

*Прямоугольник:*

$$y_{\max} = h/2; \quad W_x = bh^2/6.$$

*Треугольник:*

$$y_{\max} = 2h/3; \quad W_x = bh^2/24.$$

*Круг:*

$$y_{\max} = D/2; \quad W_x = \pi D^3/32.$$

*Кольцо:*

$$y_{\max} = D/2; \quad W_x = (\pi(D^3)/32)(1-c^4) \approx 0,1(1-c^4).$$

где  $c = d/D$  — отношение малого диаметра к большому.

Для прокатных сечений (двутавр, швеллер, уголок и т.п.) значения моментов сопротивления указаны в таблицах сортамента. Рассматривая распределение напряжений по высоте поперечного сечения, приходим к выводу, для получения экономичной конструкции материал балки следует распределять как можно дальше от



нейтральной линии. Идеальным в этом отношении является сечение, состоящее из двух узких прямоугольников (рис. 15.6). Реально такое сечение невыполнимо, так как эти два прямоугольника должны быть связаны между собой, чтобы представить одно целое сечение. Из практически встречающихся профилей наиболее близко к идеальному двутавровое сечение.

Кроме условия прочности, балка должна удовлетворять и условию экономичности. Наиболее экономичными являются такие формы поперечных сечений, для которых с наименьшей затратой материала

(или при наименьшей площади поперечного сечения) получается наибольшая величина момента сопротивления. Чтобы форма сечения была рациональной, необходимо по возможности распределять сечение подальше от главной центральной оси.

Например, двутавровая балка примерно в 7 раз прочнее и в 30 раз жестче, чем балка квадратного поперечного сечения той же площади и из того же материала.

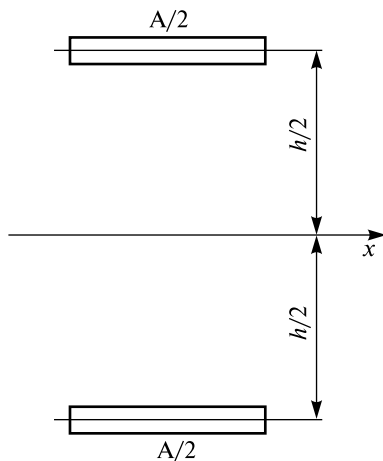


Рис. 15.6. Сечение, состоящее из двух прямоугольников

## 15.4. Расчет балок на прочность по нормальным напряжениям

Основной задачей расчета конструкции является обеспечение ее прочности в условиях эксплуатации.

Расчет транспортных строительных конструкций и сооружений, включая здания, мосты и другие, как правило, осуществляется *методом предельных состояний*.

Предельным считается состояние, при котором конструкция перестает удовлетворять эксплуатационным требованиям или требованиям, предъявляемым в процессе возведения сооружения.

Расчет механических узлов и деталей машиностроительных конструкций осуществляется *по методу допускаемых напряжений*.

При расчете конструкций на прочность встречаются три вида задач, различающихся формой использования условия прочности.

**Задачи по определению наибольших напряжений в поперечном сечении балки (проверочный расчет).** Условие таких задач заключается в определении максимальных напряжений: по известным размерам поперечного сечения балки, а следовательно, по моменту сопротивления, максимальному изгибающему моменту определяется нормальное напряжение методом предельного состояния или по допускаемым напряжениям:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{I_x} y_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq mR_{\sigma}; \\ \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}^n}{I_x} y_{\max} = \frac{M_{\max}^n}{W_x} \leq [\sigma],\end{aligned}\tag{15.8}$$

где  $M_{\max}$  и  $M_{\max}^n$  — максимальный расчетный и нормативный изгибающие моменты;

$m$  — коэффициент условий работы;

$R_{\sigma}$  и  $[\sigma]$  — расчетное сопротивление и допускаемое напряжение материала балки на растяжение или сжатие при изгибе.

**Задачи по подбору сечения балки (проектный расчет).** Условие этих задач заключается в подборе поперечного сечения балки по найденному изгибающему моменту  $M_{\max}$  и заданным расчетному сопротивлению или допускаемому напряжению:

$$\begin{aligned}W_x &\geq M_{\max} / mR_{\sigma}; \\ W_x &\geq M_{\max} / [\sigma].\end{aligned}\tag{15.9}$$

**Задачи по определению предельной или допускаемой для балки нагрузки (определение грузоподъемности).** Условие данной задачи заключается в определении предельного изгибающего момента по известным размерам поперечного сечения и заданным расчетному сопротивлению или допускаемому напряжению:

$$\begin{aligned}M_{\max} &\leq mR_{\sigma} W_x; \\ M_{\max} &\leq [\sigma] W_x.\end{aligned}\tag{15.10}$$

## 15.5. Балки рационального сечения

При выполнении проектного расчета проектировщику приходится следующую решать задачу: при заданном расчетном изгибающем моменте  $M_x^{\max}$  и расчетном сопротивлении материала  $R$  из условия прочности (15.8) необходимо найти требуемый момент сопротивления.

В зависимости от выбранной формы сечения требуемый момент сопротивления можно получить при различной площади сечения  $A$  и, следовательно, различном расходе материала на балку. Поэтому возникает вопрос о рациональной форме сечения, при которой площадь была бы, по возможности, наименьшей.

Для прямоугольника  $A = bh$ ,  $W_x = bh^2/6$  и отношение  $W_x/A = h/6$ . Из этих выражений найдем требуемую площадь:  $A = 6(W_x/h)$ . Для других форм сечений аналогично получим

$$A = \beta(W_x/h), \quad (15.11)$$

где  $\beta$  — коэффициент, полученный указанным путем и приведенный в табл. 15.1.

Из табл. 15.1 видно, что для прокатного двутавра  $\beta \approx 3$  (получено как среднее для различных номеров). Наименьшая площадь  $A_{\min} = 2(W_x/h)$  требуется для *идеального двутавра*, у которого площадь стенки стремится к нулю, а вся площадь сосредоточенна в полках — на уровне, где действуют напряжения  $\sigma_{\max}$ . На основании изложенного можно заключить, что при изгибе сечение тем рациональнее в отношении расхода материала, чем оно ближе к форме идеального двутавра, т.е. чем большая часть сечения удалена от нейтральной оси и находится в области действия наибольших напряжений  $\sigma$ .

Таблица 15.1

Требуемые площади сечений при заданном значении  $W_x/h$

Форма сечения	Круг	Прямоугольник	Кольцо	Двутавр	Идеальный двутавр
$A_i$	$8(W_x/h)$	$6(W_x/h)$	$4(W_x/h)$	$\approx 3(W_x/h)$	$2(W_x/h)$
$A_i/A_{\min}$	4	3	2	$\sim 1,5$	1

Для данной формы сечения из (15.11) следует, что теоретический расход материала будет тем меньше, чем больше  $h$ , т.е. чем выше сечение балки. Однако, как правило, высота балки ограничивается

многими дополнительными условиями проектирования и в таб. 15.1 принята одинаковой для всех форм сечений.

Добиться снижения веса балки можно также путем изменения размеров сечения по ее длине в соответствии с эпюрой изгибающих моментов, увеличивая сечение там, где моменты больше, и наоборот.

## 15.6. Примеры расчета балок на прочность по нормальным напряжениям

**Пример 15.1.** Для поперечного сечения балки, показанной на рис. 15.7, определить нормальное напряжение в точке  $K$ , а также построить эпюру нормальных напряжений, если изгибающий момент в рассматриваемом сечении  $M_x = -1,944$  кН·м.

*Решение.* Нейтральная ось  $x$  проходит через центр тяжести поперечного сечения. Центр тяжести треугольника находится на расстоянии  $1/3$  высоты от его основания.

Нормальное напряжение ( $\sigma_K$ ) в точке  $K$  определим по формуле (15.4), где  $y_K = 5$  см. Момент инерции треугольника относительно нейтральной оси

$$I_x = (bh^3)/36 = (12 \cdot 18^3)/36 = 1944 \text{ см}^4.$$

Поскольку изгибающий момент отрицательный, балка изгибается в этом сечении выпуклостью вверх. Следовательно, во всех точках, расположенных

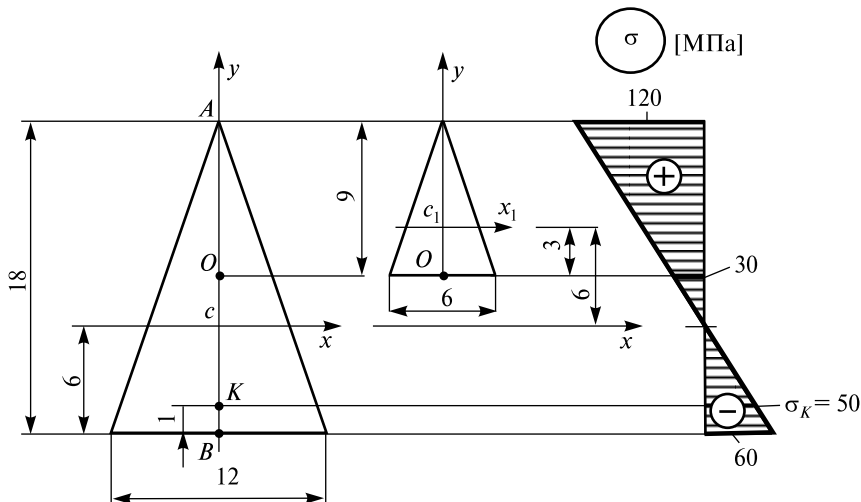


Рис. 15.7

выше оси  $x$ , имеет место растяжение, а в точках, расположенных ниже оси  $x$ , — сжатие. Поэтому  $\sigma_K = -(1,944 \cdot 10^3 / 1944 \cdot 10^{-8}) \cdot 5 \cdot 10^{-2} = -50$  МПа.

Наибольшее по абсолютной величине напряжение имеет место в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, в нашем случае — в точке  $A$ :

$$W_x = I_x / y_{\max} = 1944 / 12 = 162 \text{ см}^3 = 162 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Тогда  $\sigma_{\max} = \sigma_A = 1,944 \cdot 10^3 / 162 \cdot 10^{-6} = 120$  МПа.

Для построения эпюры нормальных напряжений определим  $\sigma$  в точке  $B$ :

$$\sigma_B = -(1,944 \cdot 10^3 / 1944 \cdot 10^{-8}) \cdot 6 \cdot 10^{-2} = -60 \text{ МПа}.$$

Эпюры нормальных напряжений показаны на рис. 15.7.

**Пример 15.2.** Для стальной балки кольцеобразного поперечного сечения определить наружный диаметр  $D$ , если отношение малого диаметра сечения к большому диаметру равно 0,7. Наибольший изгибающий момент равен 20 кН·м, а нормальные напряжения не должны превышать 80 МПа.

*Решение.* Условие прочности балки по нормальным напряжениям имеет вид

$$\sigma = M_{\max} / W_x \leq [\sigma],$$

где  $M_{\max}$  — наибольший изгибающий момент;

$W_x$  — момент сопротивления кольцеобразного сечения балки;

$[\sigma]$  — допускаемое напряжение.

Вычислим момент сопротивления кольцеобразного сечения:

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{\pi D^3}{32} [1 - (0,7)^4] = 0,0745 D^3.$$

Тогда из условия прочности найдем необходимый диаметр:

$$D = \sqrt[3]{(20 \cdot 10^3) / (0,0745 \cdot 10^6)} = 0,15 \text{ м} = 15 \text{ см}.$$

**Пример 15.3.** Для заданной балки (рис. 15.8,  $a$ ), определить наибольшую величину допускаемой интенсивности нагрузки  $g$  из условия, что нормальные напряжения в поперечном сечении балки не превысят 160 МПа. Сечение балки составлено из двух швеллеров № 16, длина пролета балки  $2a = 4$  м.

*Решение.* Построим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  показаны на рис. 15.8,  $b$ ,  $в$ . Наибольший изгибающий момент имеет место посередине пролета балки и равен

$$M_{\max} = gaa - ga \cdot 0,5a = 0,5ga^2.$$

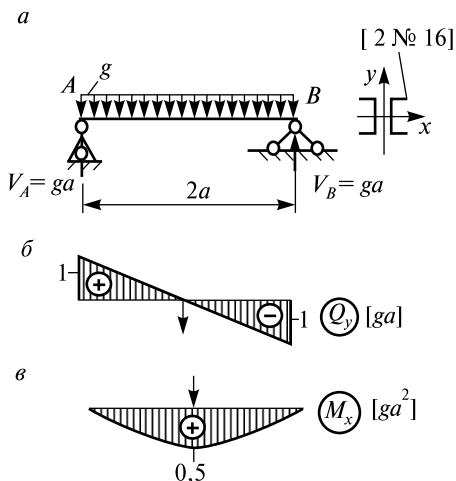


Рис. 15.8. Двухопорная балка, нагруженная равномерной распределенной нагрузкой (а), эпюры поперечных сил (б) и изгибающих моментов (в)

Из ГОСТ 8240-89 находим момент сопротивления для швеллера № 16, равный  $W_x = 93,4 \text{ см}^3$ . Тогда момент сопротивления сечения балки

$$W_x = 2W_x^{\text{ГОСТ}} = 2 \cdot 93,4 = 186,8 \text{ см}^3.$$

Воспользуемся условием прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x \leq [\sigma].$$

Подставляя значения изгибающего момента и момента сопротивления в условие прочности:  $0,5ga^2/186,8 \cdot 10^{-6} = 160 \cdot 10^6$ , найдем наибольшую допускаемую интенсивность нагрузки:

$$g = 186,8 \cdot 10^{-6} \cdot 160 \cdot 10^6 / 0,5 \cdot 4 = 14\,900 \text{ Н/м} = 14,9 \text{ кН/м}.$$

## 15.7. Напряжения при поперечном изгибе

Напомним, что при чистом изгибе в поперечном сечении возникает единственный внутренний силовой фактор — изгибающий момент, величина которого по всей длине участка неизменна. В случае поперечного изгиба (рис. 15.9) в сечениях бруса, помимо изгибающего момента, появляется поперечная сила, которая представляет собой равнодействующую касательных напряжений, возникающих в точках поперечного сечения стержня. Таким образом, поперечный изгиб сопровождается возникновением в поперечном сечении не только нормальных, но и касательных напряжений.

При чистом изгибе сечения поворачиваются относительно друг друга, оставаясь при этом плоскими и перпендикулярными к оси. Появление касательных напряжений приводит к дополнительным угловым смещениям, неодинаковым по сечению стержня, что обусловлено сдвигом. А это, в свою очередь, приводит к искривлению плоских до изгиба сечений и, следовательно, к нарушению гипотезы плоских сечений.

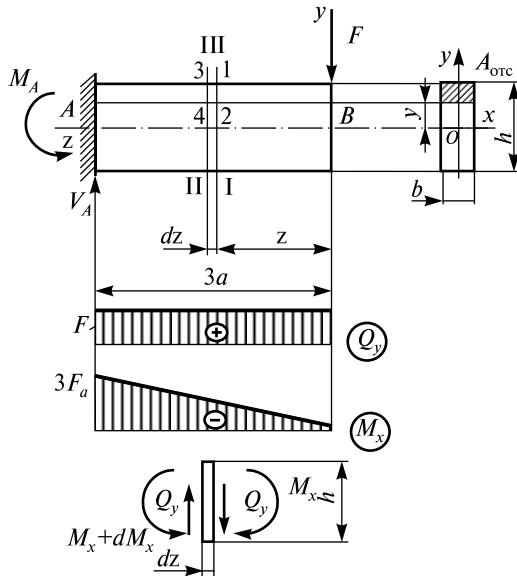


Рис. 15.9. Консольная балка, нагруженная сосредоточенной силой

Однако теоретические и экспериментальные исследования показали, что влияние искривления сечения на величину нормальных напряжений невелико, поэтому влиянием сдвигов на закон распределения нормальных напряжений пренебрегают и для поперечного изгиба считают гипотезу плоских сечений приемлемой. Вследствие этого нормальные напряжения при поперечном изгибе определяются по той же формуле, что и при чистом изгибе:

$$\sigma = (M_x / I_x) y.$$

Из закона парности касательных напряжений следует, что в продольных сечениях балки, параллельных нейтральному слою, также возникают касательные напряжения. Для данной точки балки касательное напряжение  $\tau_{zy}$ , возникающее на площадке поперечного сечения, равно касательному напряжению  $\tau_{yz}$ , возникающему на площадке продольного сечения, проведенного через ту же точку.

В том, что при поперечном изгибе касательные напряжения возникают как в поперечных, так и в продольных сечениях легко убе-

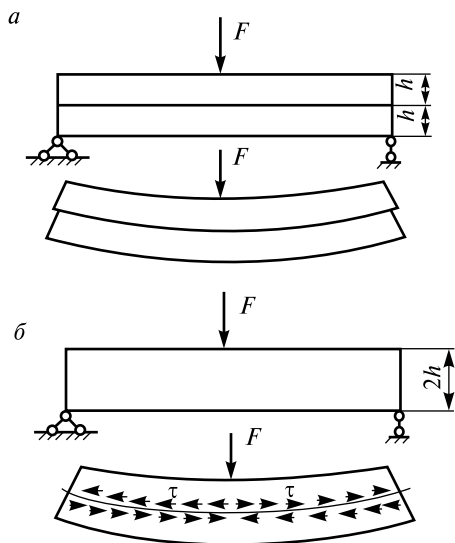


Рис. 15.10. Влияние сдвигов на деформацию при изгибе: два нескрепленных бруса (а), целый брус (б)

даться на простом примере. Представим себе две одинаково нагруженные двухопорные балки сосредоточенной силой  $F$  (рис. 15.10), одна из которых состоит из двух отдельных положенных друга на друга и ничем не скрепленных брусьев (рис. 15.10, а). Изгиб каждой из них будет происходить независимо друг от друга (влияние сил трения между брусьями не учитывается). Если же взять целый брус высотой  $2h$ , то в нейтральном слое появятся касательные напряжения  $\tau$ , препятствующие сдвигу верхней части относительно нижней (рис. 15.10, б). Для определения касательных напряжений в балке введем допущения:

- 1) касательные напряжения в поперечном сечении направлены параллельно поперечной силе;
- 2) во всех точках поперечного сечения, расположенных на одном и том же расстоянии от нейтральной оси, касательные напряжения одинаковые.

Вырежем из балки бесконечно малый элемент  $1-2-3-4$  (рис. 15.9). Для этого проведем два поперечных сечения на расстоянии  $z$  и  $z+dz$  от правого края, и продольное сечение, параллельное нейтральному слою и отстоящее от него на расстояние  $y$ . Покажем его в увеличенном масштабе (рис. 15.11).

Если в поперечном сечении с абсциссой  $z$  возникает изгибающий момент  $M_x$ , а с абсциссой  $z + dz$  — момент  $M_x + dM_x$ , то нормальные напряжения в площадках  $1-1'-2-2'$  и  $3-3'-4-4'$  выделенного элемента определяются выражениями:

$$\sigma_1 = (M_x / I_x) y; \quad \sigma_2 = ((M_x + dM_x) / I_x) y.$$



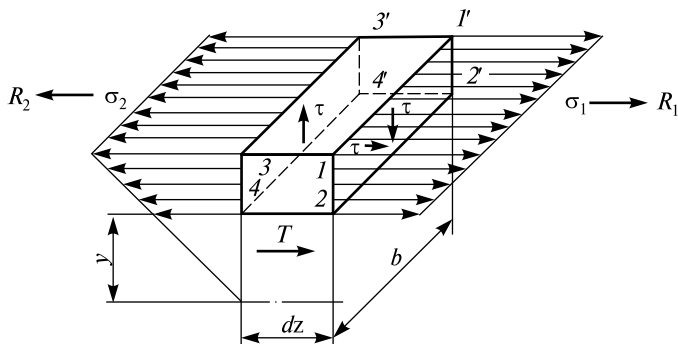


Рис. 15.11. Силы и напряжения, действующие на бесконечно малый элемент балки

Эпюры нормальных напряжений, действующих по этим площадкам, имеют вид трапеций. Кроме нормальных напряжений, на этих же площадках возникают и касательные напряжения. На левом торце выделенного элемента они направлены вверх, на правом — вниз. По грани 2—4—2'—4' действуют касательные напряжения  $\tau$ , по закону парности равные касательным напряжениям, действующим по вертикальным граням.

Составим уравнение равновесия отсеченного элемента балки. Спроектируем силы, действующие на элемент, на горизонтальную ось. Очевидно, касательные усилия, действующие по вертикальным граням, в указанное уравнение не войдут.

Касательное усилие по грани 2—4—2'—4' проектируется в истинную величину

$$T = \tau dz b.$$

Нормальное усилие, действующие по грани 1—2—1'—2', имеет равнодействующую

$$R_1 = \int_{A^{\text{отс}}} \sigma_1 dA = (M_x / I_x) \int_{A^{\text{отс}}} y dA = (M_x / I_x) S_x^{\text{отс}},$$

где  $S_x^{\text{отс}}$  — статический момент относительно оси  $x$  (нейтральной оси) отсеченной части сечения.

Нормальное усилие, действующие по грани 3—4—3'—4', имеет равнодействующую:

$$R_2 = \int_{A^{\text{отс}}} \sigma_2 dA = ((M_x + dM_x)/I_x) \int_{A^{\text{отс}}} y dA = ((M_x + dM_x)/I_x) S_x^{\text{отс}}.$$

Используя уравнение равновесия  $\sum x = 0$ , получим

$$R_1 - R_2 + T = 0,$$

или

$$(M_x/I_x)/S_x^{\text{отс}} - ((M_x + dM_x)/I_x)/S_x^{\text{отс}} + \tau dz b = 0.$$

После приведения подобных членов получим

$$\tau = (dM_x/dz) S_x^{\text{отс}} / (I_x b).$$

Используя дифференциальную зависимость

$$dM_x / dz = Q_y,$$

окончательно получим выражение для определения касательных напряжений в продольных сечениях балки:

$$\tau = Q S_x^{\text{отс}} / I_x b. \quad (15.12)$$

Полученную формулу принято называть **формулой Д.И. Журавского**. В ней  $Q_y$  — поперечная сила, действующая в рассматриваемом сечении;  $S_x^{\text{отс}}$  — статический момент отсеченной площади сечения  $A^{\text{отс}}$  относительно нейтральной оси (берется по модулю).

Статический момент может вычисляться для верхней или нижней части площади сечения, отсекаемой прямой, параллельной нейтральной оси и проведенной через точку, в которой определяется касательное напряжение;  $I_x$  — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;  $b$  — ширина сечения на уровне той точки, где определяется касательное напряжение.

Касательных напряжений с помощью формулы Журавского находят в следующем порядке:

- 1) рассматривают поперечное сечение балки;
- 2) для этого сечения определяют поперечную силу  $Q_y$  и момент инерции  $I_x$  поперечного сечения относительно нейтральной оси;

3) в поперечном сечении на уровне, для которого определяются касательные напряжения, параллельно нейтральной оси проводят прямую, отсекающую часть сечения. Длина отрезка этой прямой равна  $b$ , входящей в знаменатель формулы Журавского;

4) вычисляют статический момент  $S_x^{\text{отс}}$  отсеченной части сечения относительно нейтральной оси  $x$ , а затем по формуле Журавского находят искомое касательное напряжение  $\tau$ .

## 15.8. Прочность балок по касательным напряжениям

Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq m R_{\tau},$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}^n S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq [\tau], \quad (15.13)$$

где  $Q_{\max}$  и  $Q_{\max}^n$  — максимальная расчетная и нормативная поперечные силы;  
 $R_{\tau}$  и  $[\tau]$  — расчетное сопротивление и допускаемое напряжение материала балки на срез.

Наибольшее влияние на прочность балки в большинстве случаев оказывают нормальные напряжения, возникающие в ее поперечных сечениях. Поэтому в первую очередь выполняют расчет балки, исходя из условия прочности по нормальным напряжениям, и после этого делают проверку прочности по касательным напряжениям в соответствии с условием (15.13).

При расчете конструкций на прочность встречаются *три вида задач*, различающихся формой использования условия прочности:

а) задачи по определению наибольших напряжений в поперечном сечении балки (проверочный расчет). Расчет производится непосредственно по неравенству (15.13), исходя из условий задачи;

б) задачи по подбору сечения балки (проектный расчет);

в) задачи по определению грузоподъемности, т.е. предельной или допускаемой на балку нагрузки (определяется предельное значение поперечной силы).

## 15.9. Величина и роль касательных напряжений при поперечном изгибе

Определим закон распределения касательных напряжений в прямоугольном поперечном сечении (рис. 15.12). Поперечная сила в сечении равна  $Q$  и направлена вдоль оси  $Y$ .

На расстоянии  $y$  от нейтральной оси  $X$  проведем горизонтальную прямую и определяем статический момент отсеченного прямоугольника, относительно оси  $X$ . Площадь заштрихованного прямоугольника равна,  $(h/2 - y)b$ , а расстояние от его центра тяжести до оси  $X$  составит  $(h/2 + y)/2$ .

Таким образом,

$$S_x^{\text{отс}} = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Момент инерции сечения относительно центральной оси  $I_x = bh^3/12$ . Ширина поперечного сечения величина постоянная и равна  $b$ . Тогда формула Журавского дает касательные напряжения

$$\tau_y = \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Как видим, касательные напряжения меняются по высоте сечения по закону параболы (см. рис. 15.12). При  $y = h/2$  в ноль обращается площадь  $A^{\text{отс}}$  и, соответственно,  $S_x^{\text{отс}}$ . Таким образом, в верх-

ней и в нижней точках сечения  $\tau_y = 0$ . Наибольшего значения напряжения  $\tau_y$  достигает на уровне нейтральной линии, т.е. при  $y = 0$ :

$$\tau_{\max} = 3Q/(2bh) = 3Q/2A.$$

Как видим, максимальное касательное напряжение в полтора раза больше среднего касательного напряжения, которое мы получили бы, поделив силу  $Q$  на площадь всего поперечного сечения.

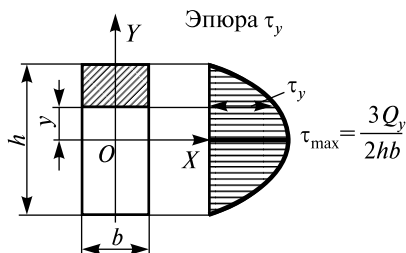


Рис. 15.12. Распределение касательных напряжений в прямоугольном сечении балки

С известным приближением формулу Журавского можно применять для вычисления касательных напряжений в балках при поперечных сечениях другой формы, отличных от узких прямоугольников.

Так для круглого сечения получим аналогичным способом эпюру  $\tau$  с максимальным значением напряжений на нейтральной оси

$$\tau_{\max} = 4Q/(3A).$$

Для кольцевого сечения

$$\tau_{\max} = 2Q/A.$$

### 15.10. Примеры расчета балок на прочность по касательным напряжениям

**Пример 15.4.** Для поперечного сечения балки (рис. 15.13, *a*) определить касательное напряжение в точке *K*, а также построить эпюру касательных напряжений, если в рассматриваемом сечении  $Q_y = 400$  кН,  $I_x = 8500$  см<sup>4</sup>.

*Решение.* Для определения касательных напряжений в точке *K* и построения эпюры касательных напряжений используем формулу Журавского. Составим выражение статического момента  $S_x^{\text{отс}}$  для сечения, проходящего через

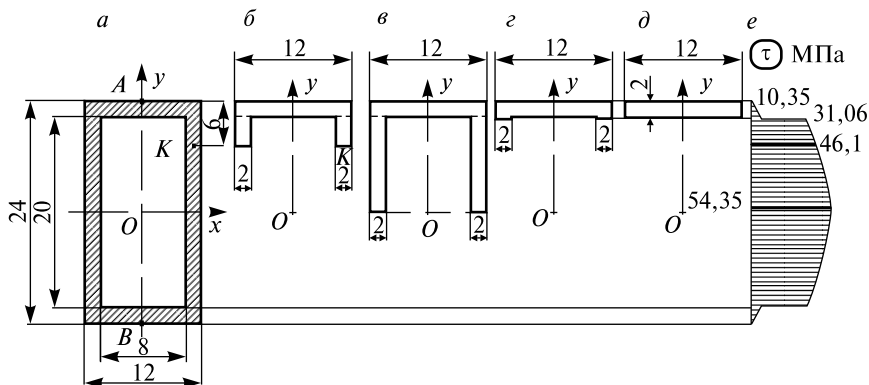


Рис. 15.13. Поперечное сечение балки (*a*), часть поперечного сечения балки, расположенной по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку *K* (*б*); половина поперечного сечения балки (*в*); к определению касательных напряжений в точках, принадлежащих стенке (*г*); в месте перехода от стенки к полке (*д*); эпюра касательных напряжений в поперечном сечении (*е*)

точку  $K$ . Как известно, статический момент относительно нейтральной оси равен произведению площади части фигуры, расположенной по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку параллельно нейтральной оси (рис. 15.13, б). Принципиально безразлично, брать ли статический момент рассматриваемой или всей остальной части сечения, так как по абсолютному значению они равны.

$$S_x^{\text{отс}} = 12 \cdot 2 \cdot 11 + 2(2 \cdot 4 \cdot 8) = 392 \text{ см}^3.$$

На уровне исследуемой точки  $K$  ширина поперечного сечения

$$b = 2 + 2 = 4 \text{ см.}$$

Тогда в точке  $K$  касательное напряжение

$$\tau = \frac{400\,000 \cdot 392 \cdot 10^{-6}}{8500 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 46,1 \text{ МПа.}$$

Определим величину касательных напряжений на уровне нейтральной оси (рис. 15.13, в).

Статический момент  $S_x^{\text{отс}}$  заданного сечения будет максимален и равен

$$S_x^{\text{отс}} = 12 \cdot 2 \cdot 11 + 2 \cdot (10 \cdot 2 \cdot 5) = 462 \text{ см}^3.$$

На уровне нейтральной оси ширина поперечного сечения

$$b = 2 + 2 = 4 \text{ см.}$$

Тогда касательное напряжение на уровне нейтральной оси достигает максимума:

$$\tau = \frac{400\,000 \cdot 462 \cdot 10^{-6}}{8500 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 54,35 \text{ МПа.}$$

В точке  $A$  (рис. 15.13, а) касательные напряжения равны нулю ( $\tau_A = 0$ ), так как вся площадь поперечного сечения расположена ниже этой точки, и статический момент отсеченной части относительно нейтральной оси равен нулю.

Определим касательные напряжения в месте перехода от стенки к полке поперечного сечения. В точках, принадлежащих стенке (рис. 15.13, з), статический момент площади полки относительно нейтральной оси  $S_x^{\text{отс}} = 0$ .

$$S_x^{\text{отс}} = 12 \cdot 2 \cdot 11 = 264 \text{ см}^3.$$

Касательные напряжения в этих точках составляют

$$\tau = \frac{400\,000 \cdot 264 \cdot 10^{-6}}{8500 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 31,06 \text{ МПа.}$$

В месте перехода от стенки к полке (рис. 15.13, *д*) ширина поперечного сечения меняется скачком ( $b = 12$ ), при этом статический момент отсеченной части остается прежним. Тогда касательные напряжения в полке

$$\tau = \frac{400\,000 \cdot 264 \cdot 10^{-6}}{8500 \cdot 10^{-8} \cdot 12 \cdot 10^{-2}} = 10,35 \text{ МПа.}$$

На основании полученных данных на рис. 15.13, *е* построена эпюра касательных напряжений для заданного сечения.

В заключении заметим, что в балках прямоугольного сечения максимальные касательные напряжения возникают в тех точках, где нормальные напряжения равны нулю (на нейтральной оси), и наоборот, в крайних точках сечения, где нормальные напряжения максимальны, касательные напряжения равны нулю.

**Пример 15.5.** Определить величину поперечной силы  $Q$  (рис. 15.14, *а*), при которой касательные напряжения  $\tau$  в поперечном сечении балки не будут превышать 40 МПа.

*Решение.* Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y^{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq [\tau].$$

Из этого выражения определим величину поперечной силы

$$Q_y^{\max} = \frac{[\tau] I_x b}{S_x^{\text{отс}}}.$$

Момент инерции поперечного сечения

$$\begin{aligned} I_x &= \pi D^4 / 64 (1 - c^4) = \\ &= 3,14 \cdot 16^4 / 64 [1 - (10/16)^4] = 2720 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Статический момент сечения относительно оси  $x$  составит (рис 15.14, *б*)

$$S_x^{\text{отс}} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{2} - \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{2}{3} (8^3 - 5^3) = 258 \text{ см}^3.$$

Тогда величина поперечной силы

$$\begin{aligned} Q_y^{\max} &= \frac{[\tau] I_x b}{S_x^{\text{отс}}} = \frac{40 \cdot 10^6 \cdot 2720 \cdot 10^{-8} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{258 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 253,02 \text{ кН.} \end{aligned}$$

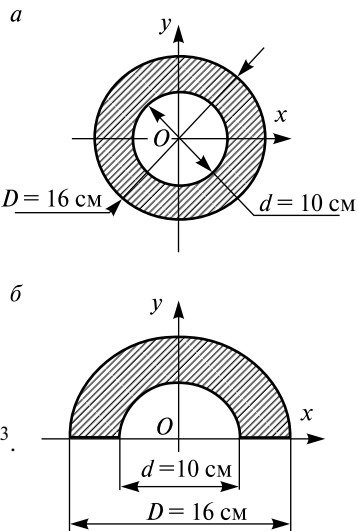


Рис. 15.14. Поперечное сечение балки (*а*), половина поперечного сечения (*б*)

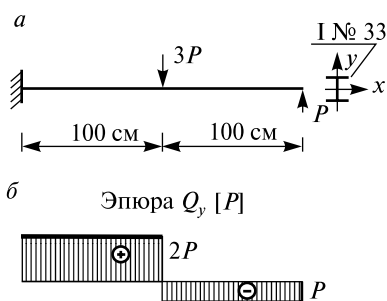


Рис. 15.15. Балка из двутавра (а), эпюра поперечных сил (б)

**Пример 15.6.** Для балки, изображенной на рис. 15.15, изготовленной из двутавра № 33, определить значение  $P$ , при котором допускаемые касательные напряжения не превысят 10 МПа.

**Решение.** Условие прочности по касательным напряжениям имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y^{\max} S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq [\tau].$$

Из этого выражения определим величину поперечной силы

$$Q_y^{\max} = \frac{[\tau] I_x b}{S_x^{\text{отс}}}.$$

Воспользуемся таблицей ГОСТ 8239-89. Для двутавра № 33 имеем:

$$I_x = 9840 \text{ см}^4; S_x^{\text{отс}} = 339 \text{ см}^3;$$

ширина переченого сечения  $b = 0,7 \text{ см}$ .

Из эпюры поперечных сил устанавливаем (рис. 15.15, б), что наибольшее значение поперечной силы равно  $2P$ . Тогда

$$P = \frac{[\tau] I_x b}{2 S_x^{\text{отс}}} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 9840 \cdot 10^{-8} \cdot 0,7 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 339 \cdot 10^{-6}} = 10150 \text{ кг}.$$

## 15.11. Расчет балок с учетом развития пластических деформаций

Формулы нормальных и касательных напряжений, полученные в предыдущих пунктах, справедливы только в том случае, когда изгиб происходит в пределах упругих деформаций.

Проследим за работой балки при увеличении нагрузки до такой степени, что напряжения перейдут через пределы пропорциональности и упругости. Для простоты заменим диаграмму растяжения стали, состоящую из нескольких участков, диаграммой идеально упругопластичного материала (см. рис. 13.9), т.е. *идеализированной диаграммой Прандтля*. Предполагая, что при  $\sigma < \sigma_T$  материал рабо-



тает линейно упруго. При  $\sigma = \sigma_T$  возникает текучесть, и далее продольное волокно балки в этой точке неограниченно деформируется при постоянном напряжении  $\sigma = \sigma_T$ . При таком предположении рассмотрим стадии, проходимые материалом балки вплоть до исчерпания несущей способности (рис. 15.16).

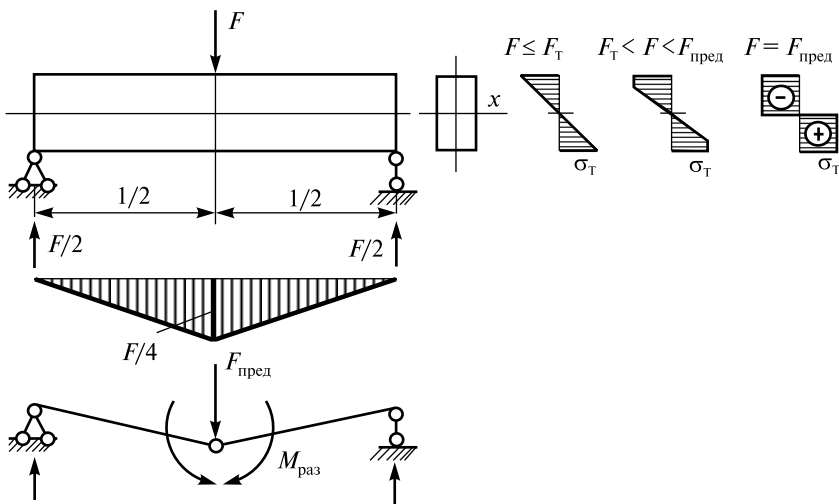


Рис. 15.16. Образование пластического шарнира в балке:  
 $F_T$  — нагрузка начала текучести;  $F_{пред}$  — нагрузка образования пластического механизма

При увеличении нагрузки крайние волокна в балке первыми достигнут предела текучести, после чего рост напряжений в них прекратится, а деформации будут продолжать расти. Соответствующий изгибающий момент  $M_T$  и силу  $F_T$ , находят из условия

$$\sigma_{max} = M_T / W_x = (F_T l / 4) / W_x = \sigma_T,$$

откуда

$$F_T = (4\sigma_T W_x) / l. \quad (15.14)$$

При дальнейшем увеличении силы наступает упругопластическая стадия работы балки ( $F_T \leq F \leq F_{пред}$ ). Эпюра  $\sigma$  в средней части превратится в ступенчатую эпюру с ординатами  $\sigma = \pm \sigma_T$ , это сечение будет работать в чисто пластической стадии.

Состояние сечения, когда во всех его точках развиваются пластические деформации, называется *пластическим шарниром*.

Момент в этом сечении достигает предельного значения — *разрушающего момента*, который обозначают  $M_{\text{пред}}$  и называют его *пластическим предельным моментом*.

Нагрузку, при которой происходит исчерпание несущей способности балки, т.е. фактически происходит ее разрушение, называют *разрушающей нагрузкой*.

Вычислим значение  $M_{\text{пред}}$  на примере сечения с одной осью симметрии (рис. 15.17). В упругой стадии эпюра  $\sigma$  линейна, нулевая линия проходит через центр тяжести поперечного сечения. При образовании пластического шарнира нейтральная ось  $x_1x_1$  не совпадает с центром тяжести сечения. В процессе деформирования нейтральная линия удаляется от центра тяжести, и в предельном состоянии она займет положение, которое можно установить из того условия, что при изгибе нормальная сила равна нулю:

$$N = N_p + N_{\text{сж}} = A_p \sigma_t - A_{\text{сж}} \sigma_t = 0,$$

значит,

$$A_p = A_{\text{сж}} = A/2. \quad (15.15)$$

При образовании пластического шарнира нулевая линия делит площадь поперечного сечения на две равновеликие части.

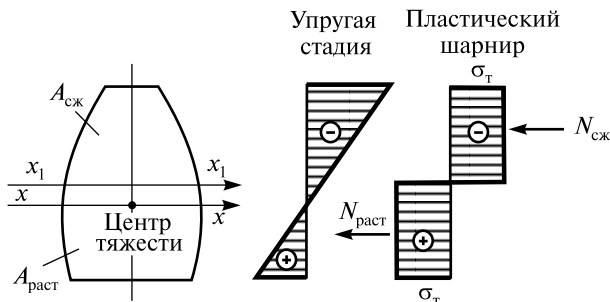


Рис. 15.17. Пластический шарнир в сечении балки с одной осью симметрии (ось  $x_1$ — $x_1$  делит площадь пополам)

Найдем значение предельного момента:

$$M_{\text{пред}} = \int_{A_p} \sigma_T dA \cdot y + \int_{A_{\text{сж}}} \sigma_T dA \cdot y = \sigma_T (S_{x_1}^p + S_{x_1}^{\text{сж}}), \quad (15.16)$$

где  $S_{x_1}^p = \int_{A_p} y dA$ ;  $S_{x_1}^{\text{сж}} = \int_{A_{\text{сж}}} y dA$  — статические моменты растянутой и сжатой

частей сечения относительно оси  $x_1x_1$ , взятые по абсолютному значению (оба положительные).

Геометрическую характеристику

$$S_{x_1}^p + S_{x_1}^{\text{сж}} = W_{\text{пл}} \quad (15.17)$$

иногда называют *пластическим моментом сопротивления сечения* в отличие от момента сопротивления в упругой стадии  $W_x$ . Тогда (15.16) можно записать в виде

$$M_{\text{пред}} = \sigma_T W_{\text{пл}}. \quad (15.18)$$

Рассмотрим балку прямоугольного сечения, для которой определим отношение предельного момента к моменту, при котором появится текучесть в наиболее напряженном волокне  $M_T$ :

$$\beta = \frac{M_{\text{пред}}}{M_T} = \frac{\sigma_T W_{\text{пл}}}{\sigma_T W_x} = \frac{W_{\text{пл}}}{W_x}. \quad (15.19)$$

Момент сопротивления для прямоугольного сечения имеет значение  $W_x = bh^2/6$ , по формуле (15.17) находим

$$W_{\text{пл}} = (bh/2)(h/4) + (bh/2)(h/4) = bh^2/4.$$

Подставляя в (15.19), получим  $\beta = 1,5$ .

Коэффициент  $\beta$  показывает, во сколько раз должна возрасти нагрузка от момента появления текучести в балке до полного истощения ее несущей способности.

В зависимости от формы поперечного сечения коэффициент  $\beta$  изменяется. Так, для двутаврового сечения он меньше, чем для прямоугольного, поэтому при расчете балок за пределом упругости необходимо учитывать форму поперечного сечения.

## 15.12. Расчет балок по нормальным и касательным напряжениям

**Пример № 15.7.** Подобрать двутавровое сечение балки из прокатной стали (ГОСТ 8239-89), загруженной, как показано на рис. 15.18, а, из условия прочности по нормальным напряжениям. Подбранное сечение проверить на прочность по касательным напряжениям. Исследовать напряженное состояние в точке  $K$  заданного поперечного сечения, расположенной на расстоянии  $y = h/4$  аналитическим способом.

В расчетах принять: коэффициент надежности по нагрузке (коэффициент перегрузки)  $n = 1,2$ ; коэффициент условий работы  $m = 1,0$ ; расчетное сопротивление при растяжении  $R = 210$  МПа; расчетное сопротивление на срез  $R_{ср} = 130$  МПа.

**Решение.** Определим опорные реакции. Предположим, что опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  направлены вверх. Горизонтальная реакция  $H_A$  в шарнирно-неподвижной опоре равна нулю, так как внешняя нагрузка перпендикулярна продольной оси балки, и на рис. 15.18, а реакция не показана. Реакции  $V_A$  и  $V_B$  определим из уравнений моментов, составленных относительно опор (точки  $A$  и  $B$ ), так как в этом случае реакции можно найти независимо друг от друга:

$$\begin{aligned}\Sigma M_A = 0, \quad & -V_B \cdot 4 + 50 \cdot 1 \cdot 4,5 + \\ & + 25 \cdot 2 - 15 = 0, \quad V_B = 65 \text{ кН};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_B = 0, \quad & V_A \cdot 4 - 25 \cdot 2 + 50 \cdot 1 \cdot 0,5 - \\ & - 15 = 0, \quad V_A = 10 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Знак плюс у реакций  $V_A$  и  $V_B$  указывает на то, что их действительное направление совпадает с предполагаемым.

После определения реакций  $V_A$  и  $V_B$  следует обязательно проверить правильность их вычисления, составив уравнение равновесия

$$\Sigma Y = 0, \quad 10 + 65 - 25 - 50 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

Построенные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов показаны на рис. 15.18, б, в.

Опасным сечением является сечение  $m-n$ , расположенное правее правой опоры (см. рис. 15.18 а), где  $Q = Q_{нб} = 50$  кН и  $M = M_{нб} = 25$  кН·м.

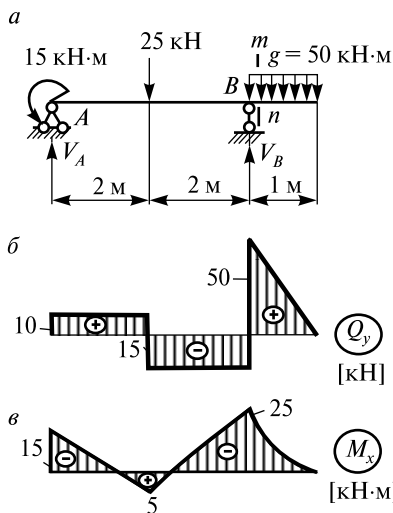


Рис. 15.18. К примеру 15.7. Схема загрузки балки (а), эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (б, в)

Вычислим расчетные значения наибольшего изгибающего момента и наибольшей поперечной силы:

$$M_{\text{расч}} = M_{\text{нб}} n = 25 \cdot 1,2 = 30 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_{\text{расч}} = Q_{\text{нб}} n = 50 \cdot 1,2 = 60 \text{ кН}.$$

Используя условие прочности по нормальным напряжениям, найдем требуемый момент сопротивления сечения:

$$W_x^{\text{треб}} = M_x^{\text{расч}} / m R_{\text{из}} = 30 \cdot 10^2 / 21 \cdot 1,0 = 142,86 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортамента (ГОСТ 8239-89) находим, что наиболее близким к требуемому будет момент сопротивления для двутавра № 18, для которого  $W_x = 143 \text{ см}^3$ .

Оценим его прочность:

$$\sigma_{\text{max}} = M_x^{\text{расч}} / W_x = 3000 / 143 \approx 209,79 \text{ МПа} < m R_{\text{из}} = 210 \text{ МПа}.$$

Полученное напряжение меньше расчетного сопротивления при растяжении примерно на 0,01 %. Это расхождение очень невелико, поэтому двутавр № 18 считаем подобранным.

По сортаменту ГОСТ 8239-89 для двутавра № 18 выпишем необходимые геометрические характеристики поперечного сечения:

$$h = 18 \text{ см}, b = 9 \text{ см}, d = 0,51 \text{ см}, t = 0,81 \text{ см},$$

$$I_x = 1290 \text{ см}^4, A = 23,4 \text{ см}^2, W_x = 143 \text{ см}^3, S_x^{\text{отс}} = 81,4 \text{ см}^3.$$

Заметим, что при подборе сечений прокатных балок по сортаменту возможны и более значительные отклонения от расчетного сопротивления. При этом не всегда можно избежать указанных отклонений ввиду ограниченности различных сечений в сортаменте и приходится подбирать сечения с увеличенным запасом прочности.

Проверим прочность балки по касательным напряжениям.

С учетом заданной интенсивности поперечной нагрузки и размеров балки  $Q_{\text{расч}} = 60 \text{ кН}$ .

Максимальные касательные напряжения возникают на нейтральной оси, их величина

$$\tau_{\text{max}} = \frac{60 \cdot 81,4}{1290 \cdot 0,51} = 7,42 \text{ кН/см}^2 \approx 74,2 \text{ МПа} < m R_{\text{сп}} = 130 \text{ МПа}.$$

Как видно, наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении балки невелики и условие прочности по касательным напряжениям также выполняется, следовательно, данный двутавровый профиль № 18 подобран окончательно, исходя из условий прочности по нормальным и касательным напряжениям.

Для построения эпюр  $\sigma$  и  $\tau$  изобразим сечение двутавровой балки как составленное из прямоугольников, с соответствующими размерами, взятыми из сортамента (рис. 15.19, а).

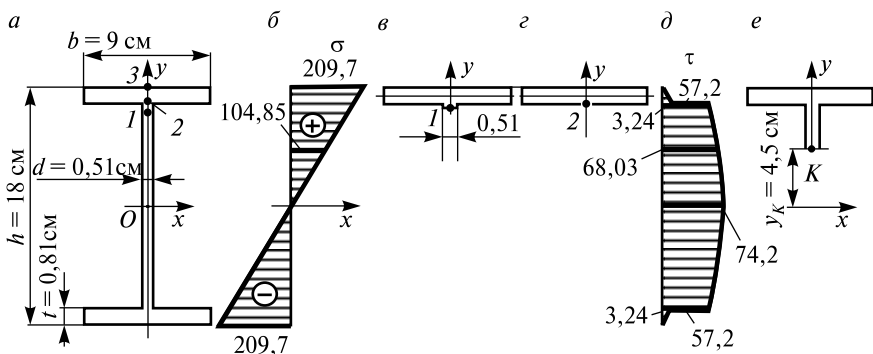


Рис. 15.19. Распределение нормальных и касательных напряжений для двутавровой балки: поперечное сечение балки (а); эпюры нормальных напряжений (б); к определению касательных напряжений в точках, принадлежащих стенке (в); в месте перехода от стенки к полке (г); эпюра касательных напряжений в поперечном сечении (д); часть поперечного сечения балки, расположенной по одну сторону от прямой, проведенной через исследуемую точку  $K$  (е)

Нормальные напряжения в сечение  $m-n$  для крайних точек двутавра определены ранее. Воспользуемся ими для построения эпюры нормальных напряжений (рис. 15.19, б). Нормальные напряжения в точках 1, 2, 3 будут растягивающими, так как в сечении действует отрицательный изгибающий момент, который вызывает растяжение верхней части балки и сжатие нижней.

Построим эпюру касательных напряжений для заданного сечения балки. Для этого необходимо знать  $\tau$  в некоторых характерных точках поперечного сечения:

- в точке  $O$ , принадлежащей нейтральной оси;
- в точках 1 и 2 — в месте сопряжения стенки с полкой, причем будем считать, что точки 1 и 2 расположены близко к границе полки, но лежат по разные ее стороны;
- в точке 3 — крайние волокна двутавра (наиболее удаленные от нейтральной оси).

Ограничимся вычислением вертикальной составляющей  $\tau$ , параллельной оси  $y$  (горизонтальную составляющую касательных напряжений в полке будем считать равной нулю). Касательные напряжения в точке  $O$  на уровне нейтральной оси ранее вычислены и равны  $\tau_{\max}$ .

Определим касательные напряжения в точке 1, принадлежащей стенке. Для этой цели вычислим статический момент площади полки относительно нейтральной оси (рис. 15.19, в):

$$S_x^{\text{отс}} = 9 \cdot 0,81 \cdot (18/2 - 0,81/2) = 62,66 \text{ см}^3.$$

Касательные напряжения в точке 1 будут равны:

$$\tau_1 = \frac{60 \cdot 62,66}{1290 \cdot 0,51} \approx 5,72 \text{ кН/см}^2 \approx 57,2 \text{ МПа.}$$

В месте перехода от стенки к полке ширина поперечного сечения меняется скачком (рис. 15.19, з), при этом статический момент отсеченной части остается прежним. Поэтому касательные напряжения в точка 2, принадлежащей полке, будут равны

$$\tau_2 = \frac{60 \cdot 62,66}{1290 \cdot 9} \approx 0,324 \approx 3,24 \text{ МПа.}$$

В верхней точке 3 касательные напряжения равны нулю, так как вся площадь поперечного сечения расположена ниже этой точки, а потому статический момент отсеченной части относительно нейтральной оси равен нулю. На основании полученных данных на рис. 15.19, д построена эпюра  $\tau$ .

*Исследование напряженного состояния в точке К, расположенной на расстоянии  $y = h/4$  (рис. 15.19, е).*

Выделим в окрестности точки К параллелепипед (элемент) с бесконечно малыми размерами. Точка К находится в растянутой зоне, и нормальные напряжения будут равны:

$$\sigma_K = (M_x / I_x) y_K = (3000/1290) \cdot 4,5 = 10,485 \text{ кН/см}^2 = \text{МПа.}$$

Определим касательные напряжения в точке К. Первоначально для этой цели вычислим статический момент фигуры (рис. 15.19, е).

$$S_x^{\text{отс}} = 9 \cdot 0,81(18/2 - 0,81/2) + (4,5 - 0,81) \cdot 0,51[(4,5 - 0,81)/2 + 4,5] = 74,59 \text{ см}^3.$$

Тогда

$$\tau_K = (60 \cdot 74,59) / (1290 \cdot 0,51) = 6,8025 \text{ кН/см}^2 = 68,03 \text{ МПа.}$$

Направление этих касательных напряжений совпадает с направлением поперечной силы.

Поперечная сила положительная. Касательные напряжения такого направления будут отрицательными. Касательные напряжения на горизонтальных площадках направлены в соответствии с законом парности, нормальные напряжения в этих площадках отсутствуют, т.е.  $\sigma_y = 0$ .

Вычислим значения главных нормальных напряжений:

$$\sigma_{1,2} = \sigma/2 \pm 1/2 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = (104,85/2) \pm 1/2 \sqrt{104,85^2 + 4 \cdot 68,03^2};$$

$$\sigma_1 = 52,425 + 85,88 = 138,305 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_2 = 52,425 - 85,88 = -33,455 \text{ МПа.}$$

Положение главных площадок (углы наклона внешних нормалей главных площадок или векторов  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  к оси  $x$ ) определим по формулам:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \tau / \sigma_1 = -68,03 / 138,305 = -0,4919; \quad \alpha_1 \approx -26^\circ 11';$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \tau / \sigma_2 = -68,03 / -33,455 = +2,0335; \quad \alpha_2 \approx +63^\circ 49'.$$

Положительный угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $x$  против часовой стрелки, а отрицательный — по ходу часовой стрелки.

Исходный элемент и элемент, ограниченный главными площадками, а также векторы напряжений, действующих на площадках этих элементов, показаны на рис. 15.20, *а*, *б*.

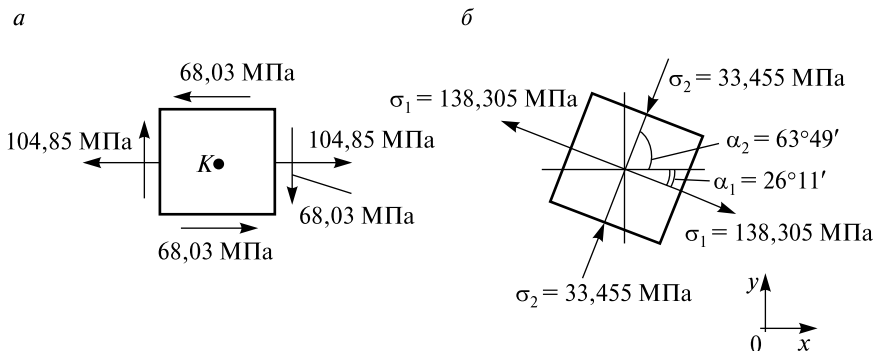


Рис. 15.20. Напряжения, действующие на площадке исследуемой точки *К* (*а*); главные площадки и действующие на них главные напряжения (*б*)

**Пример 15.8.** Проверить прочность балки (рис. 15.21, *а*), поперечное сечение которой показано на рис. 15.21, *б*, по нормальным и касательным напряжениям. В расчетах принять коэффициент надежности по нагрузке  $n = 1,2$ ; коэффициент условий работы  $m = 1,0$ . Расчетное сопротивление при растяжении  $R = 210$  МПа, расчетное сопротивление на срез  $R_{ср} = 130$  МПа.

**Решение.** Решение задачи начнем с определения опорных реакций и построения эпюр  $Q_y$  и  $M_x$ .

Предположим, что опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$  направлены вверх. Горизонтальная реакция  $H_A$  в шарнирно-неподвижной опоре равна нулю, так как внешняя нагрузка перпендикулярна продольной оси балки (на рис. 15.21, *а* реакция не показана).

Реакции  $V_A$  и  $V_B$  определим из уравнений моментов, составленных относительно опор (точек *А* и *В*).

$$\Sigma M_A = 0, \quad -V_B \cdot 2,4 + 9,6 \cdot 1,2 + 8 \cdot 1,2 \cdot 1,8 = 0, \quad V_B = 12 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad V_A \cdot 2,4 - 9,6 \cdot 1,2 - 8 \cdot 1,2 \cdot 0,6 = 0, \quad V_A = 7,2 \text{ кН}.$$



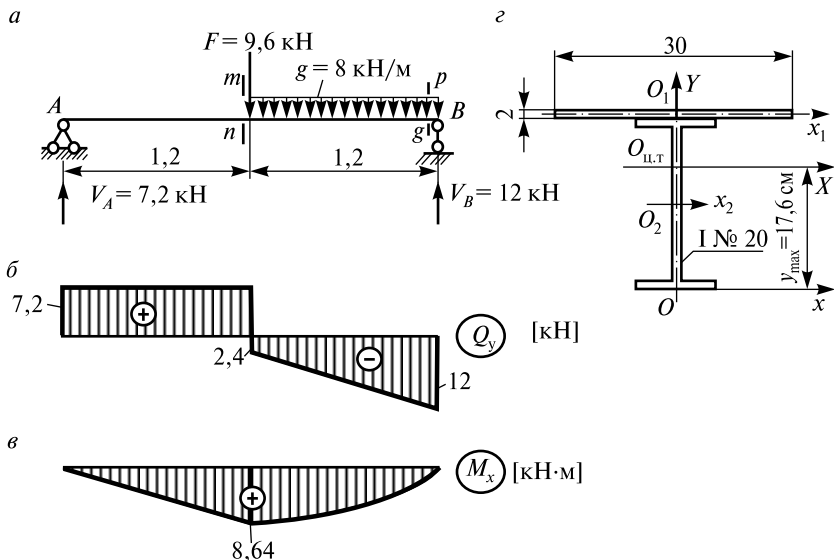


Рис. 15.21. К примеру 15.8: схема загрузки балки (а); поперечное сечение балки (б); эпюры поперечных сил (в) и изгибающего момента (г)

После определения реакций  $V_A$  и  $V_B$  проверим правильность их вычисления, составив уравнение равновесия:

$$\sum Y = 0, \quad 9,6 + 8 \cdot 1,2 - 12 - 7,2 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

Построенные эпюры поперечных сил и изгибающих моментов показаны на рис. 15.21, в, г.

Из анализа эпюр изгибающих моментов и поперечных сил устанавливаем, что  $M_{\text{нб}}$  имеет место в сечении  $m-n$ , где  $M = M_{\text{нб}} = 8,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$ , а поперечная сила достигает экстремального значения в сечении  $p-g$ , где  $Q = Q_{\text{нб}} = 12 \text{ кН}$ .

Вычислим расчетные значения наибольшего изгибающего момента и наибольшей поперечной силы для заданных сечений:

$$\text{для сечения } m-n: \quad M_{\text{расч}} = M_{\text{нб}} n = 8,6 \cdot 1,2 = 10,32 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{для сечения } p-g: \quad Q_{\text{расч}} = Q_{\text{нб}} n = 12 \cdot 1,2 = 14,4 \text{ кН}.$$

Определим положение центра тяжести, а также момент сопротивления сечения (см. рис. 15.21, б).

Заданное поперечное сечение имеет вертикальную ось симметрии  $Y$ , рассматривается как сочетание двух простейших фигур: прямоугольник  $2 \cdot 30 \text{ см}$  и двутавр № 20.

Определим положение центра тяжести поперечного сечения, принимая за исходные оси  $YOX$ .

Ординаты центров тяжести частей, составляющих сечение, а также их площади и моменты инерции для прямоугольника равны:

$$y' = 21 \text{ см}; \quad A^I = bh = 2 \cdot 30 = 60 \text{ см}^2;$$

$$I_x^I = bh^3/12 = 20 \text{ см}^4; \quad I_y^I = hb^3/12 = 4500 \text{ см}^4.$$

Для определения геометрических характеристик двутавра воспользуемся ГОСТ 8239-89:

$$y^{II} = 10 \text{ см}; \quad A^{II} = 26,8 \text{ см}^2; \quad I_x^{II} = 1840 \text{ см}^4; \quad I_y^{II} = 115 \text{ см}^4.$$

Определим ординату центра тяжести сечения

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum A} = \frac{A^I y^I + A^{II} y^{II}}{A^I + A^{II}} = \frac{60 \cdot 21 + 26,8 \cdot 10}{60 + 26,8} = 17,6 \text{ см}.$$

**Определение главных осевых моментов инерции.** Моменты инерции составного поперечного сечения определяются как алгебраическая сумма моментов инерции простейших фигур, составляющих это сечение:

$$I_x = \sum_{i=1}^n I_{x_i}; \quad I_y = \sum_{i=1}^n I_{y_i}$$

$$I_x = I_x^I + I_x^{II} = [I_{x1}^I + A^I a_1^2] + [I_{x2}^{II} + A^{II} a_2^2] =$$

$$= \left[ \frac{30 \cdot 2^3}{12} + 60 \cdot (21 - 17,6)^2 \right] + [1840 + 26,8(17,6 - 10)^2] = 4102,5 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y1}^I + I_{y2}^{II} = \left[ \frac{2 \cdot 30^3}{12} + 115 \right] = 4615 \text{ см}^4.$$

Момент сопротивления поперечного сечения

$$W_H = I_x / y_H = 4102,5 / 17,6 = 233,1 \text{ см}^3.$$

Поскольку материал балки одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, достаточно обеспечить выполнение условия прочности (15.8) в сечении с наибольшим изгибающим моментом (сечение  $m-n$ ).

$$\sigma_{\max} = M_{\text{расч}} / W_H \leq mR.$$

Из этого условия находим

$$\sigma_{\max} = 1\,032\,000/233,1 = 4427,28 \text{ Н/см}^2 = 44,2728 \text{ МПа}.$$

Прочность балки по нормальным напряжениям обеспечена.

**Проверим прочность балки по касательным напряжениям.** С учетом заданной интенсивности поперечной нагрузки и размеров балки поперечная сила достигает максимального значения расчетной нагрузки в сечении  $p-g$  и ее величина равна  $Q_{\text{расч}} = 14,4 \text{ кН}$ .

Максимальные касательные напряжения возникают на уровне нейтральной оси. Определим их величину. Чтобы воспользоваться выражением касательных напряжений, определим статический момент поперечного сечения относительно нейтральной оси. Рассмотрим нижнюю отсеченную часть поперечного сечения (рис. 15.22).

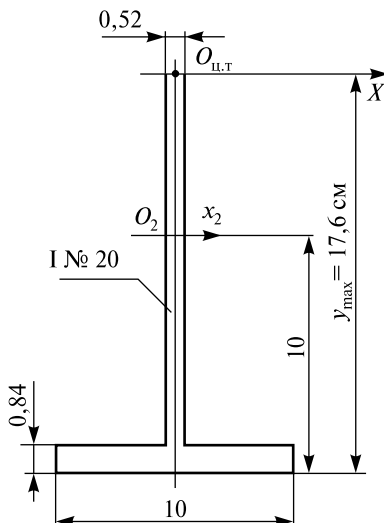


Рис. 15.22

$$S_x = 10 \cdot 0,84(17,6 - 0,84/2) + (17,6 - 0,84) \cdot 0,52((17,6 - 0,84)/2) = 144,31 + 73,03 = 217,34 \text{ см}^3.$$

Тогда максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{14,4 \cdot 217,34}{4102,5 \cdot 0,52} = 1,467 \text{ кН/см}^2 = 14,67 \text{ МПа} < mR_{\text{ср}} = 130 \text{ МПа}.$$

Как видно, наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении балки невелики и условие прочности по касательным напряжениям также выполняется. Следовательно, данное сечение удовлетворяет условиям прочности по нормальным и касательным напряжениям.

**Пример 15.9.** Для стальной балки, загруженной, как показано на рис. 15.23, а, и имеющей поперечное сечение, изображенное на рис. 15.23, б, определить значение действующих на балку нагрузок:

а) нагрузку  $g_{\text{упр}}$ , при которой нормальные напряжения достигают предела текучести  $\sigma_{\text{т}} = 240 \text{ МПа}$  в наиболее удаленных от нейтральной оси точках опасного поперечного сечения;

б) предельную нагрузку  $g_{\text{пр}}$ , соответствующую предельному равновесию балки, при котором в опасном сечении образуется пластический шарнир.

Для сравнения вычисленных нагрузок определить их отношение  $\beta = g_{\text{пр}}/g_{\text{упр}}$ .

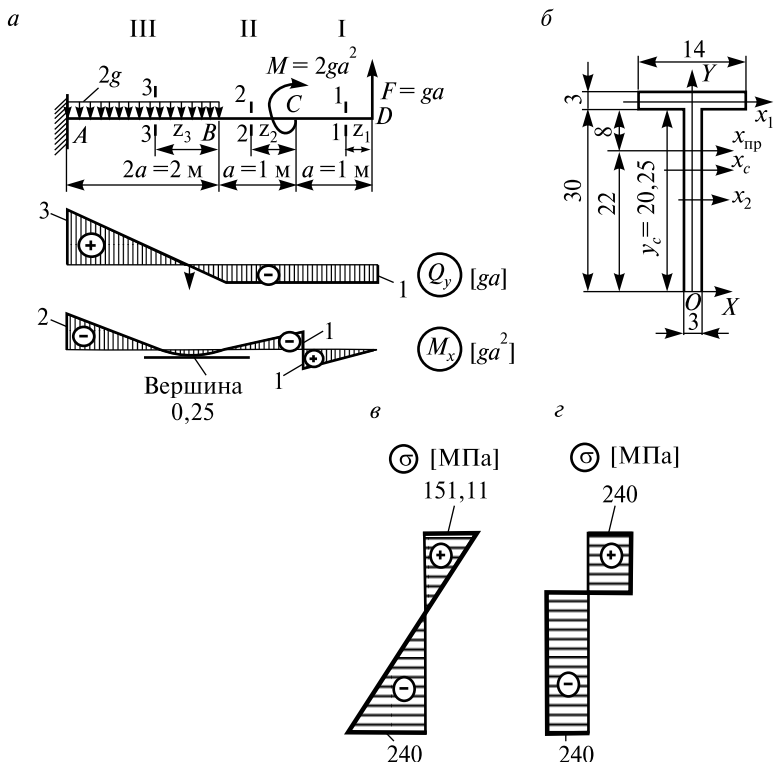


Рис. 15.23. Схема загрузки балки, эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (а); поперечное сечение балки (б); эпюры нормальных напряжений (в, г)

**Решение.** Строим эпюры поперечных сил  $Q_y$  и изгибающих моментов  $M_x$ , рассматривая правые отсеченные части.

Построенные эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  приведены на рис. 15.23, а.

**Определение нагрузки  $g_{\text{упр}}$ .** Определим координаты центра тяжести поперечного сечения. Выберем вспомогательную систему осей координат  $OYX$  (рис. 15.23, б). Разобьем сечение на два прямоугольника — так, чтобы ось  $y$  совпала с осью симметрии, а оси  $x_1$  и  $x_2$  прошли через центр тяжести каждого прямоугольника. Тогда положение центра тяжести заданного сечения

$$y_c = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{14 \cdot 3 \cdot 31,5 + 3 \cdot 30 \cdot 15}{14 \cdot 3 + 30 \cdot 3} = 20,25 \text{ см.}$$

Вычислим момент инерции сечения относительно центральной оси  $x_c$ :

$$I_{x_c} = \frac{14 \cdot 3^3}{12} + 14 \cdot 3 \cdot (31,5 - 20,25)^2 + \frac{3 \cdot 30^3}{12} + 3 \cdot 30 \cdot (20,25 - 15)^2 = 14\,560 \text{ см}^4;$$

Момент сопротивления поперечного сечения

$$W_x = I_{x_c} / y_{\max} = 14\,560 / 20,25 = 719 \text{ см}^3.$$

Постепенное возрастание интенсивности внешней нагрузки  $g$  приводит к тому, что при достижении в самых напряженных точках поперечного сечения напряжений равных пределу текучести, линейно-упругая стадия работы балки заканчивается.

Соответствующий изгибающий момент определим из условия

$$\sigma_{\max} = M_T / W_x \leq \sigma_T, \text{ откуда } M_T = \sigma_T W_x.$$

Из эпюры изгибающих моментов устанавливаем, что

$$M_{\max} = M_T = 2ga^2 = 2g_{\text{упр}} l^2 = \sigma_T W_x,$$

откуда

$$g_{\text{упр}} = \frac{\sigma_T W_x}{2 \cdot l^2} = \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 719 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1^2} = 86\,280 \text{ Н/м} = 86,28 \text{ кН/м}.$$

Построим эпюру нормальных напряжений. В упругой стадии работы балки эпюра  $\sigma$  линейна. Наибольшая величина нормальных напряжений  $\sigma = 240$  МПа, эти точки лежат в нижних волокнах поперечного сечения, а нулевая линия совпадает с центральной осью  $x_c$  (рис. 15.23, в).

**Определение нагрузки  $g_{\text{пр}}$ .** В общем случае при образовании пластического шарнира нейтральная линия смещается от центра тяжести сечения. Определим положение нейтральной оси  $x_{\text{пр}}$  в предельном состоянии. Ось  $x_{\text{пр}}$  должна делить поперечное сечение на две равные площади.

Положение нейтральной оси найдем из выражения, определяющего равенство сжатой  $A_{\text{сж}}$  и растянутой  $A_{\text{р}}$  частей площади поперечного сечения, т.е.

$$A_{\text{сж}} = A_{\text{р}} = A/2 = 66 \text{ см}^2.$$

Тогда  $66 = 6y_{\text{пл}}$  откуда  $y_{\text{пл}} = 22$  см (координата отсчитывается в осях  $OYX$ ).

Определим пластический момент сопротивления сечения как сумму статических моментов площадей сжатой и растянутой зон относительно нейтральной оси  $x_{\text{пр}}$ .

$$W_{\text{пл}} = S_x^{\text{р}} + S_x^{\text{сж}} = 22 \cdot 3 \cdot 11 + (14 \cdot 3 \cdot 9,5 + 3 \cdot 8 \cdot 4) = 1125 \text{ см}^3.$$

Тогда разрушающий изгибающий момент

$$M_{\text{пр}} = \sigma_{\text{т}} W_{\text{пл}} = 240 \cdot 1125 \cdot 10^{-6} = 270\,000 \text{ Н} \cdot \text{м} = 270 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Приравняв наибольший изгибающий момент (см. рис. 15.23), выраженный через  $g_{\text{пр}}$ , разрушающему моменту, найдем интенсивность предельной нагрузки:

$$2g_{\text{пр}} a^2 = 270; \quad 2g_{\text{пр}} l^2 = 270; \quad g_{\text{пр}} = 135 \text{ кН/м}.$$

Распределение нормальных напряжений в поперечном сечении показано на рис. 15.23, з.

Вычислим коэффициент  $\beta$  показывающий, во сколько раз должна возрасти нагрузка от момента появления текучести в балке до полного исчерпания ею несущей способности:

$$\beta = g_{\text{пр}} / g_{\text{упр}} = 135 / 86,28 = 1,56.$$

Условие задачи выполнено.

## Глава 16. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

### 16.1. Основные понятия

Кроме расчета на прочность, элементы конструкций обязательно рассчитывают и на жесткость.

Расчет на жесткость элемента конструкции, имеющего форму стержня (бруса), состоит в определении наибольших линейных и угловых перемещений его поперечных сечений при заданной нагрузке (рис. 16.1) и в сопоставлении их с допускаемыми перемещениями, которые зависят от назначения конструкции и от условий ее эксплуатации. Иными словами, *условие жесткости* можно выразить неравенством

$$v_{\text{max}} \leq [v]; \quad \varphi_{\text{max}} \leq [\varphi], \quad (16.1)$$

где  $v_{\text{max}}$  и  $\varphi_{\text{max}}$  — максимальные линейное и угловое перемещение рассматриваемого сечения, возникающие под нагрузкой;

$[v]$  и  $[\varphi]$  — допускаемые значения соответствующих перемещений.

Допускаемые значения перемещений зависят от конкретных требований к конструкции и устанавливаются нормативными документами.

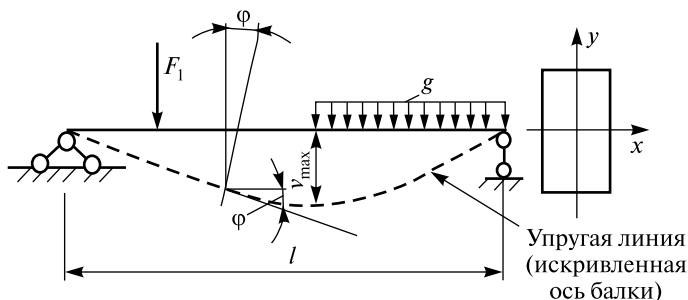


Рис. 16.1. Перемещения при малых прогибах

В большинстве случаев допускаемое значение прогибов определяется из выражения

$$[v] = l/m, \quad (16.2)$$

где  $l$  — длина пролета балки в сантиметрах;

$m$  — число, устанавливаемое нормами проектирования, лежит в пределах 300...1000; для перекрытий домов  $m = 500...600$ ; для подкрановых балок  $m = 600...700$ ; для мостов  $m = 700$ .

В качестве примера определим допускаемый прогиб для перекрытия студенческой аудитории. Пусть длина пролета равна 10 м (расстояние между стенами), тогда допускаемое значение прогиба  $[v] = 1000/500 = 2$  см.

Изложенное показывает, что изучение общих методов определения перемещений упругих систем является одной из важнейших задач сопротивления материалов.

## 16.2. Угловые и линейные перемещения при прямом изгибе

Рассмотрим консольную балку (рис. 16.2), нагруженную на свободном конце сосредоточенной силой  $F$ . Под действием этой силы балка изогнется и некоторая произвольная точка  $A$ , лежащая на оси балки в сечении, отстоящем на расстоянии  $z$  от свободного края, переместится в положение  $A_1$ , получив при этом два линейных перемещения: горизонтальное  $w$ , вертикальное  $v$ .

По гипотезе Бернулли сечение  $n-n$ , в котором лежит точка  $A$ , будучи плоским и перпендикулярным к оси бруса до изгиба, должно остаться плоским и перпендикулярным к оси бруса после изгиба (положение  $n_1-n_1$ ). Из рис. 16.2, а также видно, что угол поворота

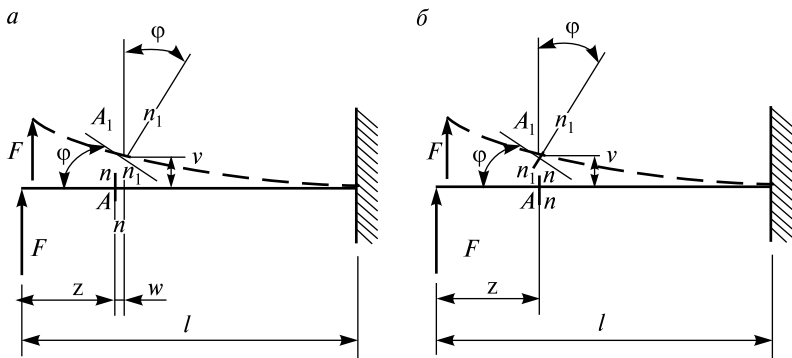


Рис. 16.2. Консольная балка, нагруженная на свободном конце (а); показаны линейные и угловые перемещения балки (б)

сечения  $\varphi$  равен углу, который составляет касательная к изогнутой оси балки в данной точке, с прямолинейной недеформированной осью балки.

Величины  $w$ ,  $v$ ,  $\varphi$  являются компонентами перемещений произвольного поперечного сечения балки.

Поскольку перемещения малы по сравнению с длиной балки, введем допущения:

1. При вычислении перемещений горизонтальным перемещением  $w$  пренебрегают ввиду его малости по сравнению с вертикальным перемещением, называемым *прогибом балки*. Упрощенно принимается, что каждая точка оси балки перемещается только по вертикали (рис. 16.2, б).

2. Тангенс угла наклона касательной к изогнутой оси в данной точке численно равен первой производной от  $v$  по  $z$ , но ввиду малости угла наклона касательной тангенс угла можно заменить значением угла, выраженным в радианах:

$$\operatorname{tg} \varphi = dv/dz = v' = \varphi. \quad (16.3)$$

3. Применима формула кривизны при изгибе:

$$1/\rho = M_x(z)/EI. \quad (16.4)$$

Эта формула показывает, что кривизна  $1/\rho$  изменяется по длине балки по тому же закону, по которому изменяется  $M_x/EI$ . Для балки



постоянного сечения эпюра кривизны  $1/\rho$  имеет такой же вид, как и эпюра моментов.

Если функция  $v = f(z)$  известна, то, определив прогибы в ряде точек, можно построить кривую прогибов (*упругую линию*, или *линию прогибов*) и найти наибольший прогиб, который позволит судить о жесткости балки.

### 16.3. Дифференциальное уравнение оси изогнутого бруса

*Уравнение, позволяющее определить вертикальное перемещение любой точки оси балки, т.е.  $v = f(z)$ , называется уравнением изогнутой оси балки.* Для того чтобы найти это уравнение, воспользуемся известной из дифференциального исчисления зависимостью между кривизной и производными  $dy/dz$ ;  $d^2y/dz^2$ :

$$1/\rho = \pm(d^2v/dz^2) / (1 + (dv/dz)^2)^{3/2} = \pm M_x(z)/(EI). \quad (16.5)$$

Интегрирование этого уравнения сопряжено с большими трудностями. Однако ввиду малости углов поворота и их тангенсов квадратами последних  $(dy/dz)^2 = \text{tg}^2\varphi$  можно пренебречь как величинами, весьма малыми по сравнению с единицей. Поэтому выражение (16.5) без большой погрешности может быть упрощено и записано в виде

$$1/\rho = \pm(d^2v/dz^2) = \pm M_x(z)/(EI). \quad (16.6)$$

Это уравнение носит название *приближенного дифференциального уравнения изогнутой оси балки*. Оно позволяет вычислять перемещения балок при заданных условиях загрузки.

Два знака в уравнении поставлены потому, что знак кривизны может не совпадать со знаком изгибающего момента. *Знак кривизны зависит от направления осей координат, а знак изгибающего момента зависит от того, где расположено растянутое волокно.*

Выбор знака зависит от принятой системы координат. На рис. 16.3, а, б показаны примеры выбора кривизны и момента для заданной системы координат.

Прогибы балки будем считать положительными, если точки ее оси смещаются при деформации, совпадая с направлением оси  $y$ . Углы поворота  $\varphi$  (для системы координат на рис. 16.3, в) положи-

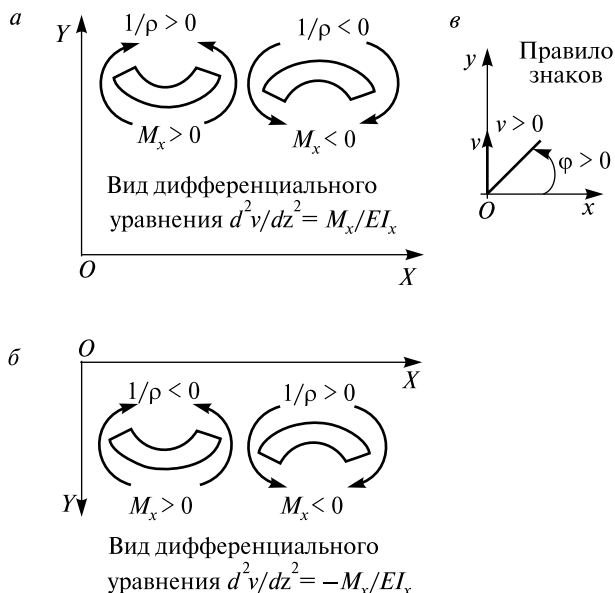


Рис. 16.3. Вид дифференциального уравнения от выбранной системы координат, при направлении оси  $y$  вверх (а) и при направлении оси  $y$  вниз (б); дано правило знаков для прогибов и углов поворота (в)

тельны, если поперечные сечения при деформации поворачиваются против хода часовой стрелки. Правило знаков для прогиба и угла поворота показаны на рис. 16.3, в. Прогибы выражаются в мерах длины, а углы поворота — в радианах.

Если жесткость балки постоянная ( $EI_x = \text{const}$ ), производные от уравнения прогиба имеют такой физический смысл:

$y(z)$  — прогиб;

$dy/dz = \varphi(z)$  — угол поворота;

$d^2y/dz^2 = M_x(z)/(EI_x)$  — кривизна;

$d^3y/dz^3 = Q_y(z)/(EI_x)$  — поперечная сила;

$d^4y/dz^4 = g(z)/(EI_x)$  — интенсивность распределенной нагрузки.

Для того чтобы получить аналитическое выражение прогибов и углов поворота, необходимо найти решение соответствующего дифференциального уравнения.

Записав выражение изгибающего момента функцией от  $z$  и проинтегрировав его один раз, получим

$$\varphi = dv/dz = \int (M_x(z)/EI_x) dz + C, \quad (16.7)$$

где  $C$  — произвольная постоянная интегрирования.

Проинтегрировав второй раз, будем иметь прогиб

$$v = \int dz \int (M_x(z)/EI_x) dz + Cz + D, \quad (16.8)$$

где  $D$  — вторая произвольная постоянная интегрирования.

Значения постоянных  $C$  и  $D$  определяют из граничных условий, т.е. условий опирания балки и условий на границах смежных участков. В любом случае имеется не менее двух граничных условий. Так, для двухопорной балки (рис. 16.4, а) прогибы на обоих шарнирных опорах равны нулю. Консоль имеет нулевой прогиб и нулевой угол поворота в заделке (рис. 16.4, б).

Определение перемещений методом непосредственного интегрирования уравнения упругой линии в случае балок с большим числом участков сопряжено со значительными трудностями. Они заключаются не в интегрировании дифференциальных уравнений, а в технике определения произвольных постоянных интегрирования — составлении и решении систем линейных алгебраических уравнений.

Если балка по условиям загрузки разбивается на  $n$  участков, то интегрирование дифференциальных уравнений для всех участков балки дает  $2n$  произвольных постоянных, причем для выполнения последней операции необходимо, кроме двух основных граничных условий, рассмотреть еще  $2(n-1)$  так называемых условий совместности (или неразрывности) перемещений на границах смежных участков.

Рассмотрим пример определения прогибов и углов поворота в балке с помощью метода непосредственного интегрирования.

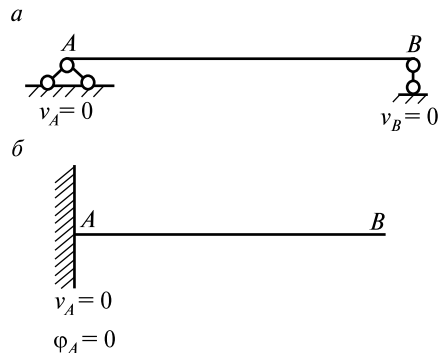


Рис. 16.4. Граничные условия для двухопорной (а) и консольной (б) балок

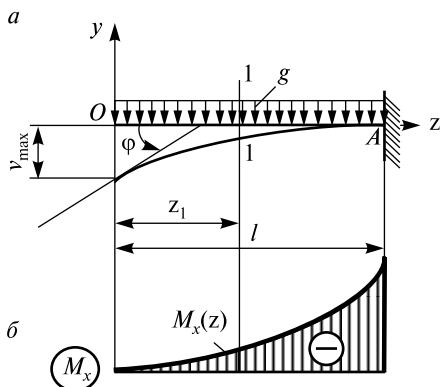


Рис. 16.5. Консольная балка, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой (а), и вид эпюры изгибающих моментов (б)

**Пример 16.1.** Определить аналитические выражения для  $v(z)$  и  $\phi(z)$  консольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $g$  (рис. 16.5), и вычислить значения этих величин на свободном конце.

*Решение.* Расположим начало координат на левом свободном конце консоли. Запишем аналитическое выражение изгибающего момента в сечении 1—1:

$$M_x(z) = -gz^2/2.$$

Для балки постоянного сечения полученное уравнение удобнее переписать в виде

$$EI_x y''(z) = M_x(z) = -gz^2/2.$$

Проинтегрируем это уравнение дважды для определения углов поворота и прогибов:

$$EI_x y'(z) = -gz^3/6 + C;$$

$$EI_x y(z) = -gz^4/24 + Cz + D.$$

Определим произвольные постоянные  $C$  и  $D$ , входящие в эти уравнения. Для этой цели используем граничные условия:

- 1) при  $z = l$  угол поворота равен нулю, т.е.  $0 = -gl^3/6 + C$ , откуда  $C = gl^3/6$ ;
- 2) при  $z = l$  прогиб равен нулю,  $0 = -gl^4/24 + (gl^3/6)l + D$ , откуда  $D = -gl^4/8$ .

Подставляя найденные значения в уравнения углов поворота и прогибов, окончательно получим:

$$EI_x y'(z) = -gz^3/6 + gl^3/6; \quad EI_x y(z) = -gz^4/24 + (gl^3/6)z - gl^4/8.$$

Анализируя полученные уравнения, устанавливаем, что наибольшее значения угла поворота и прогиба имеет место на свободном конце балки. Определим эти значения:

$$\phi_{\max} = y'(0) = gl^3/(6EI_x); \quad v_{\max} = y(0) = -gl^4/(8EI_x).$$

Угол получился положительным, следовательно, данное сечение балки поворачивается против хода часовой стрелки (рис. 16.5, а). Знак минус у прогиба свидетельствует о том, что свободный конец опускается.

Сравним полученные значения с выражениями произвольных постоянных  $C$  и  $D$ . Устанавливаем их равенство. Отсюда выявляется геометрический смысл произвольных постоянных интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки: постоянные  $C$  и  $D$  равны углу поворота и прогибу в начале координат, умноженным на жесткость  $EI_x$ .

## 16.4. Определение перемещений методом Максвелла—Мора

Метод Максвелла—Мора представляет собой универсальный способ для определения линейных и угловых перемещений в любых плоских и пространственных системах.

Этот метод основан на использовании *принципа возможных перемещений*.

Условимся (рис. 16.6) о стандартном обозначении перемещений. Проекцию полного перемещения  $CC_1$  на некоторое фиксированное направление  $n$ — $n$  будем обозначать  $\Delta_{пр}$ , где первый индекс ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) представляет номер искомого перемещения. Второй индекс  $p$  указывает причины, вызывающие деформации отдельных элементов системы и, как следствие, перемещение  $\Delta_{пр}$ . Это может быть нагрузка или изменение температуры (тогда пишут  $t$ ) и т.д.

Для определения перемещения  $\Delta_{пр}$  будем рассматривать данную систему в двух состояниях:

$p$  (грузовое состояние) и  $n$  (вспомогательное состояние, рис. 16.6, б).

В грузовом состоянии заданными считаются деформации отдельных бесконечно малых элементов стержней системы. Например, на рис. 16.7 это деформации удлинения  $d\Delta z_p$  изгиба  $d\varphi_p$  и сдвига  $\gamma_p dz$ , вызвавшие элементарные перемещения  $d\Delta_{пр}$ .

Если эти деформации являются упругими, то с

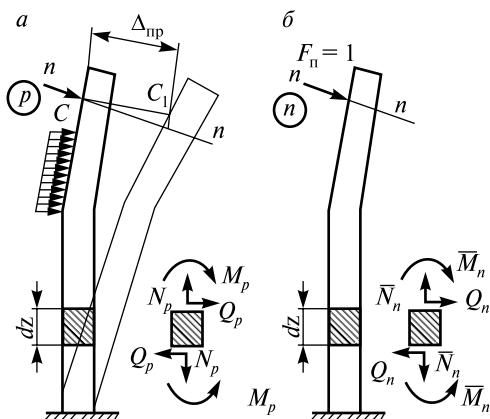


Рис. 16.6. Грузовое (а) и единичное (б) состояние в методе Максвелла—Мора

внутренними силами  $N_p$ ,  $M_p$ ,  $Q_p$  они связаны известными соотношениями:

$$\Delta dz_p = \frac{N_p dz}{EA}; \quad d\varphi_p = \frac{M_p dz}{EI}; \quad \gamma_p = \frac{kQ_p}{GA}, \quad (16.9)$$

где  $k$  — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений в сечении при изгибе.

Если найдем элементарное перемещение  $d\Delta_{\text{пр}}$ , то полное перемещение получим как определенный интеграл по всей длине стержней  $L$ :

$$\Delta_{\text{пр}} = \int_0^L d\Delta_{\text{пр}}. \quad (16.10)$$

Для определения  $d\Delta_{\text{пр}}$  используем вспомогательное состояние  $n$  (рис. 16.7, б), которое получается при загрузке системы силой  $F_n$ , прикладываемой и ориентируемой так, чтобы она совершала работу на искомом перемещении  $\Delta_{\text{пр}}$ . Для этого она направляется по линии  $n-n$ . Эта условная и безразмерная нагрузка в дальней-

шем принимается равной единице, поэтому внутренние силы от такого единичного нагружения обозначаются  $\bar{N}_n$ ,  $\bar{M}_n$ ,  $\bar{Q}_n$ , а само состояние  $n$  называется *единичным*.

Воспользуемся принципом возможных перемещений: для системы сил, находящейся в равновесии, суммарная работа этих сил на любых возможных перемещениях (бесконечно малых перемещениях, допускаемых связями системы) равна нулю.

Используем этот принцип для определения эле-

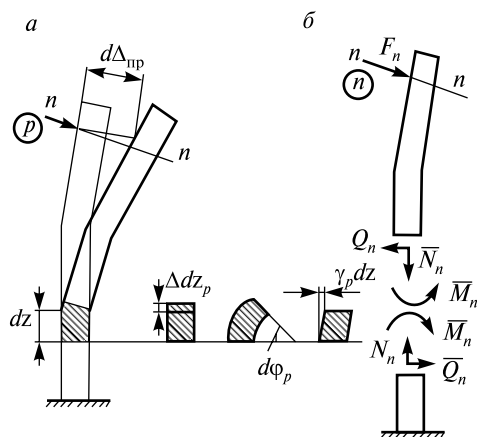


Рис. 16.7. Определение элементарного перемещения  $d\Delta_{\text{пр}}$ , вызванного деформацией одного элемента  $dz$ , в грузовом (а) и единичном (б) состояниях

ментарного перемещения  $d\Delta_{\text{пр}}$ , возникающего в состоянии  $p$  от деформации одного только элемента  $dz$  (рис. 16.7, а). Там же в состоянии  $n$  показаны внешняя сила  $F_n$  и уравнивающие ее внутренние силы  $\bar{N}_n$ ,  $\bar{Q}_n$ ,  $\bar{M}_n$ , очевидно, пропорциональные силе  $F_n$ :

$$N_n = F_n \bar{N}_n; \quad M_n = F_n \bar{M}_n; \quad Q_n = F_n \bar{Q}_n, \quad (16.11)$$

где  $\bar{N}_n$ ,  $\bar{M}_n$ ,  $\bar{Q}_n$  — внутренние усилия от  $F_n = 1$ .

На рис. 16.7 в состоянии  $n$  деформируемая часть материала элемента  $dz$  мысленно удалена и заменена воздействием внутренних сил  $N_n$ ,  $M_n$ ,  $Q_n$ , на соседние части стержня, рассматриваемые при применении принципа как твердые. Ввиду малости перемещений в состоянии  $p$  примем их в качестве возможных для сил состояния  $n$  (см. рис. 16.7).

Возможную работу этих сил вычисляют как произведение (с соответствующим знаком) усилия, взятого из состояния  $n$  на соответствующее перемещение из состояния  $p$ . В результате получим

$$F_n d\Delta_{\text{пр}} - (N_n dz_p + M_n d\phi_p + Q_n \gamma_p dz) = 0. \quad (16.12)$$

Разделив все на  $F_n$  и учитывая (16.12), найдем

$$\begin{aligned} d\Delta_{\text{пр}} &= \frac{1}{F_n} (N_n \Delta dz_p + M_n d\phi_p + Q_n \gamma_p dz) = \\ &= \bar{N}_n \Delta dz_p + \bar{M}_n d\phi_p + \bar{Q}_n \gamma_p dz. \end{aligned} \quad (16.13)$$

В формуле (16.13)  $\bar{N}_n = N_n / F_n, \dots$  как раз представляют упомянутые внутренние усилия в единичном состоянии от безразмерной силы  $F_n = 1$ .

Подставляя (16.13) в (16.10), получим *формулу Максвелла—Мора для упругих деформаций*:

$$\Delta_{\text{пр}} = \int_0^L \frac{\bar{N}_n N_p}{EA} dz + \int_0^L \frac{\bar{M}_n M_p}{EI} dz + \int_0^L \frac{k \bar{Q}_n Q_p}{GA} dz, \quad (16.14)$$

где  $\Delta_{\text{пр}}$  — искомое перемещение (линейное или угловое);

$\bar{N}_n, \bar{Q}_n, \bar{M}_n, N_p, Q_p, M_p$  — аналитические выражения продольной поперечной и сил и изгибающего момента соответственно от единичного и заданного воздействия (единичные и грузовые эпюры внутренних усилий);

$EA, GA, EI$  — жесткости поперечных сечений стержня соответственно на растяжение, сдвиг и изгиб;

$k$  — коэффициент, отражающий неравномерность распределения касательных напряжений по поперечному сечению; этот коэффициент зависит от формы сечения, например, для прямоугольника  $k = 1,2$ , для круга  $k = 10/9$ .

Направление единичного воздействия выбирается произвольно. Полученный по формуле (16.14) положительный результат указывает на то, что направление искомого перемещения совпадает с принятым направлением единичного воздействия либо противоположно принятому направлению, если получен отрицательный результат. В формуле (16.14) каждый интеграл четко выражает вклад соответствующей деформации в искомое перемещение. Обычно учитываются лишь основные виды деформации.

В конструкциях, работающих на изгиб, учитывают влияние изгибающих моментов, а поперечными силами пренебрегают. В комбинированных системах, где часть стержней работает на растяжение—сжатие, а часть — на изгиб, учитывают обе эти деформации. В фермах, где каждый стержень работает на растяжение—сжатие, в формуле (16.14) остается только первый интеграл.

В случаях, когда ось бруса прямолинейна и жесткость поперечного сечения в пределах отдельных участков постоянная, интегралы Максвелла—Мора, входящие в выражение (16.14) целесообразно вычислять, используя *правило Верещагина или формулу Симпсона*.

### ***Правило Верещагина***

Для балок и стержневых систем, состоящих из прямых стержней, внутренние усилия единичных состояний  $\bar{N}_n, \bar{Q}_n, \bar{M}_n$  являются линейными функциями на всем протяжении каждого стержня или на его отдельных участках. Внутренние усилия грузового состояния  $N_p, Q_p, M_p$  могут иметь произвольное очертание. При расчете балок и стержневых систем, работающих в основном на изгиб, влияние поперечных и продольных сил на перемещения несущественно и в большинстве задач не учитывается. Поэтому в формуле Максвелла—Мора можно с достаточной степенью точности использовать только слагаемые, содержащие изгибающие моменты:



$$\Delta_{np} = \int_0^L \frac{\overline{M}_n M^p}{EI} dz. \quad (16.15)$$

Рассмотрим эпюры изгибающих моментов  $M_p$  и  $\bar{M}_n$  в прямом стержне постоянной жесткости (рис. 16.8).  $EI = \text{const}$ . Грузовая эпюра  $M_p$  произвольна, а единичная  $\bar{M}_n$  линейная. Начало отсчета поместим в точке пересечения эпюры  $\bar{M}_n$  с осью  $Oz$ . При этом изгибающий момент  $\bar{M}_n$  изменяется по закону  $\bar{M}_n = zt\alpha$ . Тогда выр-

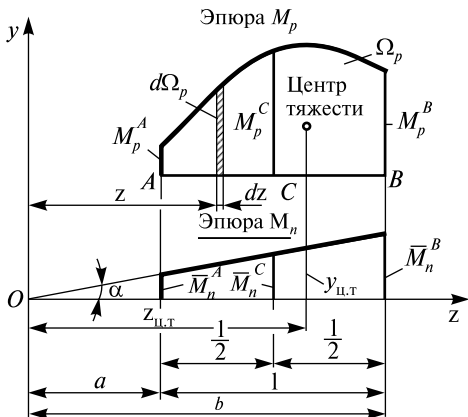


Рис. 16.8. Пояснения к вычислению интегралов Максвелла—Мора: по правилу Верещагина и с помощью формулы Симпсона

$$\Delta_{np} = \int_a^b \frac{\bar{M}_n M_p}{EI} dz = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EI} \int_a^b z M_p dz.$$

Величина  $M_p dz = d\Omega$  является элементом площади грузовой эпюры  $M_p$ . При этом сам интеграл можно рассматривать как статический момент площади эпюры  $M_p$  относительно оси  $Oy$ :

$$\int_a^b z M_p dz = \iint_{\Omega_p} z d\Omega = z_{\text{Ц.Т}} \Omega_p,$$

где  $\Omega_p$  — площадь эпюры  $M_p$ ;

 $z_{ц.т}^P$  — расстояние от оси  $y$  до центра тяжести эпюры  $M_p$ .

Учитывая, что  $z_{ц.т} \operatorname{tg} \alpha = y_{ц.т}$ , окончательно получим

$$\Delta_{\text{np}} = \int_a^b \frac{\bar{M}_n M}{EI} dz = \frac{1}{EI} y_{\text{ц.т}} \Omega_p, \quad (16.16)$$

где  $y_{ц.т}$  — ордината в линейной эпюре  $\bar{M}_n$ , взятая под центром тяжести площади нелинейной эпюры  $M_p$ .

По этому правилу интегралы Максвелла—Мора для отдельного участка стержневой системы вычисляются как *произведение площади криволинейной эпюры  $\Omega_p$  на ординату линейной эпюры  $y_{ц.т.}$* , взятую под центром тяжести площади  $\Omega_p$  (см. рис. 16.8). Если в пределах участка обе эпюры линейны, то безразлично, с какой из них брать площадь, а с какой — ординату.

Знак произведения  $\Omega_p y_{ц.т.}$  считается положительным, если площадь и ордината эпюр расположены по одну сторону от оси (базы), т.е. эпюры сопряжены, и знак минус, если эпюры не сопряжены, т.е. лежат по разные стороны от оси (базы).

Важно помнить, что «перемножение» эпюр возможно лишь на участке, ограниченном одной прямой той эпюры, с которой берется ордината  $y_{ц.т.}$ . Поэтому при вычислении перемещений по правилу Верещагина интеграл Максвелла—Мора по всей длине стержня надо заменить суммой интегралов по участкам, в пределах которых эпюра моментов от единичной нагрузки не имеет изломов (рис. 16.9).

В заключение сформулируем последовательность этапов вычисления перемещений по способу Верещагина:

1) построить эпюру изгибающих моментов от заданной нагрузки («грузовая эпюра моментов»);

2) снять с балки заданную нагрузку (но сохранить опоры) и приложить единичную силу в том сечении, где определяется перемещение (в направлении этого перемещения, если определяется прогиб, или единичную пару, если искомым является угол поворота);

3) построить эпюру изгибающих моментов от единичной нагрузки («единичная эпюра моментов»);

4) разбить эпюры от заданных нагрузок на отдельные площади  $\Omega_i$  и вычислить ординаты  $y_{ц.т.}$  единичной эпюры под центром тяжести этих площадей;

5) составить произведение  $\Omega_i y_{ц.т.}$  и просуммировать их.

### Формула Симпсона

В общем случае более сложных эпюр для вычисления интеграла Максвелла—

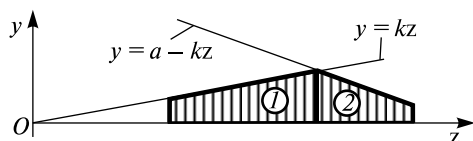


Рис. 16.9. К применению правила Верещагина

Мора удобно использовать формулу Симпсона. Формула Симпсона квадратурная, дающая точное значение определенного интеграла при подынтегральной функции — кубическом многочлене. В других случаях она дает приближенный результат.

Запишем интеграл Максвелла—Мора через координаты грузовой и единичной эпюр на произвольном участке стержневой системы (см. рис. 16.8). Обозначим через  $M_p^A$ ,  $M_p^B$ ,  $M_p^C$  ординаты грузовой эпюры в крайних  $A$ ,  $B$  и средней  $C$  точках участка, а  $\bar{M}_n^A$ ,  $\bar{M}_n^B$ ,  $\bar{M}_n^C$  — аналогичные ординаты линейной вспомогательной эпюры от  $n$ -го единичного воздействия на участке длиной  $l$ .

Тогда формула (16.15) запишется в виде

$$\Delta_{\text{пр}} = \int_0^l \frac{\bar{M}_n M_p}{EI} dz = \frac{1}{EI} \frac{l}{6} \left[ M_p^A \bar{M}_n^A + 4M_p^C \bar{M}_n^C + M_p^B \bar{M}_n^B \right]. \quad (16.17)$$

Если обе эпюры (грузовая и единичная) являются линейными, то интеграл Максвелла—Мора может быть вычислен по формуле

$$\Delta_{\text{пр}} = \int_0^l \frac{\bar{M}_n M_p}{EI} dz = \frac{1}{EI} \frac{l}{6} \times \\ \times \left[ 2M_p^A \bar{M}_n^A + 2M_p^B \bar{M}_n^B + M_p^A \bar{M}_n^B + M_p^B \bar{M}_n^A \right], \quad (16.18)$$

условно называемой формулой «перемножения трапеций».

В тех случаях, когда приведенные формулы используются как приближенные, вычисление интегралов Максвелла—Мора ведется обычно в два этапа: при заранее назначенных длинах участков и при длинах, в два раза меньших. Если результаты обоих вычислений совпадают с такой же точностью, с какой заданы значения жесткостей, то результаты считаются приемлемыми.

Использование правила Верещагина и формулы Симпсона рассмотрим на конкретных примерах.

**Пример 16.2.** Определить прогиб конца консольной балки (рис. 16.10, *а*), учитывая лишь деформации изгиба. Жесткость поперечного сечения балки постоянная.

**Решение.** Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки показана на рис. 16.10, *б*.

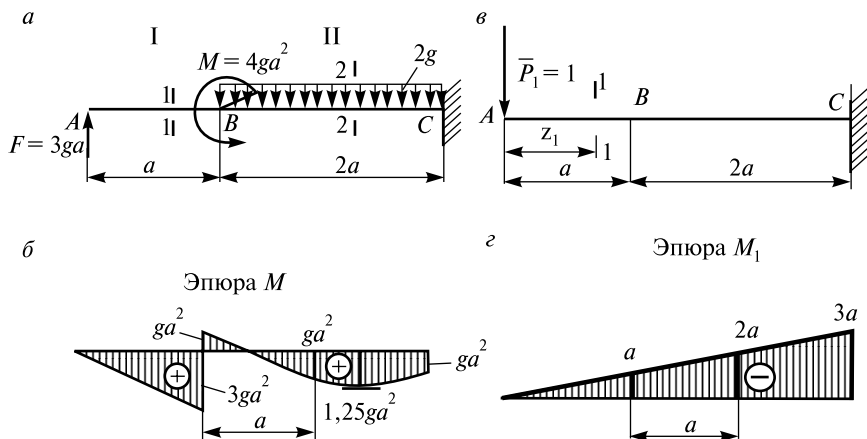


Рис. 16.10. Консольная балка (а); эпюра изгибающих моментов (б); загрузка балки единичной силой (в); единичная эпюра изгибающих моментов (г)

Построим единичную эпюру. Сняв с балки заданную нагрузку, приложим к концу консоли (точка А на рис. 16.10, в) вертикально направленную единичную силу  $\bar{P}_1 = 1$ . Направление единичной силы выберем произвольно, например, направим ее вниз, т.е. предполагаем, что точка А переместится вниз по отношению продольной оси балки.

При заданном нагружении (см. рис. 16.10, в) балка имеет один участок ( $0 \leq z_1 \leq 3a$ ). Единичный изгибающий момент для произвольного сечения 1—1 участка будет равен  $M_1 = -lz_1$ .

Подставляя в полученное уравнение прямой координаты начала и конца участка, построим единичную эпюру изгибающих моментов (рис. 16.10, г).

Для определения прогиба точки А надо «перемножить» эпюры от заданной нагрузки и от единичной силы. Проведем это.

Балка имеет два участка: АВ и ВС.

На участке АВ интеграл Максвелла—Мора вычислим по способу Верещагина.

$$\Delta_{AB} = -1/(EI_x)(1/2 \cdot 3ga^2a) \cdot (2/3a) = -ga^4/(EI_x).$$

Перемещение отрицательно, так как сопрягаемые эпюры лежат по разные стороны от базы (продольной оси бруса).

На участке ВС грузовая эпюра нелинейная и заранее неизвестно, где находится ее центр тяжести, вследствие чего использовать правило Верещагина на этом участке затруднительно. Для вычисления интеграла Максвелла—Мора на участке ВС воспользуемся формулой Симпсона. Применяя ее, найдем

$$\Delta_{BC} = 1/(EI_x)(2a/6) \cdot [(ga^2a) - 4(ga^2 \cdot 2a) - (ga^2 \cdot 3a)] = -3,33ga^4/EI_x.$$

Прогиб сечения  $A$  равняется сумме интегралов Максвелла—Мора на участках  $AB$  и  $BC$ :

$$\Delta_{AP} = v_A = -ga^4/(EI_x) - 3,33ga^4/(EI_x) = -4,33ga^4/(EI_x).$$

Знак минус у прогиба  $v_A$  указывает на то, что сечение переместится противоположно направлению единичной силы, т.е. вверх.

**Пример 16.3.** Определить угол поворота сечения  $D$  двухопорной балки с консолью (рис. 16.11,  $a$ ), учитывая лишь деформации изгиба. Жесткость поперечного сечения постоянная.

**Решение.** Эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки показана на рис. 16.11,  $b$ .

Построим единичную эпюру. Для этой цели, сняв с балки заданную нагрузку, приложим в сечении  $D$  единичный момент  $\bar{P}_1 = 1$ , направление которого выбираем произвольно, например, по ходу часовой стрелки (рис. 16.11,  $в$ ). Единичная эпюра изгибающих моментов показана на рис. 16.11,  $г$ .

Балка имеет три участка. Сопряжение эпюр проведем по участкам. На первом участке (участок  $AC$ ) для вычисления угла поворота, используем формулу Симпсона, так как эпюра  $M_p$  на участке интегрирования нелинейная:

$$\Delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_n M_p}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \frac{2a}{6} [0 + 4 \cdot 0,75ga^2(-0,25) + 0,5ga^2(-0,5)] = -\frac{1}{EI_x} \frac{1}{3} ga^3.$$

На втором участке (участок  $CB$ ) обе эпюры изгибающих моментов линейны. Поэтому интеграла Максвелла—Мора на этом участке можно вычислить по формуле трапеций. Применяя ее, найдем

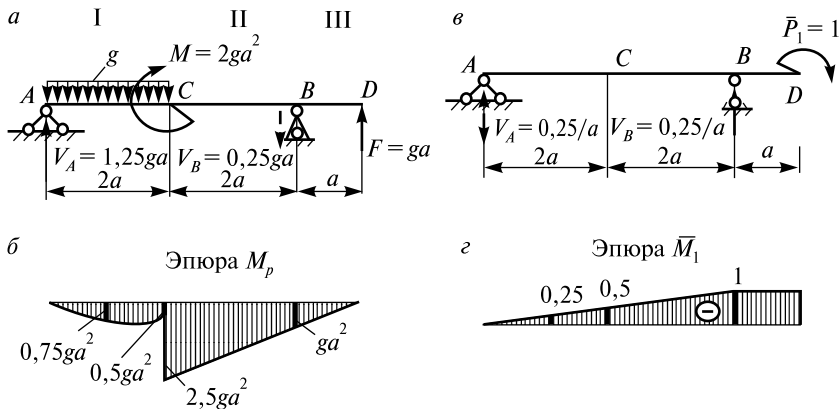


Рис. 16.11. Загруженная двухопорная балка с консолью заданной нагрузкой ( $a$ ); эпюра изгибающих моментов ( $b$ ); нагружение балки единичным моментом ( $в$ ); единичная эпюра изгибающих моментов ( $г$ )

$$\Delta = \int_0^l \frac{\bar{M}_n M_p}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{2a}{6} \left[ 2 \cdot 2,5ga^2(-0,5) + 2ga^2(-1) + 2,5ga^2(-1) + ga^2(-0,5) \right] =$$

$$= -\frac{1}{EI_x} \cdot \frac{15}{6} ga^3.$$

Полученные выражения отрицательны, потому что знаки ординат «перемножаемых» эпюр  $M_p$  и  $M_1$  противоположны.

На третьем участке (участок  $BD$ ) интеграл Максвелла—Мора вычислим способом Верещагина:

$$\Delta = -\frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} ga^2 a l = -\frac{3}{6EI_x} ga^3.$$

Получен отрицательный результат, потому что эпюры  $M_p$  и  $M_1$  лежат по разные стороны от базы (продольной оси бруса).

Угол поворота сечения  $D$  равен сумме интегралов Максвелла—Мора на трех участках (на участках  $AC$ ,  $CB$  и  $BD$ ):

$$\Delta_{1p} = \varphi_D = \sum_1 \int_0^l \frac{M_p \bar{M}_1}{EI_x} dz = -\frac{2}{6EI_x} ga^3 - \frac{15}{6EI_x} ga^3 - \frac{3}{6EI_x} ga^3 = -\frac{20}{6EI} ga^3.$$

Полученный знак минус указывает на то, что сечение  $D$  поворачивается в направлении, противоположном направлению единичного момента.

**Пример 16.4.** Для консольной рамы (рис. 16.12, *a*), определить вертикальное и горизонтальное перемещение точки  $A$ , а также угол поворота узла  $K$ . Жесткости стержней  $EI_x = \text{const}$ .

*Решение.* Поскольку при определении перемещений в рамах используется интеграл Максвелла—Мора, содержащий изгибающие моменты, построение эпюр  $Q_y$  и  $N_z$  необязательно.

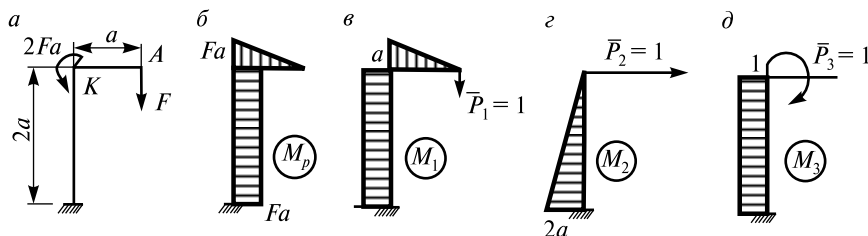


Рис. 16.12. Консольная рама (*a*); грузовая эпюра изгибающих моментов (*б*); единичные эпюры изгибающих моментов (*в*, *г*, *д*)

Построим грузовую эпюру изгибающих моментов (ее вид показан на рис. 16.12, б).

Для определения вертикального и горизонтального перемещений точки  $A$  в это сечение приложим единичные силы  $\bar{P}_1 = 1$  и  $\bar{P}_2 = 1$ , построим единичные эпюры. Их вид показан на рис. 16.12, в, г. «Перемножим» грузовую и единичные эпюры в пределах длины каждого участка.

Вертикальное перемещение точки  $A$ :

$$\Delta_{1p} = v_A^{\text{верт}} = \sum_1 \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} Fa a \cdot \frac{2}{3} a - \frac{1}{EI_x} Fa \cdot 2aa = -\frac{5Fa^3}{3EI_x}.$$

Горизонтальное перемещение точки  $A$ :

$$\Delta_{2p} = v_A^{\text{горизон}} = \sum_1 \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_2 M_p}{EI_x} dz = -\frac{1}{EI_x} Fa \cdot 2aa = -\frac{2Fa^3}{EI_x}.$$

Анализируя полученные выражения, устанавливаем, что точка  $A$  перемещается вверх и влево.

Для определения угла поворота узла  $K$  к этому узлу приложим единичный момент  $\bar{P}_3 = 1$  и построим единичную эпюру изгибающих моментов (рис. 16.12, д).

«Перемножая» грузовую и единичную эпюры, определим угол поворота узла  $K$ :

$$\Delta_{3p} = \varphi_K = \sum_1 \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_3 M_p}{EI_x} dz = -\frac{1}{EI_x} Fa \cdot 2a \cdot 1 = -\frac{2Fa^2}{EI_x}.$$

Сечение поворачивается против хода часовой стрелки.

**Пример 16.5.** Для шарнирно опертой рамы со стержнями различной жесткости (рис. 16.13, а) определить горизонтальное перемещение точки  $A$  и угол поворота сечения  $B$ .

*Решение.* Определим опорные реакции от действия заданных нагрузок.

$$\begin{aligned} \sum X &= 0; \quad g \cdot 2a - V_{B_x} = 0; \quad V_{B_x} = 2ga; \\ \sum M_A &= 0; \quad g \cdot 2aa - 2ga \cdot 2a + V_{B_y} a + ga^2 = 0; \quad V_{B_y} = ga; \\ \sum M_B &= 0; \quad V_{A_y} a - g \cdot 2aa + ga^2 = 0; \quad V_{A_y} = ga; \\ \sum Y &= 0; \quad (\text{проверка}) \quad ga - ga = 0. \end{aligned}$$

Построим грузовую эпюру изгибающих моментов (рис. 16.13, б).

Приложим в точке  $A$  горизонтальную единичную силу  $\bar{P}_1 = 1$  а к сечению  $B$  — единичный момент  $\bar{P}_2 = 1$  и построим единичные эпюры изгибающих мо-

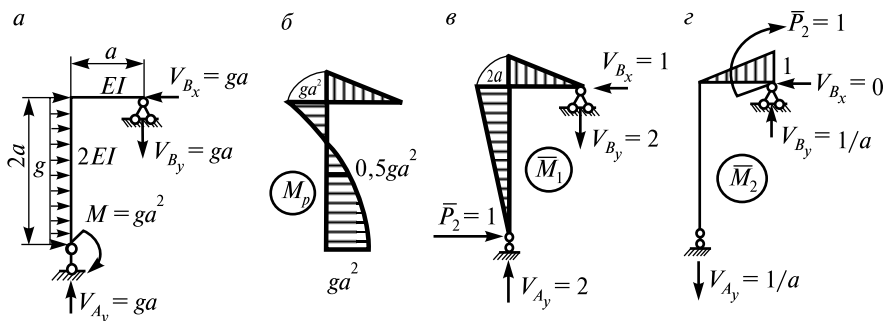


Рис. 16.13. Шарнирно опертая рама со стержнями различной жесткости (а); грузовая эпюра изгибающих моментов (б); единичные эпюры изгибающих моментов (в, г)

ментов (рис. 16.13, в, г). «Перемножив» эти эпюры на грузовую эпюру  $M_p$ , получим:

$$\Delta_{1p} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_1 M_p}{EI_x} dz = \frac{1}{2EI_x} \frac{2a}{6} \left[ 4 \cdot 0,5ga^2(-a) + ga^2 \cdot 2a \right] + \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} ga^2 a \cdot \frac{2}{3} a = \frac{2ga^4}{3EI_x};$$

$$\Delta_{2p} = \sum_i \int_0^{l_i} \frac{\bar{M}_2 M_p}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} ga^2 a \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{ga^3}{6EI_x}.$$

Точка А перемещается вправо, а сечение В поворачивается по ходу часовой стрелки.

## Глава 17. СДВИГ И КРУЧЕНИЕ

### 17.1. Чистый сдвиг

Кроме деформаций растяжения, сжатия или изгиба, материал нагруженного элемента конструкции может испытывать *деформацию сдвига*.

Вид напряженного состояния, при котором в окрестности исследуемой точки можно выделить такой элемент, на четырех гранях которого действуют только касательные напряжения, а две другие свободны от напряжений, называется *чистым сдвигом*.

Такой вид напряженного состояния возникает при кручении тонкостенной трубы (рис. 17.1, а). Вырежем из нее бесконечно малый



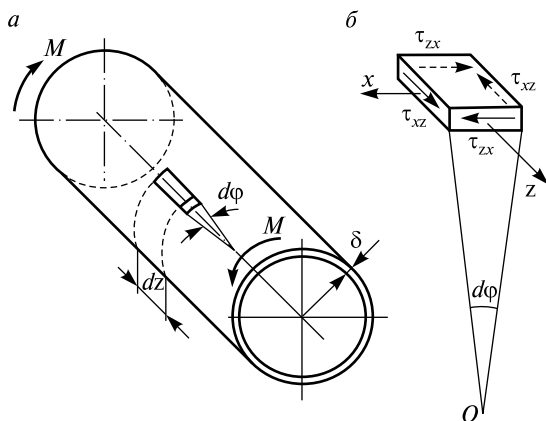


Рис. 17.1. Кручение тонкостенной трубы (а); бесконечно малый элемент, вырезанный из тела трубы (б)

элемент двумя радиальными сечениями, угол между которыми обозначим  $d\varphi$ , и двумя поперечными сечениями, отстоящими одно от другого на расстоянии  $dz$ , и изобразим его в большем масштабе (рис. 17.1, б).

Ввиду малости вырезанного элемента можно считать, что его внутренняя и наружная цилиндрические поверхности малы, т.е. выделенный элемент можно рассматривать как параллелепипед. В поперечных сечениях элемента возникнут касательные напряжения, которые должны быть направлены в противоположных гранях в противоположные стороны, иначе не будут удовлетворены условия равновесия.

Кроме того, необходимо, чтобы сумма моментов приложенных сил равнялась нулю, т.е. моменты внутренних усилий должны быть равны и противоположно направлены:

$$(\tau_{zx} \delta r d\varphi) dz = (\tau_{xz} \delta dz) r d\varphi, \text{ откуда } \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (17.1)$$

Полученное равенство называется *законом парности касательных напряжений*.

Рассмотрим деформации сдвига. Поскольку нас интересует деформация выделенного элемента, а не абсолютное перемещение, будем считать левое сечение неподвижным. При приложении мо-

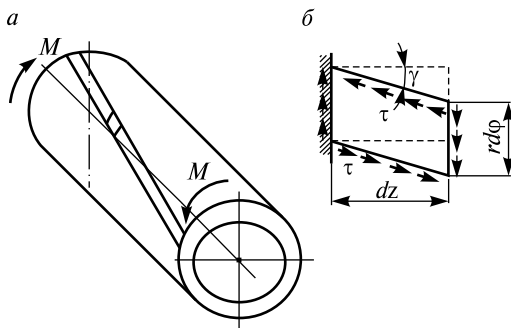


Рис. 17.2. Деформация тонкостенной трубки при приложении момента (а); проекция бесконечно малого элемента на вертикальную плоскость (б)

мента, сечения трубки повернутся одно относительно другого друга и вследствие этого прямая образующая, нанесенная на поверхности, перекошится (рис. 17.2, а). Проекция элемента на вертикальную плоскость показана на рис. 17.2, б. При этом прямые углы изменятся на одну и ту же величину  $\gamma$ . Угол  $\gamma$  называется *углом сдвига* и служит мерой деформации сдвига. В известных пределах нагружения можно считать, что материал подчиняется *закону Гука*, следовательно, существует прямо пропорциональная зависимость между углом сдвига и касательными напряжениями. Эта зависимость имеет вид

$$\tau = G\gamma, \quad (17.2)$$

где  $G$  — модуль упругости материала при сдвиге, выражаемый в единицах напряжения;

$\gamma$  — относительный сдвиг, или как указывалось, *угол сдвига*. Эта величина безразмерная.

Для изотропного материала существует зависимость между модулем упругости при растяжении. При коэффициенте Пуассона  $\mu$  и модуле сдвига  $G$  имеем

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (17.3)$$

Например, для стали  $E = 200$  ГПа,  $\mu = 0,25$  и по формуле (17.3) найдем, что  $G = 80$  ГПа.

## 17.2. Напряжения и перемещения при кручении стержня круглого поперечного сечения

Стержень, который нагружен моментами относительно продольной оси, испытывает *кручение*. Такие стержни называют *валами*. При подобном нагружении в поперечных сечениях стержня возникает только одно внутреннее усилие — *крутящий момент*  $M_z$  (рис. 17.3, *а*). Остальные силовые факторы равны нулю. Правило знаков для моментов  $M_z$  изложено в гл. 12.

Угол поворота  $\varphi$  будем считать положительным, если при взгляде на сечение в положительном направлении оси  $z$  видим, что поворот сечения осуществляется против хода часовой стрелки (рис. 17.3, *а*).

Нанесем на поверхность резиновой модели сетку продольных и поперечных линий и подвергнем брус кручению (рис. 17.3, *б*). Можно легко убедиться в том, что все образующие на поверхности цилиндра повернутся на один угол и превратятся в винтовые линии. Расстояние между поперечными линиями не изменится, и сами эти линии не искривятся (рис. 17.3, *в*). Это простое наблюдение позволяет сделать вывод о том, что все поперечные сечения, не меняя свою форму, размеры и взаимное положение, при кручении поворачиваются относительно друг друга, т.е. сдвигаются. Можно заметить, что элемент, заключенный между нанесенными линиями (заштрихованными на рис. 17.3, *в*), перекашивается, т.е. подвергается сдвигу. Каждое поперечное сечение повернется на некоторый угол, причем угол поворота будет тем больше, чем дальше сечение отстоит от левого зашечного конца.

Метод сечений позволяет найти в произвольном сече-

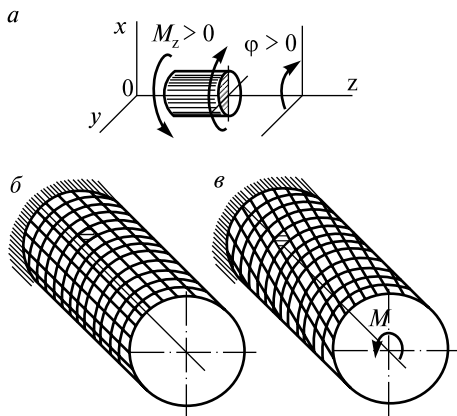


Рис. 17.3. Правило знаков для  $M_z$  и  $\varphi$  (*а*) при кручении резинового бруса; нанесенная на поверхности резиновой модели сетка из продольных и поперечных линий (*б*); деформация резинового бруса при кручении (*в*)

нии величину и направление крутящего момента, т.е. статический эквивалент внутренних усилий, возникающих в сечении. Однако метод сечений не может дать ответ на вопрос, как внутренние усилия распределены по площади сечения.

Для того чтобы ответить на этот вопрос, воспользуемся следующими допущениями:

- справедлива гипотеза плоских сечений при кручении, т.е. сечения, плоские и перпендикулярные к оси бруса до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными после деформации;
- радиусы поперечных сечений при кручении не искривляются, т.е. остаются прямыми;
- расстояния между поперечными сечениями при кручении остаются неизменными;
- материал бруса подчиняется закону Гука.

На основании принятых гипотез кручение круглого стержня можно представить как результат сдвигов, вызванных взаимным поворотом поперечных сечений относительно друг друга. Вследствие этого в поперечных сечениях возникнут только касательные напряжения.

Рассмотрим стержень круглого поперечного сечения (рис. 17.4, а) диаметром  $d$ , к свободному концу которого приложен скручивающий момент  $M$ . На боковой поверхности стержня проведем образующую  $KС$ , которая после кручения займет положение  $KС_1$ . В результате кручения стержня сечение I—I, взятое на расстоянии  $z$  от левого заделанного конца, повернется на угол  $\varphi$ , а сечение II—II — на угол  $\varphi + d\varphi$ . Таким образом, сечение II—II по отношению к сечению I—I повернулось на угол  $d\varphi$ .

Изобразим элемент длиной  $dz$  в большем масштабе (рис. 17.4, б) и условно примем, что левое сечение элемента стержня неподвижное. Выясним деформацию элементарного цилиндра. Поскольку нас интересует деформация элемента, а не его перемещение, будем считать, что левое сечение неподвижное. Вследствие перемещения правого сечения относительно левого точка  $B$ , лежащая на поверхности цилиндра, займет положение  $B_1$ , переместившись по дуге окружности радиусом  $r = d/2$ . Линия  $AB_1$  ввиду малости выделенного элемента может быть принята за отрезок прямой. Деформация сдвига, как известно, характеризуется углом сдвига  $\gamma$ . Из прямоугольного треугольника  $ABB_1$  определим тангенс угла  $\gamma$ :  $\operatorname{tg} \gamma =$

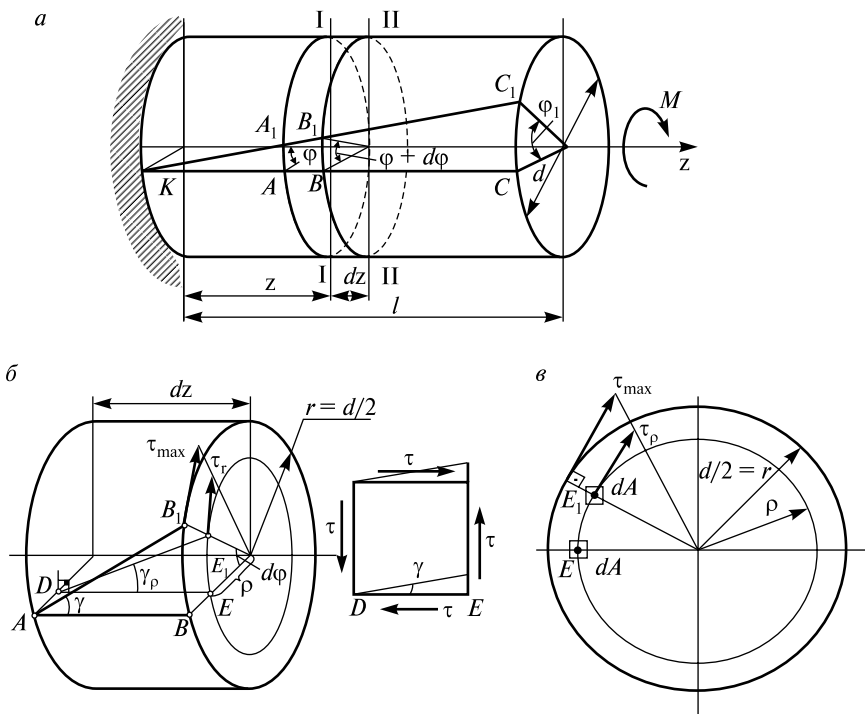


Рис. 17.4. Стержень круглого поперечного сечения при кручении (а); бесконечно малый элемента длиной  $dz$  (б); направление касательных напряжений (в)

$= BB_1/AB$  учитывая, что  $BB_1 = r d\varphi$ , а  $AB = dz$ , получим  $\operatorname{tg} \gamma = r \frac{d\varphi}{dz}$ .

Ввиду малости деформаций можно считать, что  $\operatorname{tg} \gamma = \gamma$ , тогда  $\gamma = r(d\varphi/dz)$ . Для произвольного волокна, отстоящего от центра стержня на расстоянии  $\rho$ , будем иметь  $\gamma_\rho = EE_1/DE = \rho(d\varphi/dz)$ , и по закону Гука (17.2) получим касательное напряжение

$$\tau_\rho = G\gamma = G \frac{d\varphi}{dz} \rho, \quad (17.4)$$

где  $G$  и  $\frac{d\varphi}{dz}$  — константы для всех точек сечения.

Следовательно,  $\tau$  в сечении изменяется пропорционально  $\rho$ .

Во всех точках окружности радиуса  $\rho$  напряжения  $\tau_\rho = \text{const}$  и направлены по касательной к этой окружности (рис. 17.4, в).

Выделим вокруг точки  $E_1$  элементарную площадку  $dA$ . В силу малости площадки изменением  $\tau_\rho$  в ее пределах можно пренебречь.

Запишем элементарную силу как произведение  $\tau_\rho$  на  $dA$ , тогда элементарный момент будет равен  $dM_z = (\tau_\rho dA)\rho$ .

Суммируя по всей площади сечения элементарные моменты и подставляя вместо  $\tau_\rho$  выражение (17.4), получим

$$M_z = \int_A \tau_\rho dA \rho = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA. \quad (17.5)$$

Интеграл по площади поперечного сечения представляет собой полярный момент инерции сечения, его размерность  $\text{м}^4$  ( $\text{см}^4$ ):

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA.$$

Подставив это выражение в (17.5), найдем

$$M_z = G \frac{d\varphi}{dz} I_\rho. \quad (17.6)$$

Выразив из (17.6)  $\frac{d\varphi}{dz}$  и подставив в (17.4), получим

$$\tau_\rho = \frac{M_z}{I_\rho} \rho, \quad (17.7)$$

где  $\rho$  — расстояние от центра сечения до точки, в которой определяется напряжение  $\tau$ , см (м).

Из формулы (17.7) следует, что  $\tau$  вдоль произвольного радиуса сечения изменяются по линейному закону (рис. 17.5).

В точках, равноудаленных от центра сечения, касательные напряжения одинаковые. Наибольшие касательные напряжения возникают в точках, максимально удаленных от центра сечения, т.е. в точках контура поперечного сечения. Значения этих напряжений можно определить, подставив в (17.7) вместо  $\rho$  его наибольшее значение  $r$ :

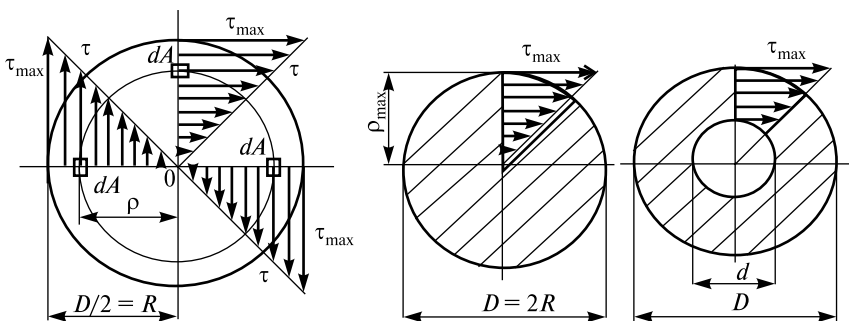


Рис. 17.5. Распределение касательных напряжений в круглом поперечном сечении при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_\rho} \rho_{\max} = \frac{M_z}{I_\rho} r.$$

Перепишем полученное выражение в виде

$$\tau_{\max} = M_z / I_\rho / \rho_{\max}.$$

Введя обозначение  $I_\rho / \rho_{\max} = W_\rho$ , получим

$$\tau_{\max} = (M_z / W_\rho). \quad (17.8)$$

Величина  $W_\rho$  называется *полярным моментом сопротивления сечения кручению* и является геометрической характеристикой стержня круглого поперечного сечения при кручении.

Геометрические характеристики  $I_\rho$  и  $W_\rho$  определяются из выражений:

– для сплошного круглого сечения

$$I_\rho = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4; \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi R^3}{2};$$

– для полого толстостенного цилиндра

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right]; \quad W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right].$$

Каждый бесконечно малый параллелепипед, показанный на рис. 17.6, испытывает напряженное состояние чистого сдвига, поэтому главные напряжения в любой точке стержня будут численно равны касательным напряжениям, т.е.

$$\sigma_{1,2} = \tau = \pm (M_z / I_\rho) \rho. \quad (17.9)$$

Главные площадки наклонены к поперечным и продольным сечениям на угол  $\alpha = \pm 45^\circ$ .

При деформации кручения происходит поворот одного сечения стержня по отношению к другому на некоторый угол  $\varphi$ , который называется *углом закручивания*. Выражение для угла закручивания можно получить из (17.6). Угол закручивания элемента бруса длиной  $dz$  выражается формулой

$$d\varphi = \frac{M_z}{GI_\rho} dz.$$

Тогда полный угол закручивания будет определяться формулой

$$\varphi = \int_0^z \frac{M_z}{GI_\rho} dz + \varphi_0, \quad (17.10)$$

где  $\varphi_0$  — угол поворота при  $z = 0$ ;

$GI_\rho$  — произведение модуля упругости  $G$  на полярный момент инерции сечения  $I_\rho$ , называемый *жесткостью сечения при кручении*.

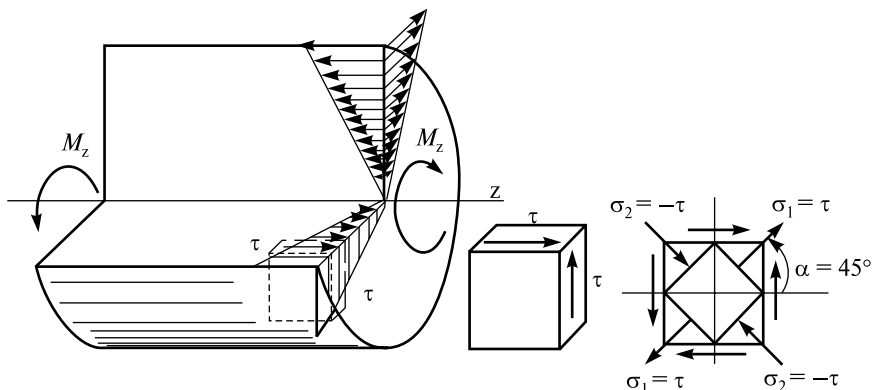


Рис. 17.6. По закону парности в диаметральных сечениях вала возникают такие же касательные напряжения, как и в поперечном сечении



В частном случае при  $M_z = M = \text{const}$ ,  $GI_\rho = \text{const}$  и  $\varphi_0 = 0$  получим

$$\varphi(z) = \frac{M_z z}{GI_\rho} \Big|_0^l = \frac{Ml}{GI_\rho}. \quad (17.11)$$

Этой формулой пользуются для определения угла закручивания на отдельном участке длиной  $l$  при постоянной жесткости  $GI_\rho$  и моменте  $M_z = M$ . При этом угол  $\varphi$  на длине  $0 \leq z \leq l$  возрастает от  $\varphi_0 = 0$  до  $\varphi(l)$  (рис. 17.7, а).

#### Расчеты на прочность.

Обеспечение прочности при кручении элементов строительных конструкций круглого сечения производится по методу предельных состояний на основе неравенства

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{I_\rho} \rho_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho} \leq R, \quad (17.12)$$

где  $R$  — расчетное сопротивление материала стержня при сдвиге, а крутящий момент  $M_z$  определяется от расчетных нагрузок с учетом возможной перегрузки.

Если используется метод допускаемых напряжений, например, при проектировании валов машин, то вместо (17.12) условие прочности примет вид

$$\tau_{\max} = M_z / W_\rho \leq [\tau], \quad (17.13)$$

где  $[\tau]$  — допускаемое касательное напряжение материала стержня.

Если вал машины передает скручивающий момент  $M_z$ , например, от мотора к станку, то значение момента зависит от передаваемой мощности и от частоты вращения вала. Поскольку мощность

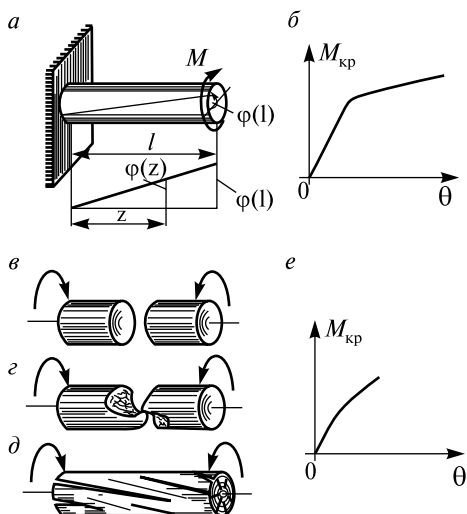


Рис. 17.7. Распределение  $\varphi$  по длине участка  $l$  (а); диаграмма кручения стального образца (б); характер разрушения образцов на кручение (в—д); диаграмма кручения чугунного образца (е)

равна работе в единицу времени ( $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Н}\cdot\text{м/с}$ ), можно составить равенство

$$N = M_z \alpha = M_z (2\pi n / 60),$$

где  $N$  — мощность, Вт;

$M_z$  — момент, Н·м;

$\alpha$  — угловая скорость;

$n$  — частота вращения, об/мин.

Отсюда получим соотношение, которым пользуются для определения крутящего момента по заданной мощности и частоте вращения вала:

$$M_z = \frac{30}{\pi} \frac{N}{n} = 9,55 \frac{N}{n}. \quad (17.14)$$

Как и при расчете на прочность при растяжении и сжатии, возможны следующие три вида задач, различающиеся формой использования условия прочности.

*Проверочный расчет:*  $|M_z| / W_p \leq [\tau]$ . При этом расчете по заданной нагрузке и размерам вала определяют наибольшие касательные напряжения, которые сравнивают с допускаемыми напряжениями. Если при этом проверка не выполняется, то необходимо изменить размеры сечения или уменьшить действующую нагрузку либо применить материал более высокой прочности.

*Подбор сечения:*  $W_p \geq |M_z| / [\tau]$ . Определяется необходимый полярный момент сопротивления поперечного сечения вала для каждого его участка, на котором сечение принимается постоянным  $|M_z|$ . Здесь означает величину наибольшего (по абсолютному значению) крутящего момента в пределах каждого такого участка. По величине крутящего момента определяют диаметр сплошного круглого или наружный и внутренний диаметры кольцевого сечения.

*Определение допускаемой нагрузки:*  $|M_z| \leq [\tau] W_p$ . По известному допускаемому напряжению  $[\tau]$  и полярному моменту сопротивления  $W_p$  определяют допускаемую величину  $|M_z|$ . Затем устанавливают величины допускаемых нагрузок, от действия которых возникающий в сечениях вала наибольший крутящий момент будет равен допускаемому моменту.

**Расчеты на жесткость.** Помимо расчета на прочность, валы рассчитывают и на жесткость, ограничивая относительные (погонные) углы закручивания. Условие жесткости имеет вид

$$\theta_{\max} = \varphi / l = M_z / GI_{\rho} \leq \theta_{\text{расч}}, \quad (17.15)$$

где  $\theta_{\text{расч}}$  — величина, задаваемая нормами расчета  $\theta$ , рад/м.

Из двух диаметров вала, полученных из условия прочности (17.12) и из условий жесткости (17.15), принимают больший.

### 17.3. Испытания на кручение

Если подвергнуть испытанию на кручение образец, то по виду разрушения легко установить, сдвиг или отрыв имел решающее значение в конечной стадии испытания. Для стали диаграмма кручения сначала получается в виде прямой линии, слегка наклоненной к оси абсцисс (см. рис. 17.7, б). Между моментом кручения  $M_{\text{кр}}$  и  $\theta$  существует пропорциональная зависимость. При дальнейшем испытании прямая линия переходит в кривую. В начале этой кривой в материале образца наряду с упругими появляются пластические деформации. Ввиду того что при распространении пластической деформации вглубь сечения образца близ его оси сохраняется упругое ядро, крутящий момент продолжает расти, хотя и медленнее. Разрушение стального образца происходит без образования шейки, в виде среза по сечению, перпендикулярному к оси образца (см. рис. 17.7, в).

Диаграмма чугунного образца имеет вид слегка наклонной, почти прямой линии (см. рис. 17.7, е). Характер диаграммы свидетельствует о том, что больших остаточных деформаций чугунный образец при скручивании не получает. Разрушение образца происходит по площадкам, наклоненным к оси образца под углом, близким к  $45^\circ$ . Эти площадки образуют винтовую поверхность разрушения (см. рис. 17.7, з). До разрушения на них действуют главные растягивающие напряжения. Чугун хуже воспринимает растягивающие напряжения, чем сжимающие, чем объясняется характер разрушения чугунных образцов при кручении.

Деревянный образец при испытании на кручение разрушается в результате возникновения продольных трещин (см. рис. 17.7, д). Причина в том, что возникновение касательных напряжений в плоскости поперечного сечения сопровождается возникновением рав-

ных касательных напряжений в продольных сечениях образца. Следовательно, дерево сопротивляется сдвигу (скалыванию) вдоль волокон значительно хуже, чем поперек волокон.

Рассмотрим некоторые примеры расчета на прочность валов по касательным напряжениям.

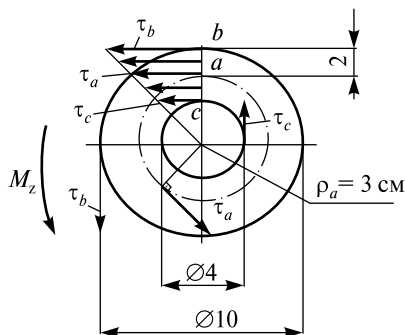


Рис. 17.8. Эпюра касательных напряжений для заданного поперечного сечения

**Пример 17.1.** Для поперечного сечения вала (рис. 17.8) определить касательное напряжение в точке  $a$  и построить эпюру касательных напряжений, если крутящий момент в сечении  $M_z = -16 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

**Решение.** Касательное напряжение в точке  $a$  определяется по формуле (17.7). Расстояние  $\rho_a$  от центра сечения до точки, в которой определяется напряжение  $\tau$ , равно 3 см. Полярный момент инерции  $I_\rho$  поперечного сечения, выполненного по форме полого толстостенного цилиндра, равен  $955 \text{ см}^4$ . Следовательно, касательное напряжение в точке  $a$  определим из выражения

$$\begin{aligned}\tau_a &= (16 \cdot 10^3 / 955 \cdot 10^{-8}) \cdot 3 \cdot 10^{-2} = \\ &= 50 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Для построения эпюры касательных напряжений определим касательные напряжения в точках  $b$  и  $c$ :

$$\tau_b = (16 \cdot 10^3 / 955 \cdot 10^{-8}) \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 83,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 83,5 \text{ МПа};$$

$$\tau_c = (16 \cdot 10^3 / 955 \cdot 10^{-8}) \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 33,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 33,5 \text{ МПа}.$$

Как видно из проведенных вычислений, в выражения, определяющие значения касательных напряжений в точках  $a$ ,  $b$  и  $c$ , крутящий момент входит по модулю. Знак касательных напряжений определяется направлением крутящего момента.

Эпюра касательных напряжений для заданного поперечного сечения показана на рис. 17.8.

**Пример 17.2.** Определить диаметр сплошного вала (рис. 17.9,  $a$ ) из условия прочности и жесткости, если допускаемое касательное напряжение на кручение  $[\tau] = 50 \text{ МПа}$ , допускаемый погонный угол закручивания  $[\theta] = 0,8 \text{ град/м}$  и  $G = 80 \text{ ГПа}$ .

**Решение.** Под влиянием заданных скручивающих моментов вал находится в равновесии, т.е.  $\sum M_z = 15 + 25 - 18 - 22 = 0$ .

Для определения максимального крутящего момента построим эпюру крутящих моментов (рис. 17.9, б). Из эпюры  $M_z$  устанавливаем, что  $M_z^{\max} = 22 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , и опасным является третий участок вала.

Из условия прочности (17.13) находим потребный полярный момент сопротивления

$$W_{\rho}^{\text{потр}} = (M_z^{\max} / [\tau]) = 22 \cdot 10^3 / 50 \cdot 10^6 = 0,44 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 440 \text{ см}^3,$$

а соответствующий диаметр вала определяется из выражения  $W_{\rho}^{\text{потр}} = \pi d^3 / 16 = 440 \text{ см}^3$ , т.е.

$$d = \sqrt[3]{\frac{440 \cdot 16}{\pi}} = 13 \text{ см}.$$

Из условия жесткости вала (17.15) найдем потребный полярный момент инерции сечения вала:

$$I_{\rho} = (M_z \cdot 180) / (G [\theta] p) = (22 \cdot 10^3 \cdot 180) / (80 \cdot 10^9 \cdot 0,8 \cdot 3,14) = 1970 \text{ см}^4.$$

Здесь  $180/\pi$  — множитель перевода размерности рад/м в град/м.

Таким образом, по условиям прочности требуется больший диаметр вала ( $d = 13 \text{ см}$ ), чем по условию жесткости ( $d = 11,9 \text{ см}$ ). Окончательно принимаем  $d = 13 \text{ см}$ , так как при этом будет соблюдено как условие прочности, так и условие жесткости вала, и кроме того полученный линейный размер вала соответствует стандартному размеру по ГОСТ 6636-69.

**Пример 17.3.** Определить допускаемую величину параметра  $M$  скручивающих моментов для консольного вала (рис. 17.10, а), если допускаемое касательное напряжение на кручение  $[\tau] = 60 \text{ МПа}$ .

**Решение.** Построим эпюру крутящих моментов. Вид ее показан на рис. 17.10, б. Поскольку вал имеет ступенчато-переменное сечение, нельзя сказать сразу, какой участок вала является опасным.

Рис. 17.10. Консольный вал под действием скручивающих моментов (а); вид эпюры крутящих моментов (б)

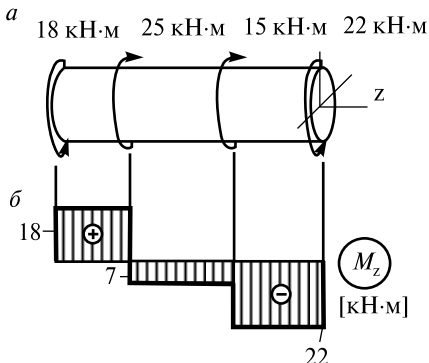
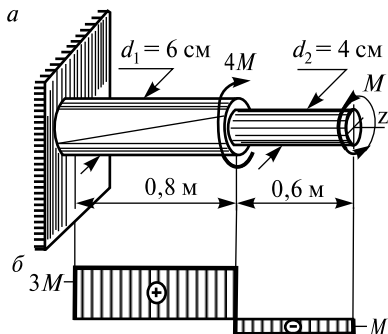


Рис. 17.9. Равновесие вала при заданных скручивающих моментах (а); эпюра крутящих моментов (б)



Рассмотрим первый участок вала ( $M_z = 3M$ ) и из условия прочности (17.13) найдем допускаемую величину параметра  $M$ :

$$M = (W_{\rho 1} [\tau]) / 3 = (\pi d_1^3 / 16 \cdot 3) \cdot [\tau] = (3,14 \cdot 3 \cdot 10^{-6} / 16 \cdot 3 \cdot 60 \cdot 10^6) = 845 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Из условия прочности вала на втором участке ( $M_z = M$ ), выполняя аналогичные вычисления, получим:

$$M = (W_{\rho 2} [\tau]) = (\pi d_2^3 / 16) \cdot [\tau] = (3,14 \cdot 4^3 \cdot 10^{-6} / 16) \cdot 60 \cdot 10^6 = 755 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, значение допускаемого параметра  $M$  определяется прочностью вала на втором участке (меньший параметр  $M$ ), т.е.  $M = 755 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

**Пример 17.4.** Найти максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max}$  и угол закручивания стального вала на длине 0,2 м, если вал передает активную мощность  $N = 20 \text{ кВт}$ , частота вращения вала  $n = 1200 \text{ об/мин}$ , диаметр вала равен 0,03 м.

*Решение.* Определим крутящий момент, действующий во всех сечениях вала, для чего воспользуемся зависимостью (17.14):

$$M_z = 9,55 \frac{N}{n} = 9,55 \frac{20 \cdot 10^3}{1200} = 159,16 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Тогда величина максимальных касательных напряжений

$$\tau_{\max} = M_z / W_{\rho} = M_z 16 / (\pi d^3) = 159,16 \cdot 16 / (3,14 \cdot 0,03^3) = 30,04 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Вычислим угол закручивания вала

$$\varphi = \frac{M_z l}{GI_{\rho}} = \frac{159,16 \cdot 0,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,03^4} = 1,56 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

**Пример 17.5.** Для стального ступенчатого вала, защемленного одним концом и нагруженного, согласно рис. 17.11, *а*, построить эпюры крутящих моментов и максимальных касательных напряжений. Определить угол поворота концевой сечения относительно заделки.

*Решение.* Построение эпюры крутящих моментов начнем со свободного конца вала, это позволит не определять момент в заделке. Используя метод сечений, найдем крутящий момент на участках *AB*, *BC* и *CD*. Эпюра крутящих моментов представлена на рис. 17.11, *б*.

Максимальные касательные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от оси вала. Для построения эпюры максимальных касательных напряжений рассмотрим четыре участка *AB*, *BK*, *KC* и *CD* и определим напряжения.

Участок *AB*:

$$\tau_{\max} = M_z^I / W_{\rho 1} = -4 \cdot 10^3 / (100,48 \cdot 10^{-6}) = -39,8 \text{ МПа}.$$

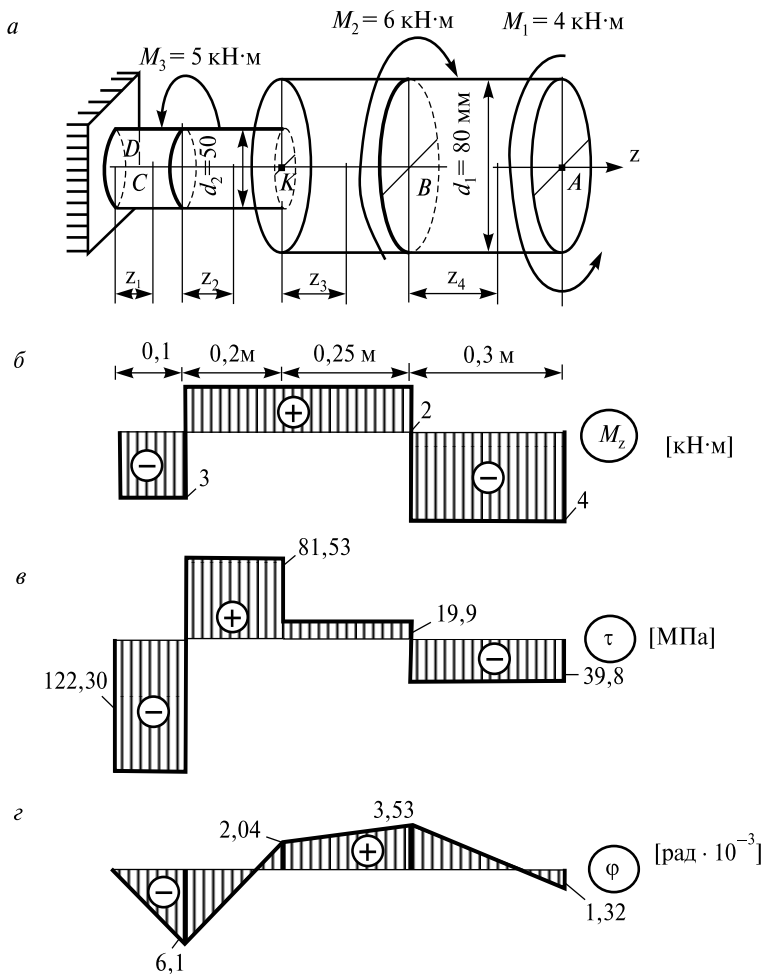


Рис. 17.11. Стальной ступенчатый вал, зашечленный одним концом (*a*); эпюры крутящих моментов (*б*), касательных напряжений (*в*), углов закручивания (*г*)

Участок *BK*:

$$\tau_{\max} = M_z^{\text{II}} / W_{\rho_1} = 2 \cdot 10^3 / (100,48 \cdot 10^{-6}) = 19,9 \text{ МПа.}$$

Участок *KC*:

$$\tau_{\max} = M_z^{\text{II}} / W_{\rho_{\text{II}}} = 2 \cdot 10^3 / (24,53 \cdot 10^{-6}) = 81,53 \text{ МПа.}$$

Участок  $CD$ :

$$\tau_{\max} = M_z^{\text{III}} / W_{\rho_{\text{II}}} = -3 \cdot 10^3 / (24,53 \cdot 10^{-6}) = -122,3 \text{ МПа.}$$

Эпюра  $\tau_{\max}$  представлена на рис. 17.11, в. Наиболее нагруженным оказался участок  $CD$ .

Для того чтобы построить эпюру углов закручивания, рассмотрим также четыре участка; начало участка отсчитывается от заделки (см. рис. 17.11, а), так как в этом сечении угол поворота равен нулю.

Угол поворота произвольного сечения на участке  $DC$  будет ( $0 \leq z_1 \leq 0,1$  м):

$$\varphi_{DC} = M_z z_1 / GI_2 = -310^3 \cdot 32z_1 / 8010^9 \cdot 3,14(5 \cdot 10^{-2})^4 = -0,061z_1.$$

Угол поворота произвольного сечения на участке  $CK$  будет складываться из угла поворота сечения  $C$  и угла поворота на участке длиной  $z_2$ , т.е. ( $0 \leq z_2 \leq 0,2$  м):

$$\varphi_{CK} = \varphi_C + M_z z_2 / (GI_2) = -6,1 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^3 \cdot 32z_2 / 80 \cdot 10^9 \cdot 3,14(5 \cdot 10^{-2})^4.$$

Аналогично получим выражение для углов поворота произвольного сечения на участке  $KB$  ( $0 \leq z_3 \leq 0,25$  м):

$$\varphi_{KB} = \varphi_K + M_z z_3 / (GI_1) = 2,04 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^3 \cdot 32z_3 / 80 \cdot 10^9 \cdot 3,14(8 \cdot 10^{-2})^4.$$

Для участка  $BA$  получим ( $0 \leq z_4 \leq 0,3$  м):

$$\varphi_{BA} = \varphi_B + M_z z_4 / (GI_1) = 3,53 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^3 \cdot 32z_4 / 8010^9 \cdot 3,14(8 \cdot 10^{-2})^4.$$

Угол поворота концевое сечения будет  $\varphi_A = -1,32 \cdot 10^{-3}$  рад.

Эпюра углов закручивания приведена на рис. 17.11, г.

## 17.4. Статически неопределимые задачи при кручении

Статически неопределимые задачи при кручении, в которых рассматриваются стержни, имеющие неподвижное закрепление (заделку) двух торцевых сечений (рис. 17.12), решают таким же методом, как и при растяжении (сжатии). Напомним, что разность между числом неизвестных усилий и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для данной системы, называют *степенью статической неопределимости*.

Степень статической неопределимости соответствует числу «лишних» неизвестных усилий.

Определение неизвестных усилий в статически неопределимых системах возможно, если уравнения равновесия дополнить уравнениями, характеризующими деформированное состояние систе-



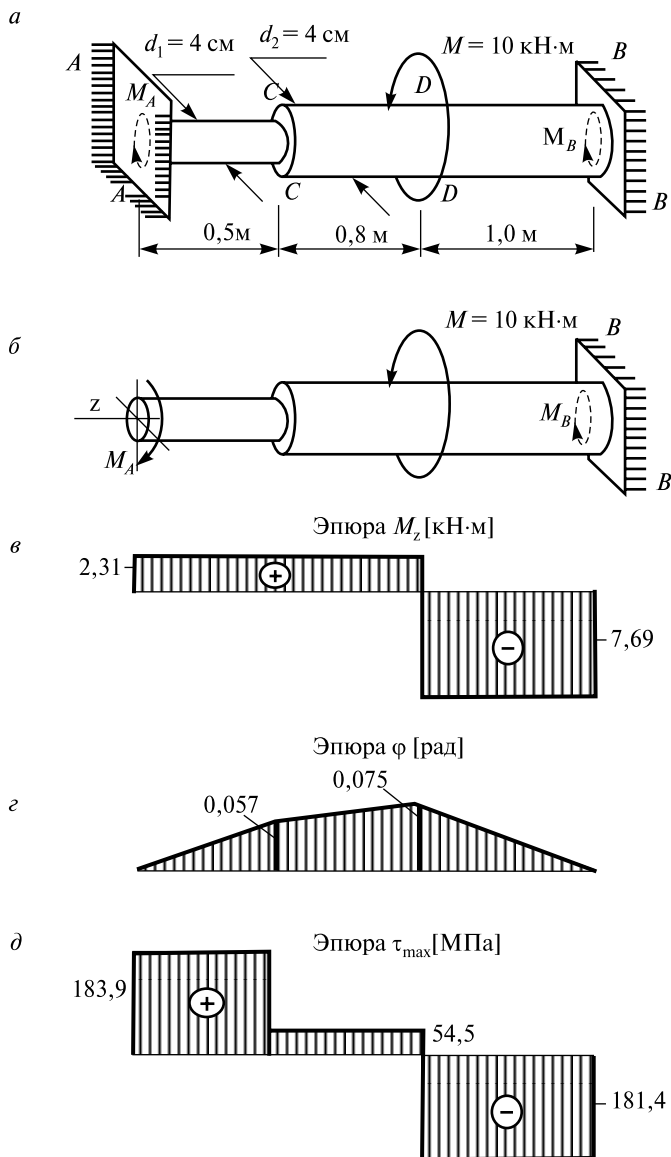


Рис. 17.12. Статически неопределимый ступенчатый стержень круглого поперечного сечения (*a*); статически определимый стержень, нагруженный заданной нагрузкой (*б*); эпюры крутящих моментов (*в*); углов закручивания (*г*); касательных напряжений (*д*)

мы, — *уравнениями совместности деформаций* (или просто *уравнениями перемещений*). Число этих дополнительных уравнений равно степени статической неопределимости. При их составлении следует рассмотреть деформированное состояние системы и установить связь между перемещениями точек ее элементов. Решив совместно уравнения равновесия и уравнения перемещений, определим все неизвестные усилия, или, как говорят, раскроем статическую неопределимость. Специфику решения таких задач при кручении рассмотрим на конкретном примере.

**Пример 17.6.** Для ступенчатого стержня круглого поперечного сечения, изображенного на рис. 17.12, *а*, жестко зашпеленного двумя концами и нагруженного скручивающим моментом  $M = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$  при модуле  $G = 80 \text{ ГПа}$ , требуется:

- построить эпюру крутящих моментов  $M_z$ ;
- построить эпюру углов закручивания  $\varphi$ ;
- определить опасное сечение вала и построить эпюру максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$ .

*Решение.* Составим единственно возможное уравнение равновесия

$$\sum m_z = M_A - 10 + M_B = 0.$$

Этого уравнения недостаточно для определения двух неизвестных моментов  $M_A$  и  $M_B$ . Следовательно, система статически неопределима.

Отбросим заделку *A* и заменим ее действие на стержень моментом  $M_A$  (рис. 17.12, *б*).

Составим дополнительное уравнение деформаций из условия, что  $\varphi_A = 0$ , т.е. угол поворота сечения у заделки *A* равен нулю. Тогда, применяя принцип независимости действия сил и используя формулу (17.10) получим

$$\varphi_A = \left( \frac{M_A 0,5 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 (4 \cdot 10^{-2})^4} + \frac{M_A 1,8 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 (6 \cdot 10^{-2})^4} \right) - \left( \frac{10000 \cdot 1,0 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14 (6 \cdot 10^{-2})^4} \right) = 0.$$

Содержимое каждой из скобок представляет собой угол  $\varphi_A$  закручивания участка вала от правой заделки до места приложения соответствующего момента.

Решая полученное уравнение, найдем  $M_A = 2,31 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Момент  $M_B$  найдем из уравнения равновесия:

$$M_B = 10 - 2,31 = 7,69 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Далее в принятой расчетной схеме отнесем найденный момент  $M_A$  к внешней нагрузке и построим для нее обычным методом эпюру  $M_z$ .

Эпюра  $M_z$  показана на рис. 17.12, *в*.

Углы поворота сечений *C—C* и *D—D* при наличии жесткой заделки обоих концов стержня могут быть определены как углы закручивания части стержня, расположенной либо слева от сечений, либо справа.

Рассмотрим часть стержня слева от соответствующих сечений и пользуясь опорой  $M_z$ , получим

$$\varphi_C = \frac{2310 \cdot 0,5 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14(4 \cdot 10^{-2})^4} = 0,057 \text{ радиан.}$$

Угол закручивания  $\varphi_D$  получим как алгебраическую сумму углов закручивания на участках вала  $AC$  и  $CD$ :

$$\varphi_D = 0,057 + \frac{2310 \cdot 0,8 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14(6 \cdot 10^{-2})^4} = 0,075 \text{ радиан.}$$

С целью контроля вычислим угол  $\varphi_B$ :

$$\varphi_B = 0,057 + 0,075 - \frac{7690 \cdot 1,0 \cdot 32}{80 \cdot 10^9 \cdot 3,14(6 \cdot 10^{-2})^4} = 0 \text{ радиан.}$$

На рис. 17.12,  $\varepsilon$  построена эпюра углов закручивания  $\varphi$ . Указать сечение, в котором  $\tau = \tau_{\max}$ , сразу не представляется возможным, так как сечение в том месте, где действует  $|M_z|_{\max}$ , имеет больший диаметр. Поэтому вычислим  $\tau$  в крайних точках сечения на участках  $AC$  и  $DB$ , воспользовавшись формулой (17.8).

Участок  $AC$ :  $\tau_{\max} = (2310/12,56 \cdot 10^{-6}) = 183,9 \text{ МПа.}$

Участок  $DB$ :  $\tau_{\max} = (7690/42,39 \cdot 10^{-6}) = 181,4 \text{ МПа.}$

Все сечения, находящиеся на участке  $AC$ , опасные, так как на этом участке вала  $\tau_{\max}$  имеют наибольшие значения.

Для построения эпюры  $\tau_{\max}$  определим максимальные касательные напряжения на участке  $CD$ .

Участок  $CD$ :  $\tau_{\max} = (2310/42,39 \cdot 10^{-6}) = 54,5 \text{ МПа.}$

По найденным значениям на рис. 17.12,  $\delta$  построена эпюра максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$ .

## 17.5. Кручение стержня некруглого поперечного сечения

При кручении стержней с некруглым поперечным сечением гипотезы, принятые ранее, оказываются несправедливыми, поскольку поперечные сечения в таких стержнях при кручении не остаются плоскими, а искривляются. Это явление называется *депланацией*.

Кручение стержня, при котором депланация сечения по длине стержня изменяется, называется *стесненным кручением*.

Если депланации всех поперечных сечений одинаковы по длине стержня, то кручение называется *свободным*.

Свободное кручение имеет место, например, когда стержень постоянного сечения по всей длине сечения нагружен по торцам двумя скручивающими моментами (рис. 17.13, *a*).

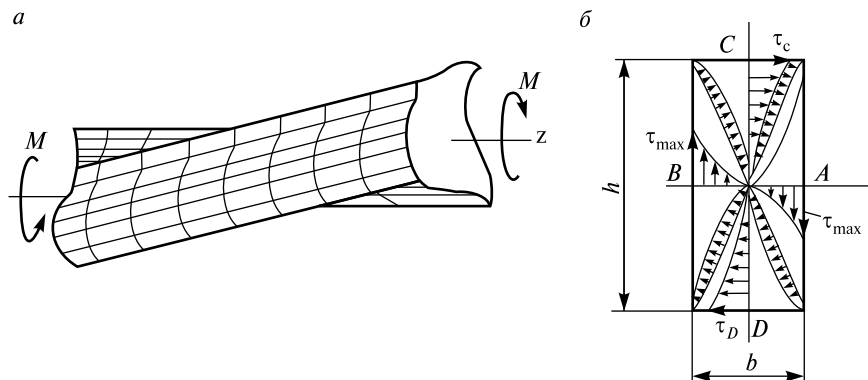


Рис. 17.13. Свободное кручение прямоугольного стержня:  
*a* — деформация по длине постоянная; *б* — напряжения в прямоугольном сечении

Решение задачи свободного кручения стержней некруглого поперечного сечения рассматривается в курсе теории упругости. Ограничимся рассмотрением конечных результатов. Наибольшие касательные напряжения (рис. 17.13, *б*) возникают в средних точках длинных сторон контура (в точках *A*, *B*), которые могут быть найдены по формулам:

$$\tau_A = \tau_{\max} = M_z / W_{\text{кр}}; \quad W_{\text{кр}} = k_1 h b^2, \quad (17.16)$$

где коэффициент  $k_1$  зависит от соотношения сторон  $h/b$  прямоугольника (табл. 17.1).

Таблица 17.1

Коэффициенты для расчета прямоугольных сечений на кручение

$h/b$	1,0	1,5	1,75	2	2,5	3	6	10	$\infty$
$k_1$	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,299	0,313	0,33
$k_2$	1,0	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,743	0,742	0,742
$k_3$	0,141	0,156	0,214	0,229	0,249	0,263	0,299	0,313	0,33

Напряжения в серединах коротких сторон в точках  $C$  и  $D$  возникают несколько меньшими. Их можно выразить через  $\tau_{\max}$  следующим образом:

$$\tau_{C,D} = k_2 \tau_{\max}. \quad (17.17)$$

Значения коэффициента  $k_2$  также приведены в табл. 17.1. Наконец, угол закручивания  $\varphi$  стержня может быть найден по формуле

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GI_{\text{кр}}}, \quad (17.18)$$

где  $I_{\text{кр}} = k_3 hb^3$ , значения  $k_3$  приведены в табл. 17.1. Угол  $\theta$  называется относительным углом закручивания (как угол закручивания единицы длины стержня) и измеряется в радианах, деленных на метр.

В заключение отметим, что приведенных данных достаточно для расчета стержней прямоугольного поперечного сечения на прочность и жесткость. Для сечений иной формы следует воспользоваться справочной литературой.

## Глава 18. ОСНОВЫ РАСЧЕТА ПРОСТЕЙШИХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### 18.1. Статически неопределимые балки

Балка, способная воспринимать произвольную нагрузку, должна быть закреплена таким образом, чтобы она не могла перемещаться как жесткое тело. В случае действия нагрузки в одной плоскости минимальное число связей, необходимых для закрепления стержневой системы, равно трем.

Простейшим примером такой системы является балка, показанная на рис. 18.1, *а*. Эти три связи являются абсолютно необходимыми, удаление хотя бы одной из них превращает стержневую систему в *геометрически изменяемую систему* (механизм) (рис. 18.1, *б*), т.е. в такую систему, в которой могут происходить перемещения точек без деформации стержней.

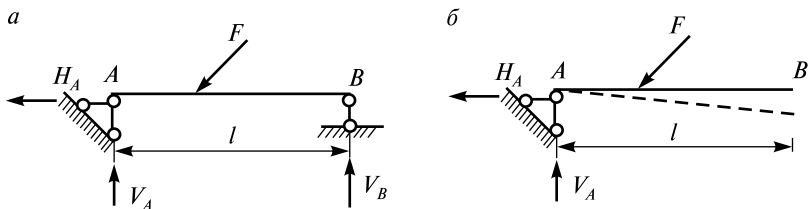


Рис. 18.1. Примеры статически определимой (а) и геометрически изменяемой систем (б)

Напомним, что связью называется всякое препятствие, не допускающее изменения взаимного положения точек или сечений системы. *Геометрически неизменяемой* называется такая система, в которой перемещения точек или элементов возможны только за счет деформации стержней.

Поскольку для плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия, реакции абсолютно необходимых связей могут быть найдены с помощью лишь одних уравнений статики.

Если все реакции в связях закрепления, а также внутренние усилия в элементах системы могут быть определены исходя из уравнений равновесия, то такая система называется *статически определимой*.

В инженерной практике встречаются системы, в которых число наложенных связей (и, соответственно, неизвестных усилий) больше числа уравнений равновесия. Такие системы называются *статически неопределимыми*.

По сравнению со статически определимыми системами неопределимые системы имеют дополнительные связи, которые называют *лишними*. Так, для балки, изображенной на рис. 18.2, а, имеем одну лишнюю связь.

Термин «лишние связи» является условным. Эти связи являются лишними только с той точки зрения, что число связей превышает число уравнений равновесия. В действительности указанные связи являются необходимыми, поскольку при их отсутствии прочность или жесткость конструкции может быть необеспеченной.

Усилия в лишних связях называются *лишними неизвестными*; их число совпадает с числом лишних связей, которое определяет степень статической неопределимости системы.

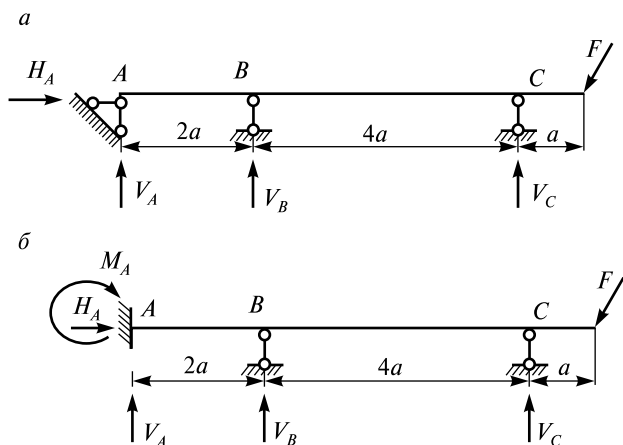


Рис. 18.2. Примеры статически неопределимых балок:  
 $a$  — один раз статически неопределимая балка;  $b$  — дважды статически неопределимая балка

Степень статической неопределимости есть разность между числом искомых усилий и числом независимых уравнений равновесия, которые можно составить для их получения.

Рассматривая балку, изображенную на рис. 18.2,  $b$ , устанавливаем, что число неизвестных реакций равно пяти, а число уравнений равновесия для их отыскания — трем. Следовательно, балка дважды статически неопределима.

Метод расчета статически неопределимых систем, элементы которых испытывают изгиб, по существу не отличается от рассмотренных ранее методов расчета статически неопределимых систем при растяжении или кручении.

Кратко напомним сущность этого метода. Заданная статически неопределимая система превращается в статически определимую путем освобождения ее от «лишних» связей, а их действие заменяется силами или моментами  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ . При отбрасывании «лишних» связей необходимо следить за тем, чтобы новая система, полученная из заданной, была геометрически неизменяемой. Такая система называется *основной*.

На рис. 18.3,  $a$  показана балка, имеющая степень статической неопределимости, равную единице. Для получения основной системы

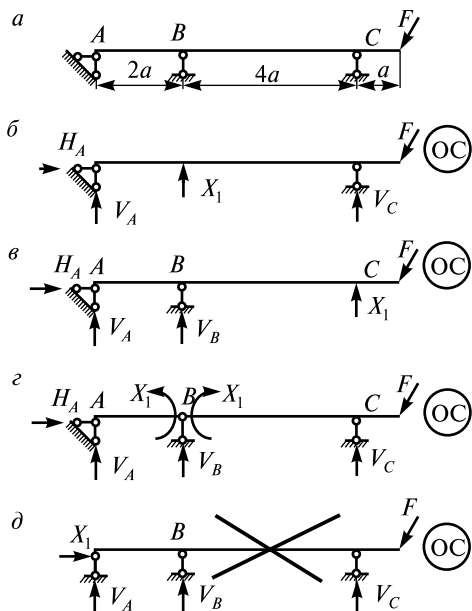


Рис. 18.3. Заданная один раз статически неопределимая балки (а); варианты рассматриваемой основной системы (б, в, г); «подвижная» балка (д)

Заметим, что балки такого типа, как представленная на рис. 18.3, а, называют неразрезными. Они могут иметь различное число пролетов. В отношении упрощения вычислений основная система для неразрезной балки, полученная путем врезания шарниров над промежуточными опорами, всегда предпочтительна по сравнению со всеми другими основными системами.

В варианте, показанном на рис. 18.3, д, отброшена горизонтальная связь. В результате балка оказалась подвижной. Удалена связь, которая является абсолютно необходимой, она не «лишняя». Поэтому такой вариант не может рассматриваться в качестве основной системы.

Поскольку за неизвестные в дальнейшем принимаются усилия в лишних связях, такой метод расчета статически неопределимых систем получил название *метода сил*.

надо удалить одну связь и ее действие заменить неизвестной силой (или моментом)  $X_1$ . На рис. 18.3, б основная система получена (ОС) удалением средней (промежуточной) опоры. В варианте, показанном на рис. 18.3, в, основная система получена удалением правой опоры. В варианте, показанном на рис. 18.3, г, опорный шарнир врезан в балку. Пара сил  $X_1$ , показанная слева от средней опоры, изображает действие правой балки на левую, а пара  $X_1$ , показанная справа от средней опоры, — действие левой балки на правую. Тогда основная система представляет собой две отдельные шарнирно опертые по концам балки.



## 18.2. Каноническое уравнение метода сил

Определение неизвестных усилий в статически неопределимых системах возможно, если уравнения равновесия дополнить уравнениями, характеризующими деформированное состояние системы, — *уравнениями совместности деформаций*, или *уравнениями деформаций*. Число этих дополнительных уравнений равно степени статической неопределимости рассчитываемой рамы.

Смысл уравнений заключается в том, что перемещения в основной системе, вызванные внешней нагрузкой и «лишними» неизвестными, должны быть такими же, как и в заданной системе.

Рассмотрим систему, показанную на рис. 18.4, *а*. Как мы уже установили, она один раз статически неопределимая. В основной системе, показанной на рис. 18.4, *б*, перемещение  $\Delta_1$  должно быть равно нулю, так как в заданной системе вертикальное перемещение сечения балки, находящегося на промежуточной опоре, равно нулю.

Тогда можно записать  $\Delta_1 = 0$ , и это означает, что суммарное перемещение в основной системе, вызванное внешней нагрузкой и «лишним» неизвестным, по направлению самого неизвестного должно быть равно нулю.

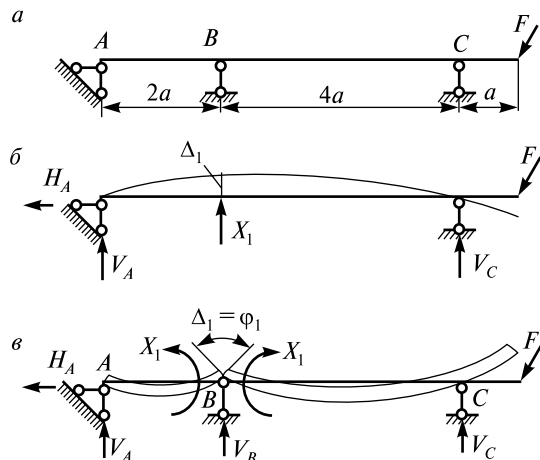


Рис. 18.4. Заданная один раз статически неопределимая балки (*а*); примеры основной системы (*б*, *в*)

Когда «лишним» неизвестным является изгибающий момент  $X_1$ , (рис. 18.4, в) над промежуточной опорой, аналогичное уравнение  $\Delta_1 = 0$  означает, что взаимный угол раскрытия сечения над промежуточной опорой должен быть равен нулю.

Основную систему, нагруженную заданными внешними силами и реакциями отброшенных связей, иногда называют *эквивалентной системой*.

Применяя принцип независимости действия сил, можно записать уравнение перемещений в виде

$$\Delta_1 = \Delta_{1X_1} + \Delta_{1p} = 0. \quad (18.1)$$

Первый индекс у каждого из перемещений указывает номер «лишнего» неизвестного, в направлении которого происходит данное перемещение; второй индекс указывает причину, вызывающую перемещение, например,  $\Delta_{1X_1}$  — перемещение в направлении  $X_1$ , вызванное действием  $X_1$ ;  $\Delta_{1p}$  — перемещение в том же направлении от действия заданной нагрузки.

Перемещение  $\Delta_{1X_1}$ , учитывая упругие деформации, удобно записать через единичное перемещение  $\delta_{11}$ , т.е. перемещение в направлении  $X_1$ , вызванное единичным неизвестным  $X_1$ . Вводя единичное перемещение, приходим к следующей форме уравнения перемещений (7.1):

$$\Delta_1 = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0. \quad (18.2)$$

Единичное и грузовое перемещения, определяются по формуле Максвелла—Мора.

Уравнение перемещений, представленное в форме (18.2), носит название *канонического уравнения метода сил*, потому что оно составлено по одному и тому же правилу, и его вид зависит только от степени статической неопределимости системы и не зависит от ее конкретных особенностей.

Последовательность расчета статически неопределимых балок рассмотрим на примерах.

### 18.3. Пример расчета статически неопределимой балки

**Пример 18.1.** Для балки, изображенной на рис. 18.5, *а*, построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Жесткость поперечного сечения считать постоянной ( $EI = \text{const}$ ).

**Решение.** Балка один раз статически неопределима. Один из возможных вариантов основной системы для этой балки представлен на рис. 18.5, *б*. По этому варианту отброшена связь над промежуточной опорой, которая воспринимает изгибающий момент ( $X_1$  — изгибающий момент в сечении балки над средней опорой).

Построим грузовую эпюру изгибающих моментов  $M_p$  (рис. 18.5, *г*) и единичную эпюру изгибающих моментов  $M_1$  (рис. 18.5, *е*), предварительно рассмотрев грузовое (рис. 18.5, *в*) и единичное состояние (рис. 18.5, *д*) основной системы.

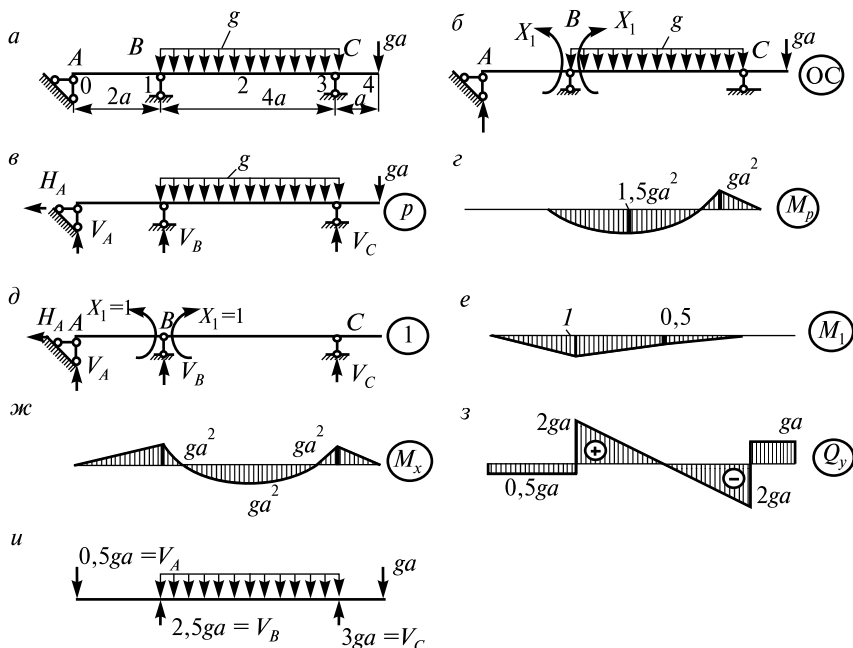


Рис. 18.5: *а* — рассчитываемая балка; *б* — основная система; *в* — грузовое состояние; *г* — эпюра изгибающих моментов в основной системе; *д* — единичное состояние; *е* — единичная эпюра изгибающих моментов; *ж* — окончательная эпюра изгибающих моментов; *з* — окончательная эпюра поперечных сил; *и* — схема балки и опорные реакции

Условием деформации основной системы является отрицание взаимного угла раскрытия сечения над средней (промежуточной) опорой (отрицание разности углов поворота левого и правого сечений балки над средней опорой).

Запишем уравнение деформаций

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Определим единичные и грузовые перемещения:

$$\delta_{11} = \int_l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 dz}{EI} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4a \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{2a}{EI};$$

$$\Delta_{1p} = \int_l \frac{\bar{M}_1 M_p dz}{EI} = \frac{4a}{6EI} \left[ 1 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{3}{2} ga^2 \cdot \frac{1}{2} + ga^2 0 \right] = \frac{2ga^3}{EI}.$$

После подстановки полученных значений в уравнение деформаций найдем лишнее неизвестное

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{2ga^2 EI}{EI \cdot 2a} = -ga^2.$$

Знак минус указывает, что направление изгибающего момента, принятое предварительно, не совпадает с действительным.

Построим эпюру изгибающих моментов для заданной статически неопределимой балки. Это можно сделать двумя способами.

По *первому* способу найденное значение  $X_1$  и заданную нагрузку прикладывают к основной системе. Поскольку она является статически определимой, после вычислений опорных реакций по уравнениям статики построение окончательной эпюры  $M$  не вызывает особых затруднений.

По *второму способу* ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов определяются на основании принципа независимости действия сил в виде алгебраической суммы ординат двух эпюр: исправленной эпюры моментов  $\bar{M}_1 X_1$  и грузовой эпюры  $M_p$ :

$$M_{kx} = \bar{M}_{1k} X_1 + M_{pk}. \quad (18.3)$$

В расчетной практике обычно применяют второй способ. Воспользуемся им и определим изгибающие моменты в сечениях 0, 1, 2, 3, 4:

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 + 0 = 0; \\ M_1 &= 1(-ga^2) + 0 = -ga^2; \\ M_2 &= 0,5(-ga^2) + 1,5 ga^2 = ga^2; \\ M_3 &= 0 - ga^2 = -ga^2; \\ M_4 &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Построенная по полученным значениям эпюра изгибающих моментов  $M_x$  показана на рис. 18.5, *ж*.

Правильность построенной окончательной эпюры изгибающих моментов  $M_x$  можно установить, воспользовавшись деформационной (кинематической) проверкой.

Кинематическая проверка состоит в умножении окончательной эпюры изгибающих моментов  $M_x$  (рис. 18.5, *ж*) на единичную  $\bar{M}_1$  (рис. 18.5, *е*). Должен получиться нуль, так как в заданной системе вертикальное перемещение сечения балки, находящейся на промежуточной опоре, равно нулю:

$$\Delta_{\text{исум}} = \int_l \frac{\bar{M}_1 M_x dz}{EI} = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{1}{2} ga^2 \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{4a}{6} (-ga^2 \cdot 1 + 4ga^2 \cdot \frac{1}{2}) \right] = 0.$$

Следовательно, проверка выполняется.

Используя выражение, аналогичное (18.3), можно построить эпюру поперечных сил. Однако, как правило, в расчетной практике построение эпюры поперечных сил  $Q_y$  выполняется по окончательной эпюре изгибающих моментов, исходя из дифференциальной зависимости

$$Q_y = \frac{dM}{dz} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (18.4)$$

где  $\alpha$  — угол наклона, составляемый касательной к эпюре моментов с осью стержня.

При этом поперечная сила будет положительна, если ось (базис) эпюры поворачивается кратчайшим путем до совмещения с касательной к эпюре моментов (по часовой стрелке), построенной со стороны растянутого волокна.

Найдем  $Q_y$  на участках балки, где эпюра изгибающих моментов изменяется по линейному закону:

участок 0–1:  $Q_y = \operatorname{tg} \alpha_1 = -(ga^2)/2a = -0,5ga^2$  (поворот против часовой стрелки);

участок 3–4:  $Q_y = \operatorname{tg} \alpha_2 = ga^2/a = ga$  (поворот по часовой стрелке).

На участке, где эпюра моментов очерчена по квадратной параболе (участок 1–3), поперечная сила изменяется по линейному закону. Для таких участков можно построить эпюру поперечных сил как для балки на двух опорах, которая загружена внешней нагрузкой и дополнительными опорными моментами. Величины опорных моментов равны ординатам окончательной эпюры  $M_x$ , взятым на границах рассматриваемого участка.

Построим для этого участка эпюру  $Q_y$ , как для балки на двух опорах (рис. 18.6, *а*).

Составляя уравнения равновесия, получим значения опорных реакций:

$$\sum m_1 = 0; V_3 = 2ga; m_3 = 0; V_1 = 2ga.$$

Найденные значения реакций определяют ординаты поперечных сил в сечениях по концам рассматриваемого участка выделенной балки.

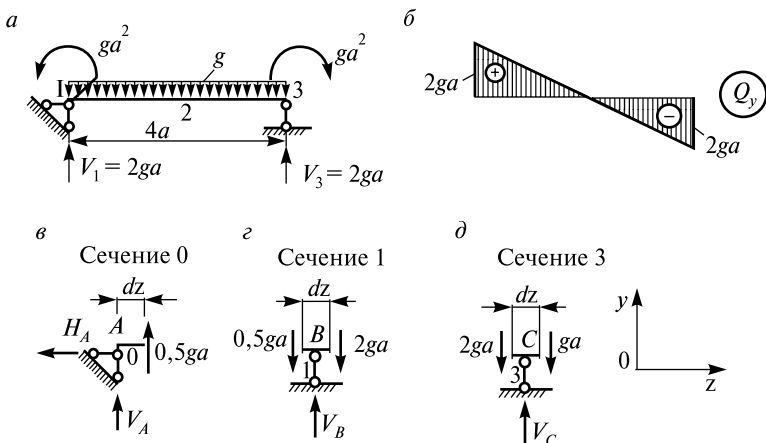


Рис. 18.6: *a* — рассматриваемый участок ВС балки; *б* — эпюра поперечных сил; *в*, *г*, *д* — пояснения к определению опорных реакций в закреплениях *A*, *B*, *C*

Используя метод сечений, запишем выражение для  $Q_y$  на рассматриваемом участке (рис. 18.6, *б*):

$$Q_y = V_1 - gz = 2ga - gz.$$

Положение нулевой точки на эпюре  $Q_y$  ( $z = 2a$ ) определяет положение вершины параболы; изгибающий момент в этом сечении достигает экстремального значения ( $M_x^{\text{экстр}} = ga^2$ ).

Окончательная эпюра поперечных сил показана на рис. 18.5, *з*.

По эпюре  $Q_y$  легко определяются опорные реакции в заданной статически неопределимой балке как «скачки» на эпюре  $Q_y$ . На рис. 18.6, *в*, *г*, *д* даны подробные пояснения найденных реакций, они получены из рассмотрения равновесия опорного узла и элемента балки конечной длины, выделенного в месте разрывов на эпюре  $Q_y$ . Для опорных узлов *A*, *B*, *C* имеем:

$V_A = 0,5ga$ , реакция направлена вниз (рис. 18.6, *в*);

$V_B = 0,5ga + 2ga = 2,5ga$ , направлена вверх (рис. 18.6, *г*);

$V_C = 2ga + ga = 3ga$ , направлена вверх (рис. 18.6, *д*).

Для проверки найденных реакций отсечем балку от опор и приложим вместо них найденные реакции, а также действующую на балку нагрузку (рис. 18.5, *и*).

Составим уравнение равновесия

$$\sum Y = -0,5ga + 2,5ga + 3ga - 4ga - ga = 0.$$

Следовательно, проверка выполняется.

## 18.4. Статически неопределимые рамы

При изучении схематизации элементов конструкций было условлено, что *рамой* называется стержневая система, состоящая из отдельных стержней (стоек и ригелей), во всех или некоторых узлах жестко соединенных между собой, вследствие чего изгиб одного из них вызывает деформацию других прилегающих к нему стержней.

Стержневые элементы, воспринимающие вертикальные сжимающие (растягивающие) силы, называются *стойками*, а горизонтальные элементы — *ригелями*.

Метод сил, использованный при расчете статически неопределимых балок, легко распространить на расчет статически неопределимых рам. Последовательность расчета рассмотрим на примере.

**Пример 18.2.** Для рамы (рис. 18.7, *а*) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил. Найти опорные реакции.

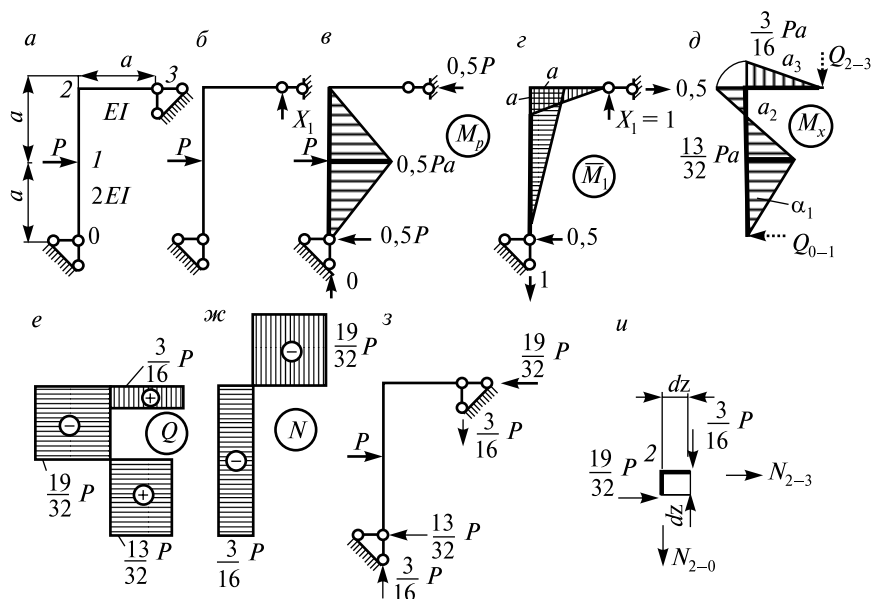


Рис. 18.7: *а* — рассчитываемая рама; *б* — основная система; *в* — грузовое состояние и эпюра изгибающих моментов в основной системе; *г* — единичное состояние и единичная эпюра изгибающих моментов; *д* — окончательная эпюра изгибающих моментов; *е* — эпюра поперечных сил; *ж* — эпюра продольных сил; *з* — схема рамы и опорные реакции; *и* — узел 2 рамы

*Решение.* На раму наложены четыре связи: две шарнирно-неподвижные опоры. Статика для плоской системы сил дает три уравнения равновесия, следовательно, система имеет одну «лишнюю» связь, т.е. *один раз статически неопределима*.

Выбираем основную систему, отбросив вертикальную связь на правой опоре (рис. 18.7, б). Построим грузовую эпюру изгибающих моментов  $M_p$  (рис. 18.7, в) и единичную эпюру изгибающих моментов  $M_1$  (рис. 18.7, г) от силы  $X_1 = 1$  в основной системе.

Запишем каноническое уравнение метода сил для определения лишнего неизвестного:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Физический смысл этого уравнения заключается в том, что перемещения в основной системе, вызванные внешней нагрузкой и «лишним» неизвестным, должны быть такими же, как и в заданной системе (отрицание вертикального перемещения правой опоры).

Определяем единичное  $\delta_{11}$  и грузовое  $\Delta_{1P}$  перемещения.

Для их вычисления воспользуемся *правилом Верещагина*. Когда на данном участке обе эпюры линейны, совершенно безразлично, на каком из них брать площадь и на каком — ординату. Вычисление коэффициента  $\delta_{11}$  не требует комментариев:

$$\delta_{11} = \int_l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1 dz}{EI} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot aa \cdot \frac{2}{3} a + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} a = \frac{2a^3}{3EI}.$$

Коэффициент  $\Delta_{1P}$  вычислен как произведение площади ломаной эпюры изгибающих моментов  $M_p$  (рис. 18.7, в) на ординату линейной эпюры изгибающих моментов  $M_1$  (рис. 18.7, г), взятой под центром тяжести площади эпюры  $M_p$  (здесь площадь ломаной эпюры рассматривается как предельное выражение криволинейной эпюры).

$$\Delta_{1P} = \int_l \frac{\bar{M}_1 M_p dz}{EI} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{2} \cdot 2a \cdot \frac{a}{2} = \frac{Pa^3}{8EI}.$$

Решая каноническое уравнение, находим:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{Pa^3 \cdot 3EI}{8EI \cdot 2a^3} = -\frac{3}{16} P.$$

Построим эпюру изгибающих моментов для заданной статически неопределимой рамы. Для этого найдем изгибающие моменты в сечениях 0, 1, 2, 3 (рис. 18.7, а), используя выражение (18.3):

$$M_0 = 0; \quad M_1 = a/2 ((-3/16)P) + Pa/2 = (13/32)Pa;$$

$$M_2 = a ((-3/16)P) + 0 = (-3/16)Pa; \quad M_3 = 0.$$



Построенная по полученным значениям окончательная эпюра изгибающих моментов  $M_x$  показана на рис. 18.7, *д*.

Произведем проверку окончательной эпюры моментов.

Статическая проверка удовлетворяется, так как узел рамы находится в равновесии.

Деформационная проверка. Окончательная эпюра изгибающих моментов (рис. 18.7, *д*) получена с использованием основной статически определимой системы и может пониматься как эпюра в статически определимой системе при действии на нее заданной нагрузки и лишнего неизвестного  $X_1$ . Если окончательную эпюру изгибающих моментов  $M_x$  умножим на эпюру  $M_1$  (рис. 18.7, *з*), то получим вертикальное перемещение точки приложения силы  $X_1$ . Но это перемещение должно быть равно нулю, так как лишнее неизвестное найдено из условия, что перемещение по его направлению равно нулю. Вычислим это перемещение:

$$\Delta_{1\text{сум}} = \int_l \frac{\bar{M}_1 M_x dz}{EI} = \frac{1}{2EI} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{13}{32} Pa + \frac{a}{6} \left( \frac{a}{2} \cdot \frac{13}{32} Pa + 4 \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{13}{32} Pa - \frac{3}{16} Pa - a \cdot \frac{3}{16} Pa \right) \right] -$$

$$- \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} aa \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16} Pa = 0.$$

Полученный результат деформационной проверки говорит о правильности составления и решения канонического уравнения.

По эпюре изгибающих моментов построим эпюру поперечных сил, используя зависимость (18.4):

участок 0—1

$$Q_{0-1} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{13Pa}{32a} = \frac{13}{32} P;$$

участок 1—2

$$Q_{1-2} = \operatorname{tg} \alpha_2 = -\frac{\frac{3}{16} Pa + \frac{13}{32} Pa}{a} = -\frac{19}{32} P;$$

участок 2—3

$$Q_{2-3} = \operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{3Pa}{16a} = \frac{3}{16} P.$$

Эпюра поперечных сил  $Q$  показана на рис. 18.7, *е*.

Используя эпюру поперечных сил, построим эпюру продольных сил. Для этого вырежем узел 2 и к нему взамен отброшенных стержней приложим поперечные силы и неизвестные продольные силы (рис. 18.7, *и*). При этом положительные поперечные силы направляем так, чтобы они вращали узел по часовой стрелке. Искомые продольные силы направим от сечения, т.е. будем считать положительными (предполагаем, что стержень работает на растяжение). Полученный результат со знаком минус означает, что тот или другой стержень сжат.

Для заданного узла 2 (рис. 18.7, *и*) имеем: на ригеле поперечная сила положительная и равна  $(3/16)P$ , т.е. она стремится повернуть вырезанный узел по ходу часовой стрелки. На стойке поперечная сила отрицательная и равна  $(19/32)P$ , т.е. стремится повернуть узел против хода часовой стрелки.

Продольные силы, действующие в стойке и в ригеле, определим из уравнений равновесия:

$$\sum X = N_{2-3} + \frac{19}{32}P = 0; \quad \sum Y = N_{2-0} + \frac{3}{16}P = 0.$$

Находим, что

$$N_{2-3} = -\frac{19}{32}P; \quad N_{2-0} = -\frac{3}{16}P.$$

Эпюра продольных сил  $N$  показана на рис. 18.7, *ж*. Если бы в узле действовали внешние сосредоточенные силы, то они участвовали бы в уравнениях равновесия.

По эпюре  $Q$  и  $N$  легко определить опорные реакции в заданной статически неопределимой раме. На рис. 18.7, *з* показаны истинные направления опорных реакций и действующая на раму нагрузка.

Проверим равновесие всех сил, действующих на раму (см. рис. 18.7, *з*). Для этого составим три уравнения статики:

$$\begin{aligned} \sum X &= P - (19/32)P - (13/32)P = 0; \quad \sum Y = (3/16)P - (3/16)P = 0; \\ \sum M_0 &= Pa - (19/32)P \cdot 2a + (3/16)Pa = 0, \end{aligned}$$

т.е. рама находится в равновесии. Следовательно, статический расчет рамы произведен правильно.

Стержневые системы, подобные рассмотренной в примере 18.2, называют иногда *внешне статически неопределимой*, или говорят, что *система статически неопределима относительно опорных реакций*. «Лишними» могут быть и внутренние связи системы, т.е. связи, препятствующие взаимным линейным и угловым перемещениям каких-либо сечений стержней.

Если рассмотреть раму, показанную на рис. 18.8, *а*, то опорные реакции рамы при любой нагрузке можно определить из уравнений

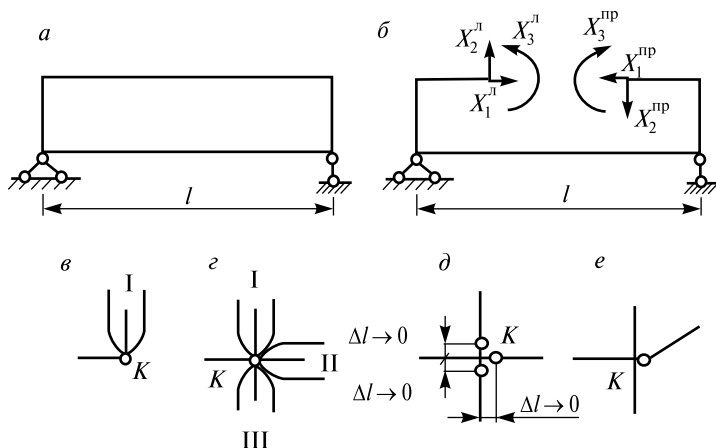


Рис. 18.8. Трижды статически неопределимая рама (а), ее основная система (б); простые (в, е) и полные (г, д) шарниры

статики, но внутренние силовые факторы с помощью метода сечений определить нельзя. Системы, подобные изображенной на рис. 18.8, а, называют иногда *внутренне статически неопределимыми*.

Прямоугольная рама (рис. 18.8, а) представляет собой замкнутый контур. Она трижды статически неопределимая. Для превращения ее в статически определимую, необходимо разрезать один из ее элементов (рис. 18.8, б) и тем самым устранить три «лишние» связи. Реакциями этих связей являются продольная сила  $X_1$ , поперечная сила  $X_2$  и изгибающий момент  $X_3$  в месте разреза. Эти реакции при помощи уравнений статики найти нельзя. В аналогичных условиях в смысле статической неопределимости находится любой замкнутый контур, который всегда трижды статически неопределим.

*Замкнутым контуром* называется контур, состоящий из ряда элементов (прямых, криволинейных), жестко (без шарниров) связанных между собой и образующих замкнутую цепь.

Шарнир, соединяющий два стержня (рис. 18.8, в), снижает степень статической неопределимости на единицу. Для этого случая можно составить одно дополнительное уравнение

$$\sum M_k^I = 0.$$

Такой шарнир будем называть *простым*, или *одиночным*.

На рис. 18.8, *г* показан *сложный (полный)* шарнир, он эквивалентен трем простым шарнирам (рис. 18.8, *д*). Для этого случая можно составить три дополнительных уравнения статики:

$$\sum M_K^I = 0; \sum M_K^{II} = 0; \sum M_K^{III} = 0,$$

где I, II, III — части конструкции, расположенные по одну сторону от сечения, проведенного через шарнир *K*.

В общем случае шарнир, соединяющий *s* стержней (*сложный шарнир*), эквивалентен (*s* — 1) простым шарнирам. При этом шарнир должен пересекать все примыкающие к узлу стержни. Показанный на рис. 18.8, *е* шарнир является простым. Таким образом, для определения степени *n* статической неопределимости можно пользоваться формулой

$$n = 3k - w_0, \quad (18.5)$$

где *k* — число замкнутых контуров;

*w*<sub>0</sub> — число простых (одиночных) шарниров.

При использовании формулы (18.5) в число замкнутых контуров следует включать области, образованные опорными стержнями и основанием сооружения (диском земли).

Рассмотрим несколько примеров определения степени статической неопределимости рамных систем. На рис. 18.9 показано несколько рам. Последовательно изучим их.

Во всех схемах выделим неподвижный диск, в качестве которого обычно используется земля. На исследуемых схемах воображаемые линии показаны пунктиром.

Для рамы, показанной на рис. 18.9, *а*, замкнутых контуров четыре (они отмечены римскими цифрами), семь шарниров одиночных и один двойной (шарниры отмечены арабскими цифрами). Применив формулу (18.5) получим:

$$i = 3k - w = 3 \cdot 4 - 9 = 3.$$

Рассуждая аналогичным образом для рассматриваемых на рис. 18.9 схем, получим:

для схемы, показанной на рис. 18.9, *б*,

$$i = 3k - w = 3 \cdot 4 - 8 = 4;$$

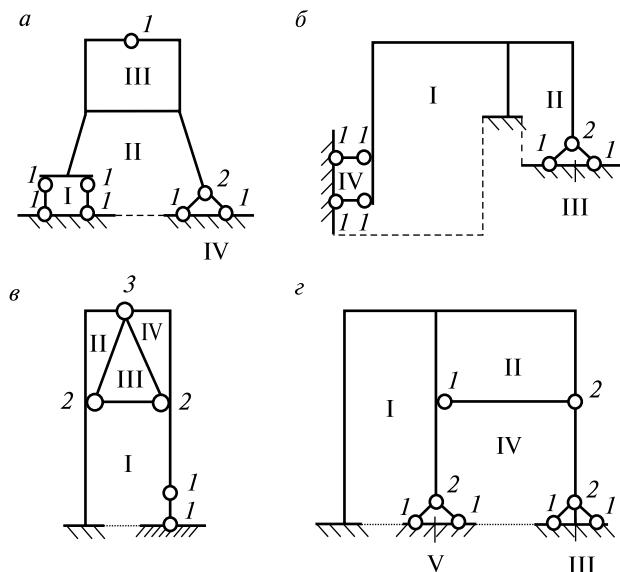


Рис. 18.9. Статически неопределимые рамы: (а, в) — трижды; (б, г) — четырежды

для схемы, показанной на рис. 18.9, в,

$$i = 3k - u = 3 \cdot 4 - 9 = 3;$$

для схемы, показанной на рис. 18.9, г,

$$i = 3k - u = 3 \cdot 5 - 11 = 4.$$

После установления степени статической неопределимости необходимо выбрать основную систему. Для этой цели надо путем отбрасывания связей превратить заданную систему в простую статически определимую систему. Требования, предъявляемые к основной системе, следующие: она должна быть геометрически и мгновенно неизменяемой, должна быть простой и удобной для построения эпюр изгибающих моментов от действия неизвестных и нагрузок.

Можно составить несколько вариантов основной системы. На рис. 18.10, а показана рама, которая трижды статически неопределимая. Первый вариант основной системы (рис. 18.10, б) получен из заданной рамы отбрасыванием заделки у правой стойки. Полу-

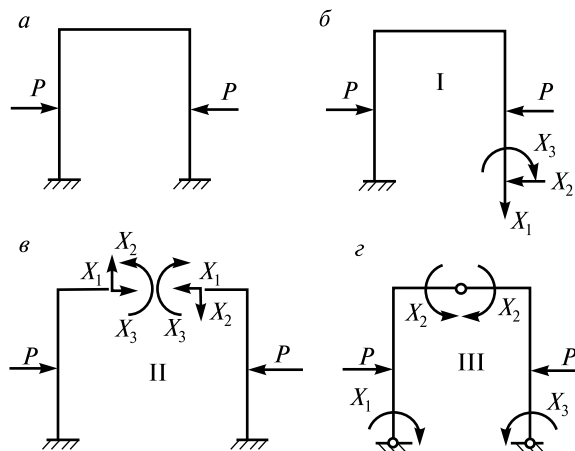


Рис. 18.10. Варианты основной системы для трижды (а) статически неопределимой рамы: б — первый вариант основной системы; в — второй вариант основной системы; г — третий вариант основной системы

ченная статически определимая система представляет собой ломаный стержень, заделанный на левом конце. Вместо заделки на правом конце приложены три внутренних силовых фактора:  $X_1$  — продольная сила,  $X_2$  — поперечная сила,  $X_3$  — изгибающий момент.

На рис. 18.10, в показан другой вариант основной системы, полученной из заданной системы разрезанием горизонтального элемента (ригеля). Основная система состоит теперь из двух ломаных стержней, каждый из которых заделан на одном конце, поэтому статически определима. В месте разреза приложены к обоим стержням, внутренние силовые факторы:  $X_1$  — продольная сила,  $X_2$  — поперечная сила,  $X_3$  — изгибающий момент.

В третьем варианте основной системы введены три шарнира (рис. 18.10, г). Введение шарниров снимает моментную связь (уничтожает внутренние моменты). Для того чтобы полученная основная система была эквивалентна заданной системе, необходимо приложить в местах введения шарниров внешние моменты  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ . Как было уже ранее установлено, при расчете основной системы исходят из того, что она будет деформироваться так же, как заданная система. Тогда для определения неизвестных  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  (рис. 18.10, б) послужит условие равенства нулю вертикального и

горизонтального перемещений и угла поворота заделки правой стойки. Применяя принцип независимости действия сил, можно записать уравнения перемещений в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} + \Delta_{1X_3} + \Delta_{1P} = 0; \\ \Delta_2 &= \Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} + \Delta_{2X_3} + \Delta_{2P} = 0; \\ \Delta_3 &= \Delta_{3X_1} + \Delta_{3X_2} + \Delta_{3X_3} + \Delta_{3P} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.6)$$

Первый индекс у каждого из перемещений указывает номер неизвестного, в направлении которого происходит данное перемещение; второй индекс указывает причину, вызывающую перемещение. Так, например,  $\Delta_{2X}$  — перемещение в направлении силы  $X_2$  (горизонтальное перемещение) от момента  $X_3$ ;  $\Delta_{2P}$  — перемещение в том же направлении от действия заданной нагрузки.

Вводя единичные перемещения, приходим к следующей форме уравнений перемещений:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.7)$$

Физический смысл любого  $i$ -го уравнения (18.7) можно сформулировать так: *суммарное перемещение по направлению  $i$ -й отброшенной связи равно нулю.*

Все перемещения, обозначенные буквой  $\delta$ , называются единичными перемещениями. Так:

$\delta_{ik}$  — перемещение в основной системе точки приложения силы  $X_i$  по ее направлению от действия силы  $X_k = 1$ ;

$\delta_{ii}$  — перемещение в основной системе точки приложения силы  $X_i$  по ее направлению от действия силы  $X_i = 1$ ;

$\Delta_{iP}$  — перемещение в основной системе точки приложения силы  $X_i$  по ее направлению от действия заданной нагрузки.

Коэффициенты  $\delta$  с одинаковыми индексами называются *главными коэффициентами*. Они всегда *положительны и не равны нулю*. Все остальные коэффициенты  $\delta$  называются *побочными*. Они мо-

гут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Чем больше побочных коэффициентов обратится в ноль, тем более удачной является выбранная основная система. Перемещения  $\Delta_{iP}$  называют *свободными членами уравнения*, они как побочные коэффициенты могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены вычисляются по формуле Максвелла—Мора, из которой следует теорема Максвелла о взаимности перемещений между побочными коэффициентами с обратными индексами:

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}. \quad (18.8)$$

Для основной системы, содержащей два и более неизвестных, их вычисление представляет собой довольно трудоемкий процесс и при ручном счете нередко приводит к ошибкам в окончательных результатах расчета. Во избежание этих ошибок рекомендуется проводить проверки: универсальную, построчную и постолбцовую.

Для выполнения универсальной проверки надо построить так называемую суммарную единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_S$  в основной системе при одновременном действии на нее всех неизвестных, равных единице. Эту же эпюру  $\bar{M}_S$  можно получить и путем алгебраического сложения построенных ранее единичных эпюр по формуле

$$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n. \quad (18.9)$$

Алгебраическая сумма всех коэффициентов при неизвестных, входящих в уравнение (18.7), можно представить так:

$$\delta_{SS} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik}. \quad (18.10)$$

С другой стороны, эта же сумма может быть вычислена перемножением суммарной единичной эпюры  $M_S$  самой на себя:

$$\delta_{SS} = \sum \int \frac{\bar{M}_S^2}{EI} ds. \quad (18.11)$$

Из сравнения этих результатов делают вывод о правильности вычислений коэффициентов при неизвестных.



Если универсальная проверка дает отрицательный результат, для отыскания ошибки проводится *построчная проверка*. При проведении этой проверки вычисляют:

$$\delta_{iS} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik};$$

$$\delta_{iS} = \sum \int \frac{\bar{M}_S \bar{M}_i}{EI} ds. \quad (18.12)$$

Если построчные проверки дают расхождение только в одной строке уравнения, то ошибку следует искать при вычислении главного коэффициента этой строки. Если же расхождение имеется одновременно в двух строках канонического уравнения, то ошибку следует искать в побочном коэффициенте, содержащемся в тех двух строках, для которых построчные проверки не сходятся.

Для проверки правильности вычисления всех свободных членов проводится *постолбцовая проверка*:

$$\Delta_{SP} = \sum_{i=1}^n \Delta_{iP} = \sum \int \frac{\bar{M}_S M_P}{EI} ds. \quad (18.13)$$

Описанные проверки имеет смысл проводить, если есть полная уверенность в правильности построения единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов.

Подставив найденные коэффициенты и свободные члены в систему канонических уравнений (18.7) и решив ее, можно определить истинные значения неизвестных метода сил  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Последовательность расчета дважды статически неопределимой рамы рассмотрим на конкретном примере.

**Пример 18.3.** Построить эпюры  $M, Q, N$  для рамы, изображенной на рис. 18.11, а. Расчетные данные:  $a = 2 \text{ м}$ ,  $g = 50 \text{ кН/м}$ ,  $EI = 20\,000 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$ . Найти угол поворота и горизонтальное перемещение узла  $D$ .

*Решение.* Определим степень статической неопределимости рамы, используя формулу (18.5):

$$n = 3k - u = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

Заданная рама два раза статически неопределима.

Выбираем основную систему метода сил отбрасыванием горизонтальной связи в шарнирно-неподвижной опоре  $A$  и врезанием шарнира в заделку  $B$ . Выбранная основная система вместе с неизвестными  $X_1$  и  $X_2$  показана на рис. 18.11, б.

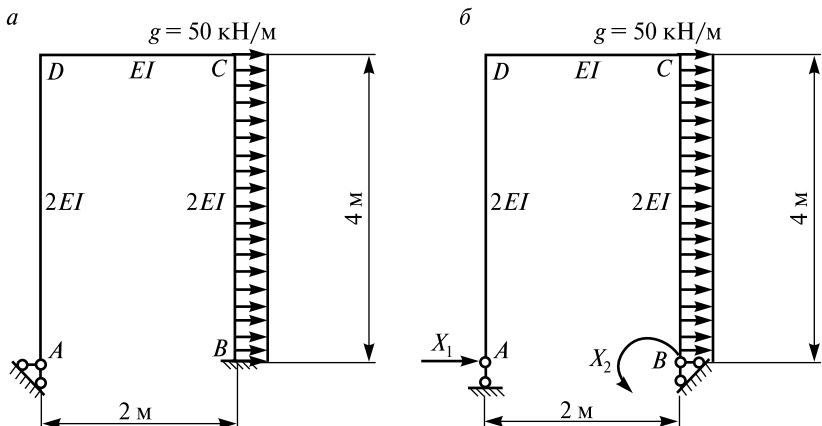


Рис. 18.11: *a* — заданная дважды статически неопределимая рама; *б* — выбранная основная система

Запишем систему канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{cases}$$

Последовательно загружая основную систему силами  $\bar{X}_1$ ,  $\bar{X}_2$  и внешней нагрузкой, построим единичные эпюры  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  и грузовую эпюру  $M_P$ , а также суммарную единичную эпюру  $\bar{M}_S$  (рис. 18.12, *a*, *б*, *в*, *г*).

Вычислим единичные и грузовые коэффициенты системы канонических уравнений метода сил:

$$\delta_{11} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dz = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = \frac{160}{3EI};$$

$$\delta_{22} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_2^2}{EI} dz = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{8}{3EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI} dz = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1 = -\frac{8}{EI};$$

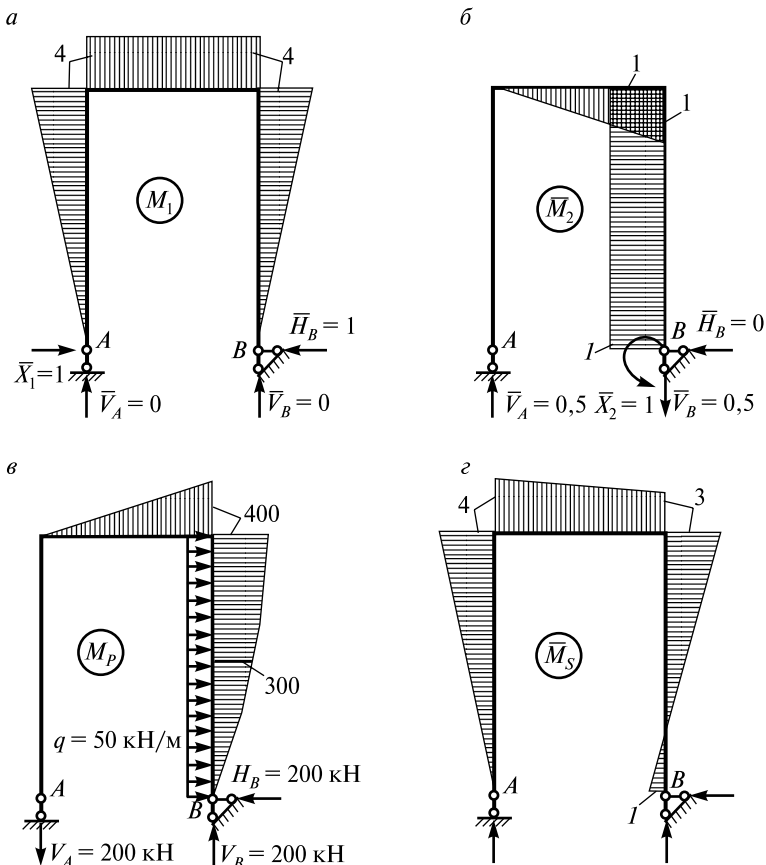


Рис. 18.12: а, б — единичные эпюры изгибающих моментов; в — грузовая эпюра изгибающих моментов; г — суммарная единичная эпюра

$$\delta_{SS} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{160}{3} - 2 \cdot 8 + \frac{8}{3} \right] = \frac{40}{EI};$$

$$\begin{aligned} \delta_{SS} = \sum \int_L \frac{\bar{M}_S^2}{EI} dz &= \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{2}{6EI} \times \\ &\times [2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4] + \frac{4}{6 \cdot 2EI} [2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 3] = \frac{40}{EI}. \end{aligned}$$

Результаты совпали, следовательно, единичные коэффициенты  $\delta_{ij}$  вычислены верно.

Вычислим грузовые коэффициенты:

$$\Delta_{1P} = \sum_L \int \frac{M_1 M_P}{EI} dz = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 400 \cdot 4 + \frac{4}{6 \cdot 2EI} \times [4 \cdot 400 + 4 \cdot 2 \cdot 300 + 0] = \frac{8800}{3EI};$$

$$\Delta_{2P} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_2 M_P}{EI} dz = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 400 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{4}{6 \cdot 2EI} \times [1 \cdot 400 + 4 \cdot 1 \cdot 300 + 0] = -\frac{800}{EI};$$

$$\Delta_{SP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \frac{8800}{3EI} - \frac{800}{EI} = \frac{6400}{3EI};$$

$$\Delta_{SP} = \sum_L \int \frac{\bar{M}_S M_P}{EI} dz = \frac{2}{6EI} [2 \cdot 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 400 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 400] +$$

$$+ \frac{4}{6 \cdot 2EI} [3 \cdot 400 + 4 \cdot 1 \cdot 300 + 0] = \frac{6400}{3EI}.$$

Проверка показала, что грузовые коэффициенты  $\Delta_{iP}$  найдены верно.

Подставим вычисленные значения коэффициентов в каноническое уравнение:

$$\frac{160}{3EI} X_1 - \frac{8}{EI} X_2 + \frac{8800}{3EI} = 0;$$

$$-\frac{8}{EI} X_1 + \frac{8}{3EI} X_2 - \frac{800}{EI} = 0.$$

Решив систему канонических уравнений, найдем значения неизвестных сил в отброшенных связях:

$$X_1 = -18,18 \text{ кН}; X_2 = 245,45 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Построим исправленные эпюры изгибающих моментов умножением единичных эпюр  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  на найденные значения неизвестных сил  $X_1$  и  $X_2$  (рис. 18.13, а, б). Затем по формуле

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + M_P$$

построим окончательную эпюру изгибающих моментов  $M$  (рис. 18.14, а).

Проведем проверки окончательной эпюры изгибающих моментов. Статическая проверка дает положительный результат, так как все узлы рамы находятся в равновесии. В качестве примера на рис. 18.14, б показано равновесие узла С. Такая проверка необходима, но недостаточна. Она может служить контролем правильности суммирования эпюр.

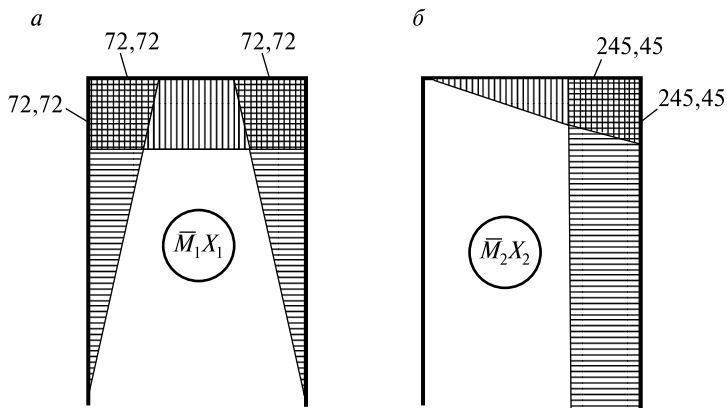


Рис. 18.13: *a*, *б* — исправленные единичные эпюры изгибающих моментов

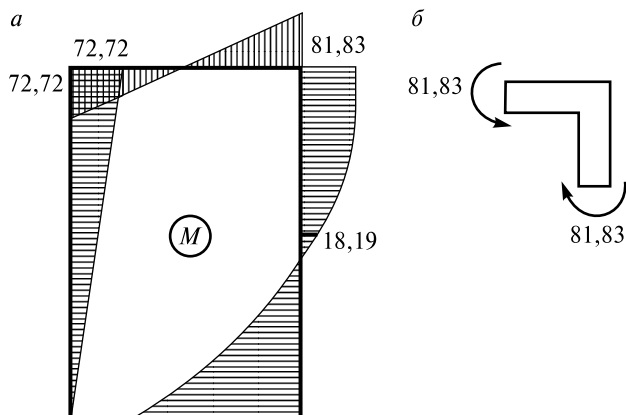


Рис. 18.14: *a* — окончательная эпюра изгибающих моментов; *б* — равновесие узла *C* рамы

Проведем деформационную проверку. Для этой цели выполним сопряжение окончательной эпюры изгибающих моментов с единичными эпюрами:

$$\Delta_1 = \sum \int_L \frac{\bar{M}_1 M}{EI} dz = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 72,72 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \times \\ \times (81,83 - 72,72) \cdot 2 \cdot 4 + \frac{4}{6 \cdot 2EI} [4 \cdot 81,83 + 4 \cdot 2 \cdot 18,19 + 0] = -\frac{193,92}{EI} + \frac{194,05}{EI} = \frac{0,13}{EI}.$$

Вычислим относительную погрешность. Она составляет

$$\varepsilon = \frac{0,13}{193,92} \cdot 100\% = 0,07\%.$$

$$\Delta_2 = \sum_L \int \frac{\bar{M}_2 M}{EI} dz = \frac{2}{6EI} [2 \cdot 0 \cdot 72,72 + 2 \cdot 1 \cdot (-81,83) + 72,72 \cdot 1 - 81,83 \cdot 0] + \frac{4}{6 \cdot 2EI} [1 \cdot (-81,83) + 4 \cdot 1 \cdot (-18,19) + 1 \cdot 245,45] = -\frac{30,31}{EI} + \frac{30,29}{EI} = -\frac{0,02}{EI};$$

$$\varepsilon = \frac{0,02}{30,29} \cdot 100\% = 0,07\%.$$

Допустимой считается погрешность до 1—2 %. На основе выполненных проверок убеждаемся в правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов.

По окончательной эпюре изгибающих моментов  $M$  построим эпюру поперечных сил  $Q$ .

На участках, где эпюра изгибающих моментов линейная, численное значение поперечной силы равно тангенсу угла наклона эпюры моментов к ее оси. Вычислим поперечные силы на таких участках:

участок  $AD$ :  $Q = 72,72/4 = 18,18$  кН;

участок  $DC$ :  $Q = -(72,72 + 81,83)/2 = -77,28$  кН.

На участке  $BC$  эпюра моментов имеет вид квадратной параболы, а поперечная сила изменяется по линейному закону. Представим этот участок в виде балки на двух опорах, загруженной заданной нагрузкой и опорными моментами, взятыми из окончательной эпюры  $M$  (рис. 18.14,  $a$ ). Построим для этого участка эпюру  $Q$  (рис. 18.15,  $a$ ).

Окончательная эпюра поперечных сил  $Q$  для всей рамы показана на рис. 18.15,  $b$ .

По эпюре поперечных сил построим эпюру продольных сил  $N$  последовательным вырезанием узлов  $D$  и  $C$  рамы (рис. 18.16).

Последовательно проецируя все силы на оси координат  $x$  и  $y$ , получим:

$$\text{узел } D: \quad \sum X = 0; \quad N_{DC} - 18,18 = 0; \quad N_{DC} = 18,18 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = 0; \quad 77,28 - N_{DA} = 0; \quad N_{DA} = 77,28 \text{ кН.}$$

Составим уравнения равновесия для узла  $C$ :

$$\sum Y = 0; \quad -77,28 - N_{CB} = 0; \quad N_{CB} = -77,28 \text{ кН.}$$

Эпюра  $N$  показана на рис. 18.17,  $a$ .

Выполним окончательную проверку. Рассечем исходную статически неопределимую раму в точках  $A$  и  $B$ . Приложив внутренние усилия, возника-

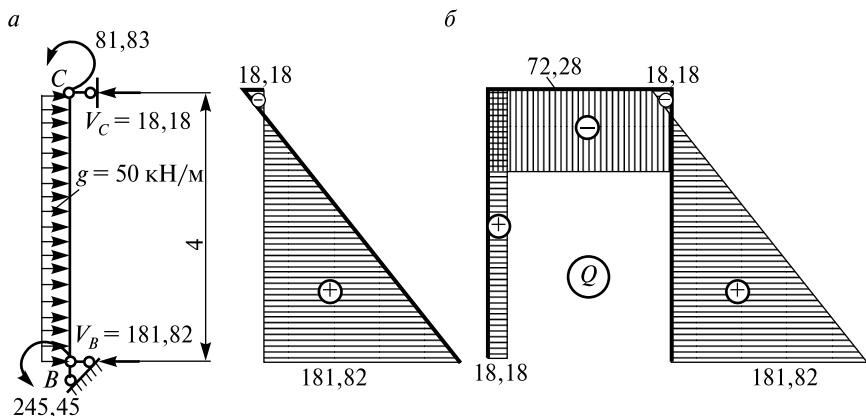


Рис. 18.15: *а* — участок *BC* рамы; *б* — эпюра поперечных сил для рамы

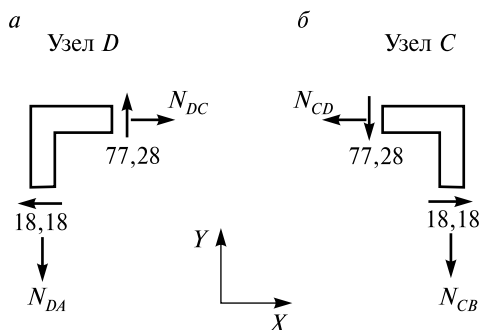


Рис. 18.16: *а, б* — вырезанные узлы *D* и *C* рамы

ющие в сечениях для опорных точек *A* и *B* (рис. 18.17, *б*). Составим уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0; \quad -18,18 - 181,82 + 50 \cdot 4 = 0; \\ \sum Y &= 0; \quad -77,28 + 77,28 = 0.\end{aligned}$$

Статическая проверка выполняется.

Найдем горизонтальное перемещение узла *D*. Для этого приложим к узлу основной системы горизонтальную безразмерную единичную силу  $\bar{P}=1$  (рис. 18.18, *а*) и построим единичную эпюру моментов  $\bar{M}_V$ . Горизонтальное перемещение узла *D* равно:

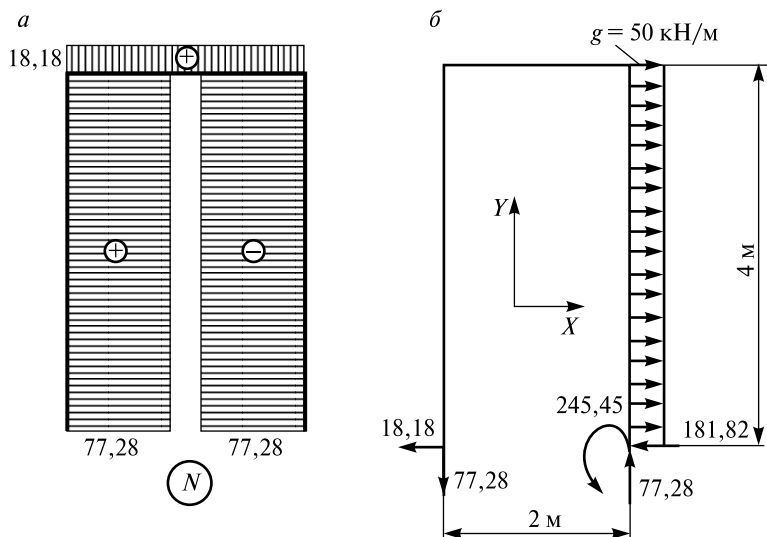


Рис. 18.17: *a* — эпюра продольных сил для рамы; *б* — схема рамы и опорные реакции

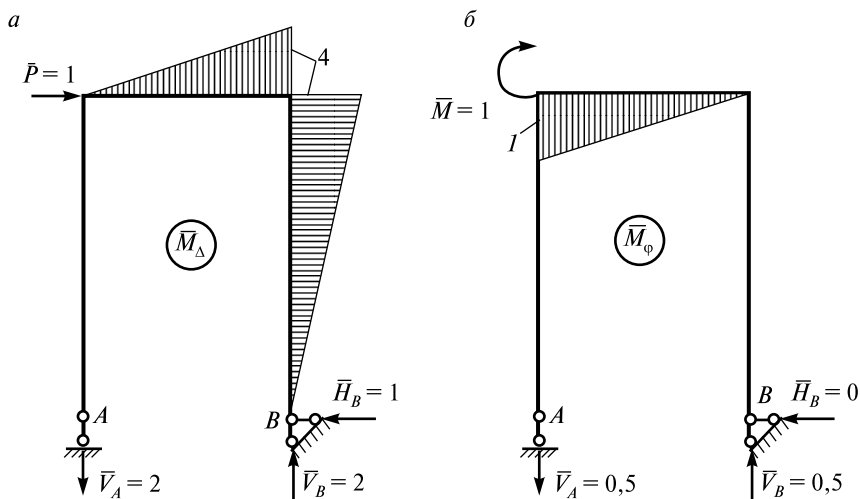


Рис. 18.18: *a, б* — единичные эпюры изгибающих моментов для определения горизонтального перемещения и угла поворота узла *D*



$$\begin{aligned}\Delta_D &= \sum_L \int \frac{\bar{M}_\Delta M}{EI} dz = \frac{2}{6EI} [2(-4) \cdot (-81,83) + (-4)72,72] + \\ &+ \frac{4}{6 \cdot 2EI} [(-4) \cdot (-81,83) + 4(-2) \cdot (-18,19) + 0 \cdot 245,45] = \\ &= \frac{836,6}{EI} = \frac{836,6}{20\,000} = 0,0139 \text{ м} = 13,9 \text{ мм}.\end{aligned}$$

Определим угол поворота узла  $D$ . Приложим к указанному узлу основной системы безразмерный единичный момент  $\bar{M}=1$  (рис. 18.18, б) и построим единичную эпюру моментов  $\bar{M}_\phi$ . Угол поворота узла  $D$  составляет:

$$\begin{aligned}\phi_D &= \sum_L \int \frac{\bar{M}_\phi M}{EI} dz = \frac{2}{6EI} [2 \cdot 1 \cdot 72,72 + 1(-81,83)] = \\ &= \frac{63,61}{EI} = \frac{63,61}{20\,000} = 0,00106 = 0,061^\circ.\end{aligned}$$

Таким образом, угол поворота и горизонтальное перемещение узла  $D$  вычислены.

## Глава 19. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 19.1. Общие понятия

К сложному сопротивлению относятся те виды нагружений стержня, при которых в его поперечных сечениях одновременно возникает не менее двух внутренних силовых факторов.

Расчет стержней на сложное сопротивление начинается с определения внутренних силовых факторов в ряде сечений для отыскания наиболее опасного сечения. Чтобы выполнить эту задачу, в первую очередь необходимо назначить систему координат. Начало координат помещаем в центре тяжести сечения, ось  $z$  направим по оси стержня, в сторону отброшенной части. Оси  $x$  и  $y$  направим по главным осям инерции сечения, выбрав положительные направления так, как показано на рис. 19.1. Этой правой системой координат будем пользоваться в дальнейшем.

При решении задач сложного сопротивления необходимо ввести правила знаков для внутренних усилий (рис. 19.1, а). Изгибаю-

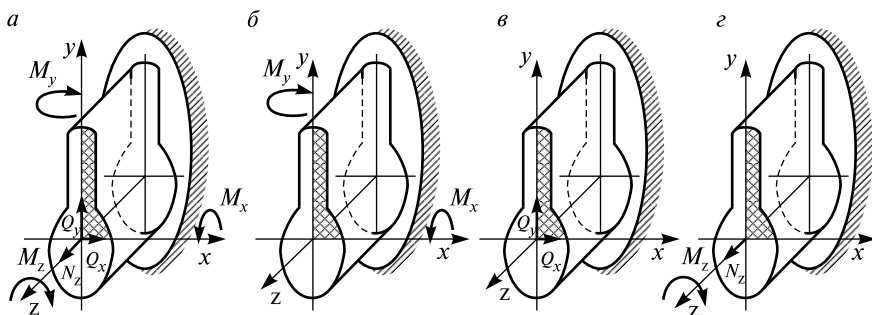


Рис. 19.1. Сочетание компонент внутренних усилий, действующих на стержень (а); правило знаков для изгибающих моментов (б); правило знаков для поперечных сил (в); правило знаков для продольной силы и крутящего момента (г)

щие моменты  $M_x$ ,  $M_y$  примем положительными, если они в точках принадлежащей положительной четверти координатной плоскости вызывают растягивающие напряжения (рис. 19.1, б).

Поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$  считаются положительными, если их направления совпадает с направлением соответствующей оси (рис. 19.1, в).

Продольную силу  $N_z$  будем считать положительной, если она в рассматриваемом сечении вызывает растягивающие напряжения (рис. 19.1, г).

Крутящий момент  $M_z$  будем считать положительным, если при взгляде на отсеченную часть со стороны внешней нормали будет установлено, что момент стремится повернуть сечение по ходу часовой стрелки (рис. 19.1, г).

Термин «сложное сопротивление» используется для того, чтобы подчеркнуть, что в рассматриваемом поперечном сечении внутренние силы приводятся к нескольким компонентам. Встречаются различные сочетания компонент внутренних сил.

*Косой изгиб* — такой случай изгиба стержня, при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента в сечении не совпадает ни с одной из главных осей инерции. Внутренние силы приводятся к двум изгибающим моментам  $M_x$  и  $M_y$ , а продольная сила  $N = 0$  (см. рис. 19.1, б).

Если поперечное сечение стержня таково, что любая его центральная ось главная (примером таких сечений — круг, квадрат, кольцо), то независимо от положения силовой плоскости изгиб будет прямым.

*Изгиб с растяжением или сжатием* — такой вид загрузки стержня, когда, кроме изгибающего момента, в сечении действует и продольная сила. Крутящий момент  $M_z$  отсутствует.

*Изгиб с кручением* — такой вид деформации стержня, при котором в его сечениях одновременно действуют изгибающие и крутящие моменты.

*Общий случай сложного сопротивления* — такой вид загрузки стержня, когда в его поперечном сечении действуют все внутренние силовые факторы: продольная сила  $N$ , изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$ , крутящий момент  $M_z$ .

В каждом из приведенных сочетаний внутренних силовых факторов возможны ненулевые поперечные силы  $Q_x$ ,  $Q_y$ .

Расчет стержня, работающего на сложное сопротивление, разбивается на ряд этапов.

1. Построение эпюр внутренних усилий. Построенные эпюры позволяют выделить те «опасные» сечения, в которых разрушение материала стержня наиболее вероятно.

2. Для того чтобы получить в общем случае сложного сопротивления формулу для определения нормальных напряжений, воспользуемся принципом независимости действия сил, по которому необходимо определить напряжения от каждого компонента внутренних сил в отдельности, а затем их сложить.

Суммарные растягивающие нормальные напряжения в точках, принадлежащих первой четверти, вызывают три внутренних силовых фактора: продольная сила  $N$  и два изгибающих момента —  $M_x$  и  $M_y$ .

Тогда

$$\sigma_z = N/A + (M_x/I_x)y + (M_y/I_y)x. \quad (19.1)$$

Задача определения касательных напряжений в поперечном сечении стержня, находящегося в условиях сложного сопротивления, решается сложнее. Например,  $\tau$  в какой-либо точке при изгибе в двух плоскостях можно определить отдельно для каждого случая, а затем их геометрически сложить:

$$\tau_y = (Q_y S_x^{\text{отс}} / I_x b); \quad \tau_x = (Q_x S_y^{\text{отс}} / I_y d); \quad \tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}. \quad (19.2)$$

При кручении круглого стержня в точках поперечного сечения возникают касательные напряжения, определяемые по формуле

$$\tau_k = (M_k / I_\rho) r. \quad (19.3)$$

Полное касательное напряжение  $\tau$  на площадке в какой-либо точке может быть вычислено с помощью геометрического суммирования, касательных напряжений от изгиба (19.2) и от кручения (19.3).

По построенным эпюрам можно установить точки, в которых возникает наиболее опасное сочетание нормальных и касательных напряжений.

3. В «опасных» точках найденного «опасного» сечения выполняется проверка прочности. Используется избранная гипотеза прочности, в соответствии с которой формулируется предельное состояние.

## 19.2. Построение эпюр внутренних усилий для стержня с ломаной осью

Построение эпюр внутренних усилий для пространственного стержня с ломаной осью производится в том же порядке, как и для обычных балок, т.е. используется метод сечений.

Внутренние силовые факторы  $N_z$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$  определяются в каждом сечении стержня исходя из условий равновесия одной из рассматриваемых частей стержня.

На эпюрах  $N_z$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  и  $M_z$  постановка знака необходима; на эпюрах изгибающих моментов знаки можно не ставить. Расположение эпюр  $N_z$  и  $M_z$  по отношению к оси произвольное; плоскость эпюр  $Q_x$  и  $Q_y$  обязательно совпадает с плоскостями скольжения соответствующей оси.

Плоскости эпюр изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  непременно перпендикулярны соответствующим осям. Сами эти эпюры располагаются со стороны растянутого волокна.

Рассмотрим пример построения эпюр.

**Пример 19.1.** Для конструкции, состоящей из трех стержней (рис. 19.2, а) и испытывающей действие трех сил  $F_1 = 50$  кН,  $F_2 = 100$  кН,  $F_3 = 150$  кН, построить эпюры внутренних силовых факторов для стержня  $CD$ .

*Решение.* Прежде чем перейти к определению внутренних силовых факторов, необходимо выбрать пространственную прямоугольную систему координат  $x, y, z$ .

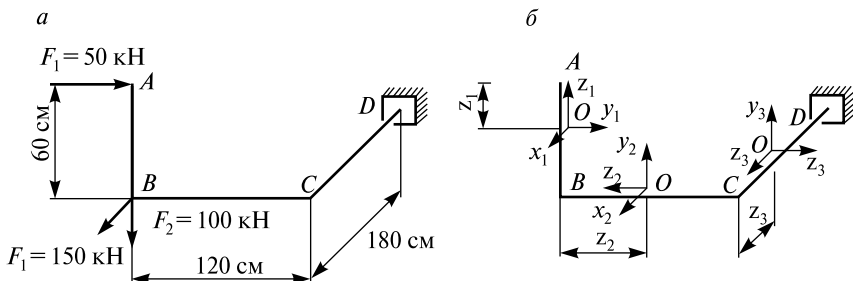


Рис. 19.2: а — схема стержней и их загрузка; б — скользящая система координат

Будем использовать *скользящую систему координат*. Ось, совпадающая с осью бруса, обозначается осью  $Oz$ , а две другие оси совместим с главными осями инерции сечения. На каждом последующем участке система координат получается из предыдущей поворотом относительно одной из осей до совмещения оси  $Oz$  с направлением продольной оси стержня (рис. 19.2, б).

**Определим внутренние силовые факторы для стержня  $CD$ .** Поскольку построение эпюр  $N_z$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$  и  $M_z$  не отличается от построения соответствующих эпюр для прямолинейных стержней и было изучено ранее, приведем необходимые вычисления и построения без особых комментариев.

В сечении 3—3:  $0 \leq z_3 \leq 1,8$  м.

**Построение эпюры продольных сил.** Рассечем стержень  $CD$  плоскостью, которая перпендикулярна к его оси (сечение 3—3 рис. 19.3, а). Одну часть стержня, например, содержащую заделку, отбросим и действие ее на оставшуюся часть заменим внутренними усилиями, приложенными в сечении 3—3.

Еще раз отметим, что в стержне, закрепленном при помощи жесткой заделки, целесообразно оставлять ту часть стержня, которая не закреплена, так как тогда не требуется определять опорные реакции.

Из условия равновесия отсеченной части, проецируя силы на ось  $z_3$ , получим:

$$\sum z_3 = 0; \quad 150 - N_z = 0; \quad N_z = 150 \text{ кН.}$$

Ординаты эпюры продольной силы будем откладывать по любой оси  $x_3$  или  $y_3$ , но строго по положительному направлению в соответствии с найденным значением и в выбранном масштабе (рис. 19.3, б).

**Построение эпюр поперечных сил.** Поступим аналогичным образом, а именно из условия равновесия отсеченной части, спроектировав силы на ось  $x_3$  и  $y_3$ , получим значения поперечных сил соответственно относительно оси  $x$  и  $y$ :

$$\sum x_3 = 0; \quad 50 - Q_x = 0; \quad Q_x = 50 \text{ кН;}$$

$$\sum y_3 = 0; \quad -100 - Q_y = 0; \quad Q_y = -100 \text{ кН.}$$

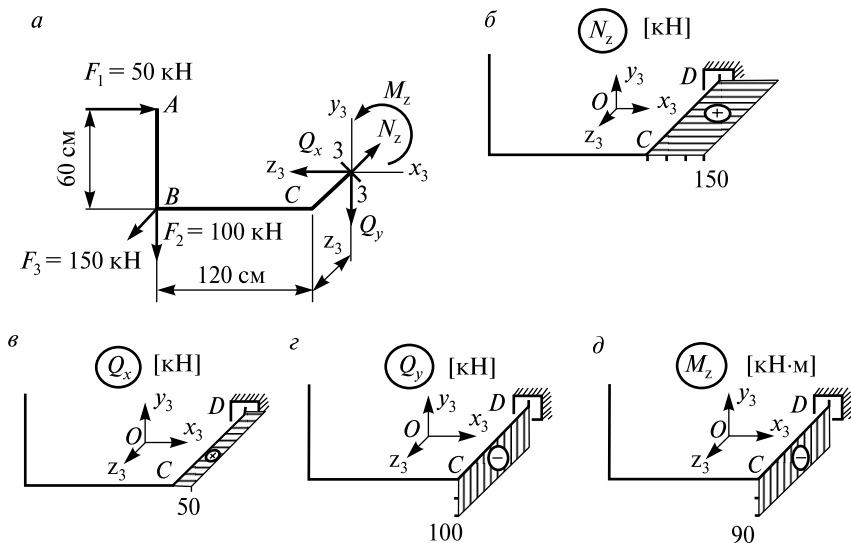


Рис. 19.3: *a* — внутренние усилия, действующие в сечении стержня *CD* 3—3; *б* — эпюра продольных сил в стержне *CD*; *в*, *г* — эпюры поперечных сил в стержне *CD*; *д* — эпюра крутящего момента

Полученные значения поперечной силы отложим строго по своим осям в соответствующем масштабе (рис. 19.3, *в*, *г*).

**Построение эпюры крутящих моментов.** Крутящий момент в сечениях участка *CD* будет равен:

$$\sum M_z = 0; \quad 50 \cdot 0,60 - 100 \cdot 1,20 - M_z = 0; \quad M_z = -90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюру крутящих моментов можно построить как по оси *x*, так и по оси *y*. Построим эпюру по оси *y* (рис. 19.3, *д*).

**Построение эпюр изгибающего момента.** Покажем в сечении 3—3 изгибающий момент  $M_{x_3}$  в положительном направлении (рис. 19.4, *а*).

Известно, что изгибающий момент  $M_{x_3}$  в сечении равняется сумме моментов внешних сил, приложенных к отсеченной части  $\sum m_{x_3} = 0$ . Изгибающий момент  $M_{x_3}$  создает сила  $F_2$  с плечом  $z_3$ :  $M_{x_3} = 100z_3$ , что означает изменение этого изгибающего момента по длине участка стержня по линейному закону.

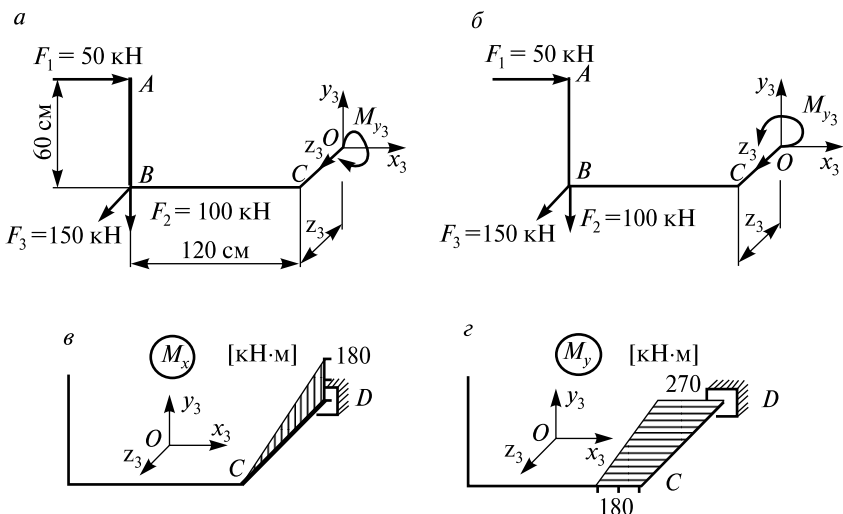


Рис. 19.4: а, б — схема стержня  $CD$  для построения эпюр  $M_x$  и  $M_y$ ; в, г — эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$

Определим значение изгибающего момента: при  $z_3 = 0$  ( $M_x = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ) и  $z_3 = 1,80 \text{ м}$  ( $M_x = 180 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ).

Положение растянутого волокна определяется рассмотрением заделанной в месте сечения отсеченной части. Поскольку получился знак плюс,  $M_{x_3}$  вызывает в точках первой четверти координатной плоскости растягивающие нормальные напряжения.

**Построение эпюры изгибающего момента  $M_{y_3}$**  (рис. 19.4, б). Изгибающий момент  $M_y$  создают две силы:  $F_1$  с плечом  $z_3$  и сила  $F_3$  с постоянным плечом 1,2 м. Учтем, что моменты сил  $F_1$  и  $F_3$  направлены в одну сторону и вызывают сжатие волокна в первой четверти координатной плоскости. Тогда имеем:

$$\sum M_y = 0; M_y = -50z_3 - 150 \cdot 1,20;$$

$$z_3 = 0; M_y = -180 \text{ кН} \cdot \text{м}; z_3 = 1,80; M_y = -90 - 180 = -270 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Таким образом, все внутренние силовые факторы определены. На рис. 19.4, в, г показаны эпюры  $M_x$  и  $M_y$  для стержня  $CD$ .

Построенные эпюры внутренних силовых факторов позволяют выявить положение опасного сечения. Опасное сечение у стержня  $CD$  — у заделки. Это сечение будем обозначать римскими цифрами. В заключение отметим, что стержень  $CD$  испытывает на общий случай сложный сопротивления.

### 19.3. Косой изгиб

Рассмотрим стержень произвольного поперечного сечения (рис. 19.5, *a*). На стержень действует сила  $F$ , направленная под углом  $\alpha$  к главной центральной оси. В дальнейшем плоскость, определяемая осью  $Oz$  и вектором нагрузки, будем называть силовой плоскостью. Линия пересечения поперечного сечения с силовой плоскостью называется *силовой линией*.

Разложим силу  $F$  на составляющие, лежащие в главных плоскостях стержня. Из рис. 19.5, *a* видно, что

$$F_x = F \sin \alpha; \quad F_y = F \cos \alpha.$$

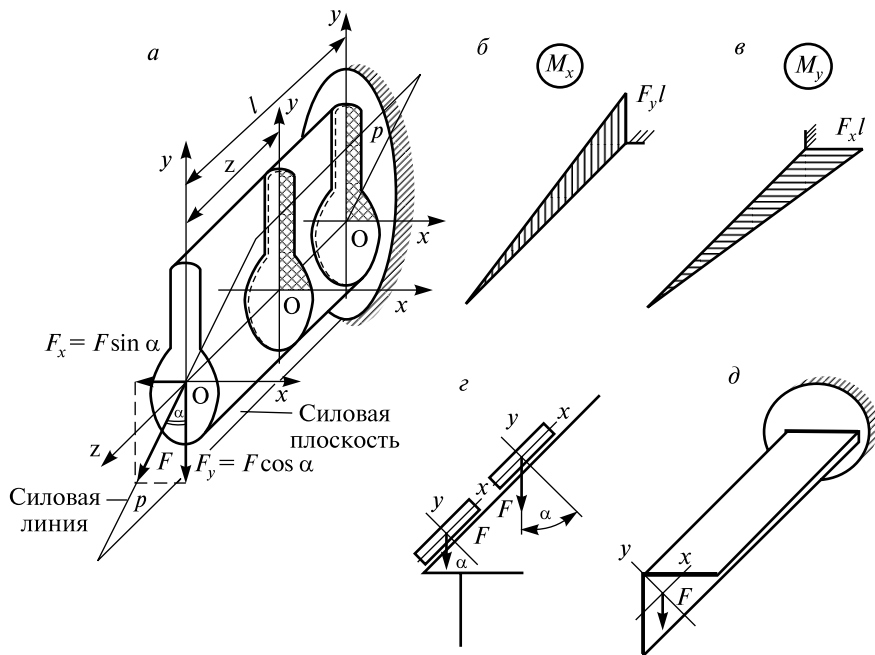


Рис. 19.5. Косой изгиб:

*a* — консоль стержня, к которому приложена сосредоточенная сила, направленная под углом  $\alpha$  к главной центральной оси; *b*, *c* — эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ ; *z* — обрешетка кровли; *d* — уголок в стене



Запишем выражение внутренних силовых факторов в произвольном сечении стержня на расстоянии  $z$  от свободного конца, рассматривая не закрепленную часть.

В сечения  $n-n$  (рис. 19.5, а)  $0 \leq z \leq l$  м:

$$\begin{aligned} Q_x &= -F_x = -F \sin \alpha; & Q_y &= -F_y = -F \cos \alpha; \\ M_x &= F_y z = Fz \cos \alpha; & M_y &= F_x z = Fz \sin \alpha. \end{aligned}$$

Получено, что внутренние силы приводятся к двум изгибающим моментам  $M_x$  и  $M_y$  (рис. 19.5, б, в). Такой вид нагружения принято называть *косым изгибом*.

Так, обрешетка кровли работает на косой изгиб. Вертикальная нагрузка  $F$  (рис. 19.5, г) от веса кровли и от собственного веса обрешетки наклонена к главной оси под углом  $\alpha$ .

Собственный вес уголка, заделанного одним концом в стену (рис. 19.5, д), также будет вызывать косой изгиб, так как главные оси поперечного сечения уголка наклонены по отношению к нагрузке.

Нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения стержня определяются формулой

$$\sigma = (M_x / I_x) y + (M_y / I_y) x, \quad (19.4)$$

где  $M_x$  и  $M_y$  — изгибающие моменты в рассматриваемом поперечном сечении;  
 $I_x$  и  $I_y$  — главные центральные моменты инерции поперечного сечения;  
 $x$  и  $y$  — координаты точки, в которой определяется напряжение.

Из выражения (19.4) видно, что при косом изгибе напряжения  $\sigma$  изменяются в соответствии с координатами  $x$  и  $y$  по линейному закону. Поэтому концы векторов напряжений, построенных над сечением, образуют плоскость. Так как в этом уравнении отсутствует постоянное слагаемое, плоскость эпюры проходит через начало координат. Как и при прямом изгибе, в сечении существует нейтральная линия, в точках которой напряжения равны нулю. Положив в (19.4) нормальные напряжения равными нулю, получим уравнение нулевой линии:

$$\begin{aligned} (M_x / I_x) y_o + (M_y / I_y) x_o &= 0, \\ \text{или } y &= (-M_y I_x / M_x I_y) x. \end{aligned} \quad (19.5)$$

Нулевая линия проходит через начало координат, а ее наклон к оси  $x$  определяется тангенсом угла  $\varphi$  (рис. 19.6,  $a$ ), для которого из (19.5) получим

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \alpha. \quad (19.6)$$

Как видим из (19.6), когда моменты инерции неодинаковы,  $I_x \neq I_y$ , углы  $\alpha$  и  $\varphi$  взаимно не равны, т.е. нулевая линия не перпендикулярна силовой плоскости.

Напомним, что углы  $\alpha$  и  $\varphi$ , отсчитываемые против хода часовой стрелки, считаются положительными.

Если консольную балку с высоким прямоугольным сечением ( $h \gg b$ ) нагрузить на конце наклонной силой  $F$  (рис. 19.6,  $b$ ), то можно видеть, что перемещения сечений будут происходить не в направлении действия силы  $F$ , а под углом к нему, что является следствием косо го изгиба.

Косой изгиб может быть весьма опасен, особенно для сечений с резко различными моментами инерции  $I_x$  и  $I_y$  (для узких и высо-

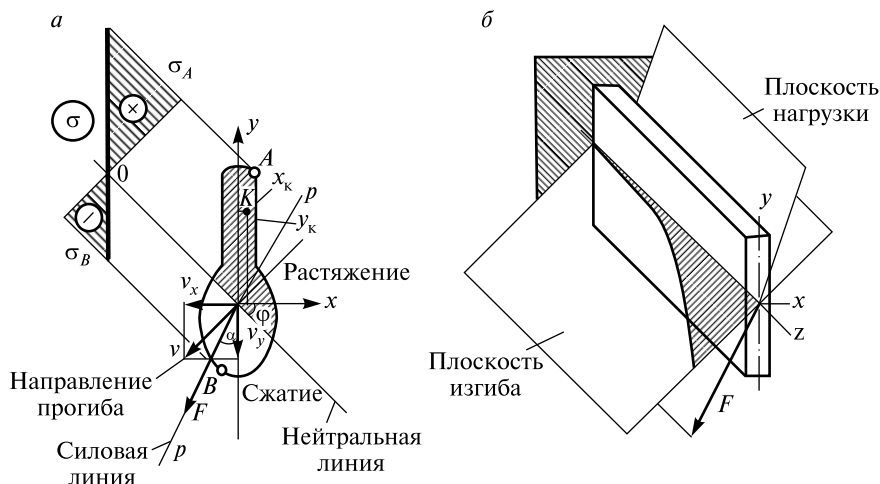


Рис. 19.6. Напряжения и направление прогиба при косо м изгибе ( $a$ ); загрузе-  
ние консольной балки с высоким прямоугольным сечением ( $b$ )

ких сечений). Для сечений, у которых  $I_x = I_y$ , имеем  $\alpha = \varphi$ , т.е. любая центральная ось является главной, и изгиб от любой наклонной силы превращается в плоский изгиб. Такими сечениями, например, являются круг, квадрат, равносторонний треугольник.

Вернемся к определению наибольших напряжений при косом изгибе, т.е. к вопросу об опасных точках сечения.

*Опасные точки* — точки, наиболее удаленные от нейтральной линии. Найти их можно различными способами в зависимости от обстоятельств. При сложной форме поперечного сечения удобно прибегать к графическому методу. Для этого сечение вычерчивают в масштабе и проводят главные центральные оси  $x$  и  $y$ . Затем, определив по выражению (19.6) угол  $\varphi$ , строят нейтральную линию. С помощью линейки и треугольника (рис. 19.7) находят точки, наиболее удаленные от нейтральной линии, а их координаты берут непосредственно с чертежа. Подставив значения координат в (19.4), получают значения наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} y_A + \frac{M_y}{I_y} x_A;$$

$$\sigma_B = \frac{M_x}{I_x} (-y_B) + \frac{M_y}{I_y} (-x_B).$$

Возможны два приема использования этих формул. В соответствии с первым из них все величины подставляются в формулу со своими знаками; считается положительным изгибающий момент, вызывающий растяжение волокон, которые принадлежат первой четверти выбранной системы координат. Отметим, что это правило знаков действует лишь при вычислениях по уже приведенным формулам.

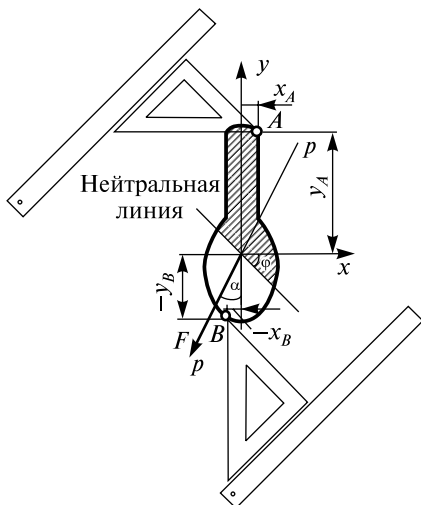


Рис. 19.7. Графический способ нахождения опасных точек при косом изгибе

В соответствии с другим приемом все величины подставляются в формулы по абсолютной величине, а затем ответу для составляющих напряжений приписывается знак, определяемый физическим смыслом задачи.

В практике решения задач используются оба эти способа.

Перечислим некоторые свойства нейтральной линии:

- 1) нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения;
- 2) нейтральная ось делит сечение на две части: в одной  $\sigma > 0$ , в другой  $\sigma < 0$ ;

3) нормальные напряжения в сечении изменяются прямо пропорционально расстоянию от нейтральной оси, достигая максимальных значений (по модулю) в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения.

**Условие прочности.** Если материал стержня одинаково работает на растяжение и на сжатие, то условие прочности записывается в виде

$$(\sigma_A, \sigma_B)_{\max} \leq [\sigma]. \quad (19.7)$$

Если материал стержня работает на растяжение и на сжатие неодинаково ( $[\sigma_p] \neq [\sigma_c]$ ), то расчет производится отдельно, т.е. проверяются условия прочности на растяжение и на сжатие.

**Прогибы при косом изгибе.** При косом изгибе прогибы определяются на основе принципа независимости действия сил. Прогибы  $v_x$  и  $v_y$  находят отдельно в каждой из главных плоскостей, а затем их геометрическим суммированием определяют полный прогиб. Для бруса, жестко зашпеленного одним концом и нагруженного силой на свободном конце, получим

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{Fl^3}{3EI_y} \sin \alpha\right)^2 + \left(\frac{Fl^3}{3EI_x} \cos \alpha\right)^2}. \quad (19.8)$$

Значение угла наклона этого перемещения к вертикали можно определить из выражения

$$\operatorname{tg} \varphi = (v_x / v_y) = (I_x / I_y) \operatorname{tg} \alpha. \quad (19.9)$$

Следовательно, направление прогиба  $v$  перпендикулярно нулевой линии. Вместе с тем отсюда вытекает важное условие, что направление прогибов не совпадает с направлением действующей силы. Это обстоятельство и послужило причиной того, что изгиб стали называть косым.

**Пример 19.2.** Деревянная балка (рис. 19.8, *a*) прямоугольного сечения  $12 \times 24$  см подвергается действию сосредоточенной силы  $F = 0,25$  кН, приложенной на свободном конце в плоскости поперечного сечения бруса.

Линия действия силы проходит через центр тяжести сечения под углом  $\alpha = 60^\circ$  и лежит в плоскости этого сечения. Построить эпюру нормальных напряжений для опасного сечения и вычислить наибольший прогиб свободного конца бруса.

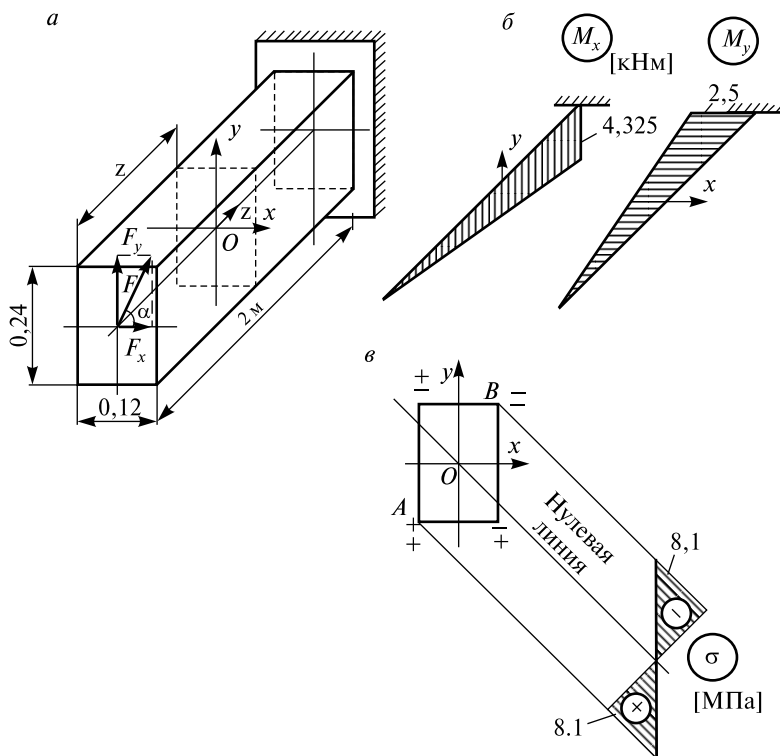


Рис. 19.8: *a* — схема стержня и его нагружение; *б* — эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ ; *в* — эпюра нормальных напряжений в опасном поперечном сечении стержня

*Решение.* Брус работает на косой изгиб. Разложим силу  $F$  на составляющие  $F_x$  и  $F_y$  по главным центральным осям  $Ox$  и  $Oy$  (рис. 19.8, *а*) и вычислим изгибающие моменты; их величину возьмем по модулю. Построим эпюры  $M_x$  и  $M_y$  (рис. 19.8, *б*). Опасным является сечение у заделки:

$$\max |M_x| = F_y l = Fl \sin \alpha = 250 \cdot 2,00 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4,325 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\max |M_y| = F_x l = Fl \cos \alpha = 250 \cdot 2,00 \cdot 0,5 = 2,500 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим моменты инерции поперечного сечения:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13824 \text{ см}^4 = 13824 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

$$I_y = \frac{b^3 h}{12} = \frac{12^3 \cdot 24}{12} = 3456 \text{ см}^4 = 3456 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Для определения опасной точки поперечного сечения бруса предварительно найдем положение нулевой линии:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} = -\frac{2,500}{4,325} \cdot \frac{13824 \cdot 10^{-8}}{3456 \cdot 10^{-8}} = -0,578 \cdot 4 = -2,312,$$

откуда  $\varphi = -66^\circ 37'$ .

Угол  $\varphi$  надо отложить по ходу часовой стрелки от оси  $Ox$  так, чтобы нулевая линия проходила через второй и четвертый квадранты сечения (рис. 19.8, *в*). Наиболее удаленными от нулевой линии являются точки  $A$  и  $B$ . В точке  $A$  поперечного сечения (рис. 19.8, *в*) возникают наибольшие растягивающие напряжения, а в точке  $B$  — наибольшие сжимающие напряжения.

Вычислим наибольшие нормальные напряжения в этих точках:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = \frac{-4325}{13824 \cdot 10^{-8}} (-12 \cdot 10^{-2}) + \frac{-2500}{3456 \cdot 10^{-8}} (-6 \cdot 10^{-2}) = \\ &= 3,754 + 4,340 = 8,094 \approx 8,1 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = \frac{-43250}{13824 \cdot 10^{-8}} (12 \cdot 10^{-2}) + \frac{-25000}{3456 \cdot 10^{-8}} (6 \cdot 10^{-2}) = \\ &= -3,754 - 4,340 = -8,094 \approx -8,1 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 19.8, *в*.

Для рассматриваемого стержня прогиб его свободного конца в вертикальной плоскости составит

$$f_y = \frac{F_y l^3}{3EI_x} = \frac{(F \sin \alpha) l^3}{3EI_x} = \frac{250 \cdot (\sqrt{3}/2) \cdot 2^3}{3 \cdot 13824 \cdot 10^{-8} \cdot 10^9} = 0,4171 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Прогиб стержня в горизонтальной плоскости

$$f_x = \frac{F_x l^3}{3EI_y} = \frac{(F \cos \alpha) l^3}{3EI_y} = \frac{250 \cdot (1/2) \cdot 2^3}{3 \cdot 3456 \cdot 10^{-8} \cdot 10^9} = 0,965 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Полный прогиб свободного конца

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} = 10^{-2} \cdot \sqrt{0,93 + 0,1739} = 1,05 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

**Пример 19.3.** На круглый вертикальный стержень (рис. 19.9, а), заделанный нижним концом, действуют силы  $F_1 = 2 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 4 \text{ кН}$ . Линия действия сил проходит через продольную ось бруса. Для опасного сечения построить эпюру нормальных напряжений.

*Решение.* Построим эпюры внутренних усилий. Брус имеет два участка.

В сечении 1—1  $0 < z_1 < 0,40 \text{ м}$ :

$$N = 0; M_z = 0; M_x = 0; M_y = -2z_1;$$

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_y = 0; \text{ при } z_1 = 0,40 \quad M_y = -0,8 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

В сечении 2—2  $0 < z_2 < 0,60 \text{ м}$ :

$$N = 0; M_x = -4 z_2; \text{ при } z_2 = 0 \quad M_x = 0; \text{ при } z_2 = 0,60 \quad M_x = -2,4 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_y = -2(z_2 + 0,40); z_2 = 0 \quad M_y = -0,8 \text{ кН}\cdot\text{м}; z_2 = 0,60 \quad M_y = -2,0 \text{ кН}\cdot\text{м}; M_z = 0.$$

Построенные эпюры  $M_x$ ,  $M_y$  показаны на рис. 19.9, б. Из анализа эпюр устанавливаем, что опасное сечение — у заделки.

Вычислим результирующий изгибающий момент в опасном сечении (у заделки):

$$M_{\text{из}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{2,4^2 + 2,0^2} = 3,124 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Так же как и при прямом изгибе,  $\sigma = M_{\text{из}}/W_{\text{из}}$ .

Для круглого поперечного сечения

$$W_{\text{из}} = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 0,08^3}{32} = 50,24 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Нормальные напряжения в точках А и В будут равны

$$\sigma_{A,B} = \pm \frac{M_{\text{из}}}{W_{\text{из}}} = \pm \frac{3124}{50,24 \cdot 10^{-6}} \cong \pm 62,0 \text{ МПа.}$$

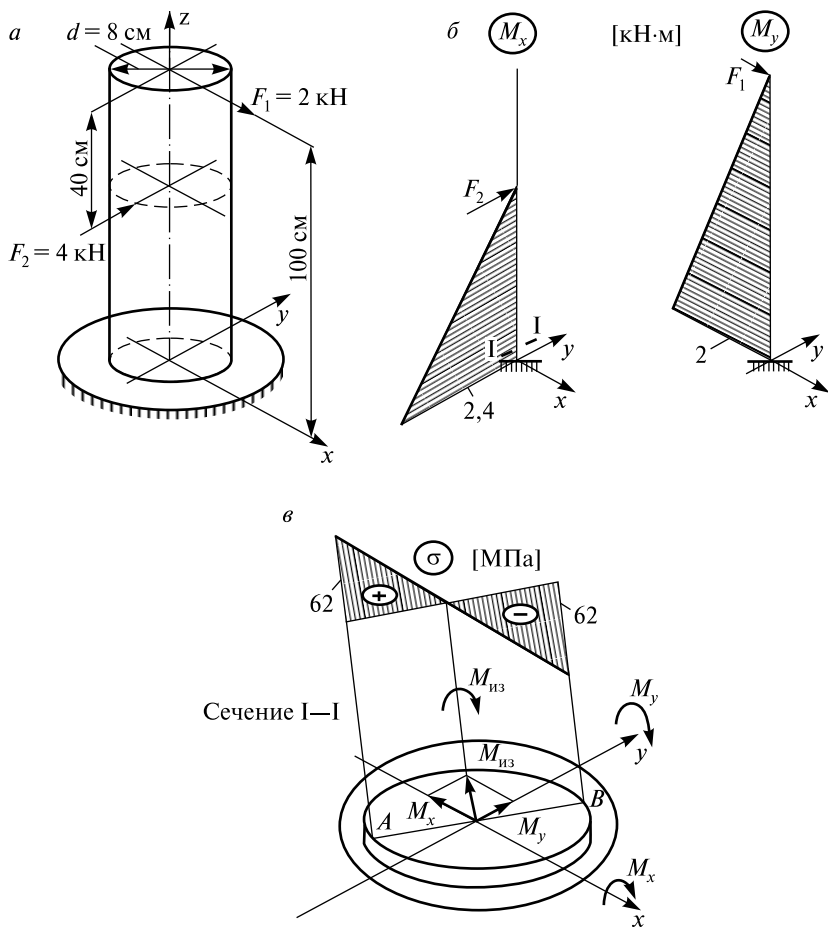


Рис. 19.9: а — схема стержня и его загрузка; б — эпюры изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ ; в — эпюра нормальных напряжений в опасном поперечном сечении стержня

Для построения эпюры нормальных напряжений определим угловой коэффициент нулевой линии (для круглого поперечного сечения  $I_x = I_y$ ):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} = \frac{-2,0}{-2,4} = 0,833; \quad \varphi = 39^\circ 47'.$$



Эпюра нормальных напряжений и напряженное состояние в опасных точках показано на рис. 19.9, *в*.

Считаем необходимым обратить внимание на то, что в рассматриваемом случае при определении напряжений в точке с неизвестными координатами  $x$  и  $y$ , конечно, справедлива формула

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x,$$

но она неудобна для определения наибольших напряжений, так как требует предварительного определения координат опасной точки. Описанный прием позволяет найти максимальные напряжения без определения координат опасной точки.

#### 19.4. Совместное действие изгиба и растяжения или сжатия

При сочетании изгиба с растяжением или сжатием в поперечных сечениях бруса возникают следующие внутренние силовые факторы: продольная сила  $N_z$ , поперечные силы  $Q_x$ ,  $Q_y$  и изгибающий моменты  $M_x$ ,  $M_y$ . Такой случай загрузки бруса изображен на рис. 19.10, *а*. Там же показаны эпюры внутренних силовых факторов (рис. 19.10, *б*), кроме эпюр поперечных сил, которые при расчетах не учитываются.

Очень многие стержни сооружений и машин работают одновременно на изгиб с растяжением или сжатием.

Нормальное напряжение в произвольной точке  $K$  некоторого поперечного сечения (рис. 19.11, *а*) для рассматриваемого случая нагружения определяют по формуле

$$\sigma_{z_K} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_K + \frac{M_y}{I_y} x_K. \quad (19.10)$$

Как и в случае косоугольного изгиба, для наглядного и простого изображения эпюры  $\sigma$  при совместном действии изгиба и растяжения удобно построить нулевую линию  $0-0$ , уравнение которой имеет вид

$$0 = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_0 + \frac{M_y}{I_y} x_0.$$

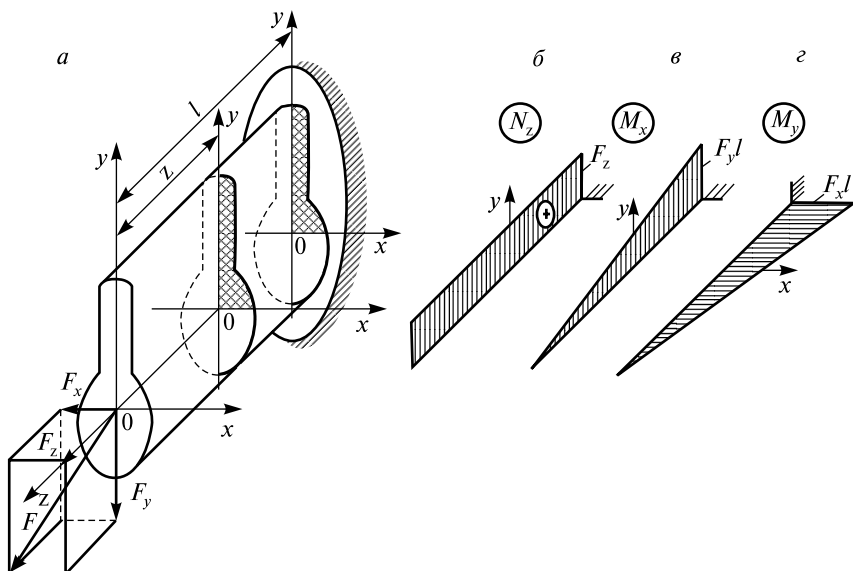


Рис. 19.10. Совместное действие изгиба и растяжения (а); эпюры  $N$ ,  $M_x$  и  $M_y$  (б)

Отрезки, отсекаемые нулевой линией 0—0 на осях координат, будут:

$$a_x = -\frac{NI_y}{M_y A}; \quad a_y = -\frac{NI_x}{M_x A}. \quad (19.11)$$

Зная отрезки, отсекаемые нулевой линией по осям координат, можно найти наиболее удаленные точки от нулевой линии, т.е. точки  $A$ ,  $B$  (рис. 19.11, а). Для сечений произвольной формы положение наиболее напряженных точек устанавливают, смещая нейтральную линию до тех пор, пока она не будет касательной к сечению. Вычислив напряжения в этих точках, построим эпюру нормальных напряжений (рис. 19.11, а).

Теперь остановимся на расчете стержня круглого поперечного сечения. В рассматриваемом сечении отложим в выбранном масштабе вектор момента  $M_x$  вдоль оси  $Ox$ , а вектор  $M_y$  — вдоль оси  $Oy$  (рис. 19.11, б). Условимся направлять эти векторы вдоль соответствующих осей таким образом, чтобы наблюдатель, смот-

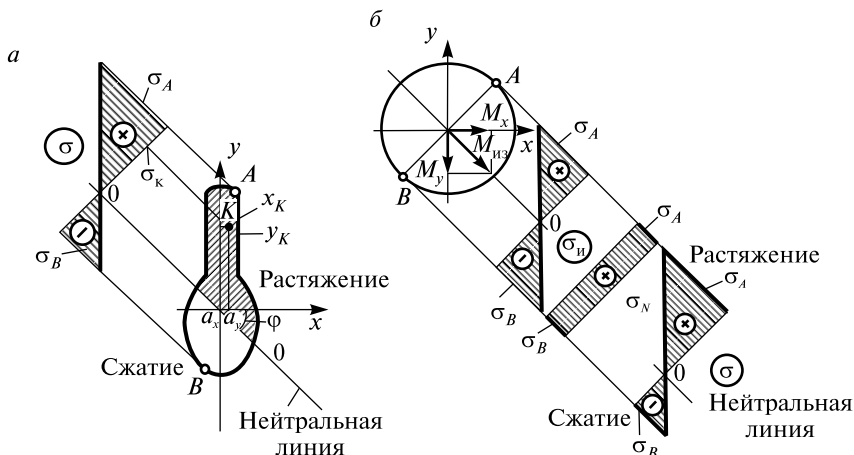


Рис. 19.11. Эпюры нормальных напряжений при совместном действии изгиба и растяжения (а); расчет круглого поперечного сечения стержня (б)

рящий вдоль вектора, видел момент стремящимся повернуть сечение в нашем случае так, чтобы были растянуты волокна в первой четверти.

Сложим геометрически векторы  $M_x$  и  $M_y$  и получим вектор результирующего изгибающего момента

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (19.12)$$

Известно, что в круглом сечении все центральные оси — главные, поэтому нормальные напряжения определим по суммарному изгибающему моменту  $M_{\text{и}}$ . Нулевая линия перпендикулярна силовой, т.е. расположена вдоль вектора  $M_{\text{и}}$ . Нормальные напряжения определим по формуле

$$\max \sigma_{\text{и}} = M_{\text{и}} / W_{\text{и}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} / W_{\text{и}} \leq [\sigma]. \quad (19.13)$$

К полученным нормальным напряжениям от изгиба, добавим равномерно распределенные по сечению нормальные напряжения от растяжения  $\sigma_N$ . Суммируя значения  $\sigma_{\text{и}}$  и  $\sigma_N$  для крайних точек, получим окончательную эпюру нормальных напряжений  $\sigma$ , показанную на рис. 19.11, б.

Условие прочности для стержня при совместном действии изгиба и растяжения будет иметь вид

$$\max \sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \leq [\sigma]. \quad (19.14)$$

Если материал балки по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, то проверку прочности следует вести отдельно, для обеих точек, наиболее удаленных от нулевой линии, т.е. проверяется условие на растяжение и на сжатие.

Для стержня круглого или кольцевого поперечного сечения опасными являются точки контура в месте его пересечения силовой линией.

При растягивающей силе  $N$  условие прочности примет вид

$$\max \sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{из}}{W_{из}} \leq [\sigma]. \quad (19.15)$$

При сжимающей продольной силе условие прочности

$$|\max \sigma_z| = \left| -\frac{N}{A} - \frac{M_{из}}{W_{из}} \right| \leq [\sigma]. \quad (19.16)$$

## 19.5. Внецентренное растяжение и сжатие

Многие элементы строительных конструкций — колонны, опоры, стойки — находятся под действием силы, параллельной оси и приложенной не в центре тяжести сечения. На рис. 19.12, *a* показана колонна, на которую опирается балка перекрытия. Как видно, сила действует по отношению к оси колонны с эксцентриситетом. При таком нагружении в произвольном поперечном сечении стержня наряду с продольной силой возникает изгибающий момент.

Внецентренное растяжение или сжатие — это такой случай загрузки, когда линия действия растягивающей или сжимающей силы  $F$  не совпадает с осью стержня, а действует вдоль прямой, параллельной оси стержня.

Рассмотрим случай, когда сила  $F$  приложена к стержню в точке, имеющей координаты  $x_F$  и  $y_F$ , отсчитанные относительно главных

центральных осей инерции (рис. 19.12, б). Эта точка называется *поллюсом*. От этой силы в произвольном поперечном сечении стержня возникают продольная сила и два изгибающих момента:

$$\begin{aligned} N &= F; \quad M_x = Fy_F; \\ M_y &= Fx_F. \end{aligned} \quad (19.17)$$

В соответствии с принятым правилом знаков продольная сила положительна и положительны изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$ , так как вызывают растяжение в точках, принадлежащих первой четверти.

Напряжения в произвольной точке  $K$  поперечного сечения определим, воспользовавшись формулой нормальных напряжений (19.10):

$$\sigma_{z_K} = \frac{F}{A} + \frac{Fy_F}{I_x} y_K + \frac{Fx_F}{I_y} x_K. \quad (19.18)$$

Полученную формулу удобно преобразовать, представив моменты инерции в виде

$$I_x = i_x^2 A; \quad I_y = i_y^2 A.$$

Напомним, что величины  $i_x$  и  $i_y$  имеют размерность длины и являются радиусами инерции поперечного сечения. Тогда формула (19.18) примет вид

$$\sigma_{z_K} = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_K}{i_x^2} + \frac{x_F x_K}{i_y^2} \right). \quad (19.19)$$

Поскольку напряжения линейно зависят от координат  $x$  и  $y$ , эпюра напряжений представляет собой плоскость. В отличие от косо го изгиба нейтральная линия здесь не проходит через начало координат, а пересекает октант, диаметрально противоположный

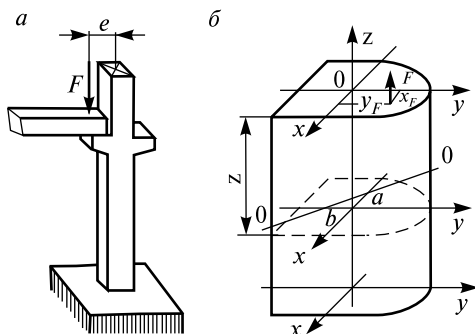


Рис. 19.12. Пример внецентренного приложения нагрузки (а); отрезки, отсекаемые нулевой линией по осям координат (б)

тому, где находится полюс. Таким образом, внецентренное приложение нагрузки приводит к неравномерному распределению напряжений в сечении.

Определим положение нулевой линии. Уравнение нейтральной линии получим из формулы (19.19) в виде

$$1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2} = 0. \quad (19.20)$$

Так как координаты  $x$  и  $y$  точек поперечного сечения входят в это уравнение линейно, нейтральная линия является прямой. Положение нейтральной линии зависит от местоположения полюса и от геометрической формы сечения. Ни от величины и ни от знака силы положение нейтральной линии не зависит.

Приведем уравнение (19.20) к уравнению прямой в отрезках, т.е. к виду  $(x/a) + (y/b) = 1$ .

Получим

$$\frac{x}{(-i_y^2 / x_F)} + \frac{y}{(-i_x^2 / y_F)} = 1. \quad (19.21)$$

Отрезки, отсекаемые нулевой линией по осям координат, будут равны:

$$a = -i_y^2 / x_F; \quad b = -i_x^2 / y_F. \quad (19.22)$$

Отложив эти отрезки по осям координат, проведем нейтральную линию (рис. 19.12, б). Из полученных равенств (19.22) видно также, что отрезки  $a$ ,  $b$  имеют обратные знаки точки приложения силы. Поэтому если сила  $F$  приложена в точке, принадлежащей первой четверти, то нулевая линия проходит через третью противоположную четверть.

Рассмотрим теперь некоторые характерные особенности, связанные с поведением нулевой линии при различных положениях силы  $F$ .

1. По мере приближения полюса силы к центру тяжести нулевая линия удаляется от центра тяжести (рис. 19.13, а).

Из (19.22) следует, что длины отрезков  $a$  и  $b$  увеличиваются, т.е. нулевая линия удаляется от центра тяжести, оставаясь при этом параллельной самой себе.

2. Если точка приложения силы  $F$  лежит на одной из главных центральных осей (рис. 19.13, б), то нулевая линия параллельна другой. Из (19.22) следует, что положив, например,  $y_F = 0$ , получим  $b = \infty$ , т.е. нулевая линия не пересекает ось  $y$ .

3. Отрезки  $a$  и  $b$ , отсекаемые нулевой линией по осям, и координаты точки приложения силы  $x_F, y_F$  обладают свойством взаимности (рис. 19.13, в).

Рассмотрим (19.22) и поменяем местами отрезки, отсекаемые нулевой линией, и координаты приложения силы. Устанавливаем, что равенство не нарушается. Отсюда заключаем, что, приложив силу в новой точке  $K_1$  с координатами  $a, b$ , получим новое положение нулевой линии  $O_1—O_1$ , которая отсекает по осям координат отрезки, равные координатам точки приложения силы.

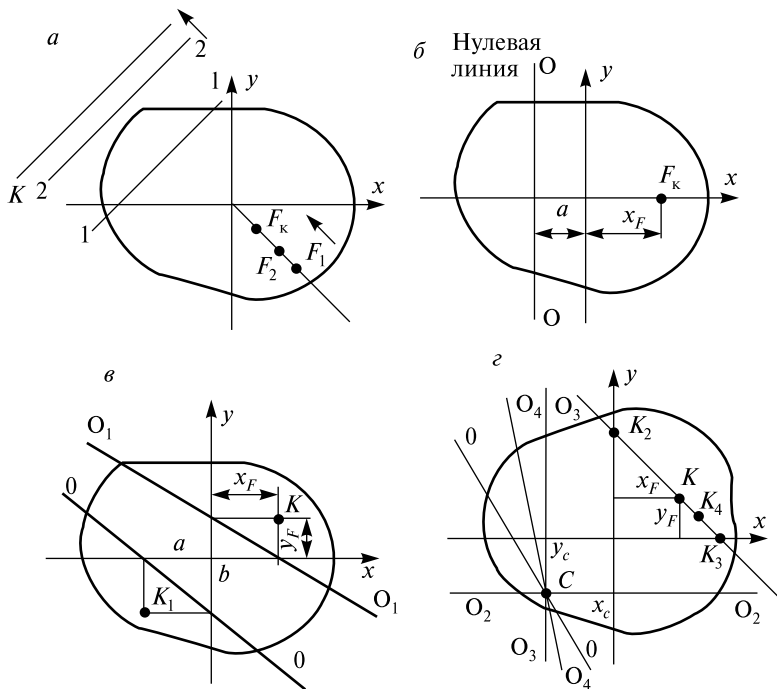


Рис. 19.13. К свойствам нулевой линии:

$a$  — первое свойство;  $b$  — второе свойство;  $в$  — третье свойство;  $г$  — четвертое свойство

4. Рассмотрим еще один случай. Пусть, например, сила  $F$  приложена в точке  $K$  и соответствующая нулевая линия  $0-0$  занимает положение, показанное на рис. 19.13,  $z$ .

Выберем на нулевой линии произвольную точку  $C$ , имеющую координаты  $x_c$  и  $y_c$ , и вращая около нее нулевую линию, проследим, как будут меняться координаты полюса приложения силы  $K$ . Поскольку нулевая линия при всех своих положениях проходит через постоянную точку  $C$ , координаты ее должны удовлетворять уравнению нулевой линии (19.21). Точка приложения силы перемещается по прямой, не проходящей через начало координат, т.е.

$$\frac{x_F}{(-i_x^2 / x_c)} + \frac{y_F}{(-i_y^2 / y_c)} = 1. \quad (19.23)$$

Полученное равенство можно рассматривать как уравнение прямой, в котором текущими координатами являются уже координаты полюса приложения силы  $x_F, y_F$ .

Следовательно, *при вращении нулевой линии около точки  $C$  полюс приложения силы  $K$  перемещается по прямой.*

**Пример 19.4.** Жестко заделанный нижним концом короткий брус таврового сечения (рис. 19.14,  $a$ ) нагружен сжимающими силами  $F$  и  $2F$ .

Определить значение параметра сил  $F$  из условия, чтобы наибольшие напряжения не превышали на сжатие 100 МПа, на растяжение 40 МПа.

*Решение.* Определяем положение центра тяжести поперечного сечения, в осях  $xOy_1$ :

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 S_{yi}}{\sum_{i=1}^2 A_i} = \frac{0,32 \cdot 0,12 \cdot 0,06 + 0,24 \cdot 0,08 \cdot 0,24}{0,08 \cdot 0,24 + 0,12 \cdot 0,32} = 12 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Главными центральными осями является ось симметрии  $Ox$  и перпендикулярная к ней ось  $Oy$ , проходящая через центр тяжести сечения. Тогда центральные моменты инерции составят:

$$I_y = \frac{b_1 h_1^3}{12} + A_1 a_1^2 + \frac{b_2 h_2^3}{12} + A_2 a_2^2 = \frac{0,32 \cdot 0,12^3}{12} + 0,32 \cdot 0,12 \cdot 0,06^2 + \\ + \frac{0,08 \cdot 0,24^3}{12} + 0,24 \cdot 0,08 \cdot 0,12^2 = 55\,296 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4;$$



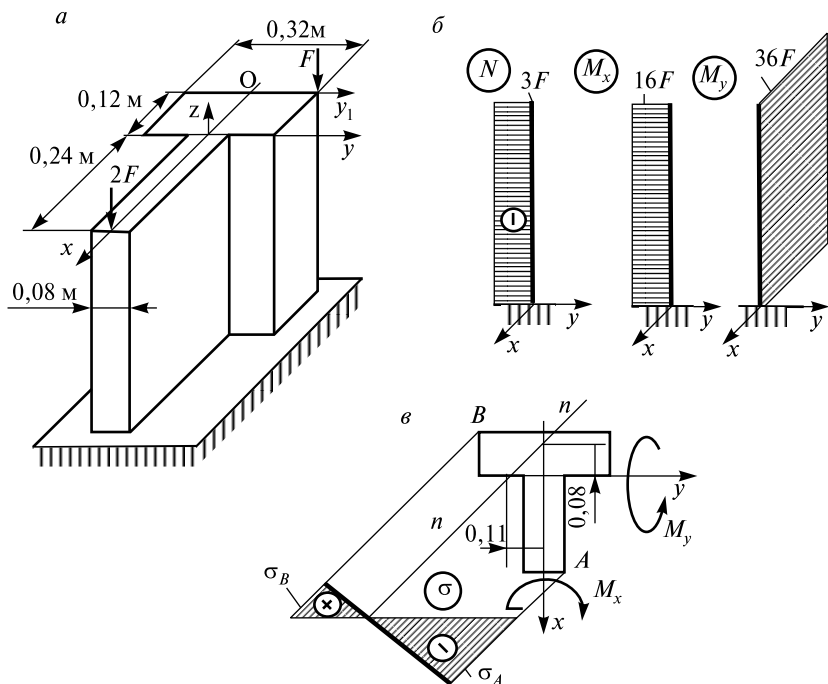


Рис. 19.14: а — схема стержня; б — эпюры  $N$ ,  $M_x$  и  $M_y$ ; в — эпюра нормальных напряжений в опасном поперечном сечении стержня

$$I_x = \frac{b_1^3 h_1}{12} + \frac{b_2^3 h_2}{12} = \frac{0,32^3 \cdot 0,12}{12} + \frac{8^3 \cdot 24}{12} = 33792 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Внутренние силовые факторы в нашем случае:

$$\sum Z = 0, N_z = -3F; \quad \sum M_x = 0, M_x = -16F;$$

$$\sum M_y = 0, \quad M_y = -2F \cdot 24 + F \cdot 12 = -36F.$$

Построенные эпюры  $N_z$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  показаны на рис. 19.14, б.

Подставляя найденные значения, а также величины геометрических характеристик в уравнение нулевой линии, получим

$$\frac{1}{A} + \frac{M_x}{N_z I_x} y + \frac{M_y}{N_z I_y} x = \frac{1}{576 \cdot 10^{-4}} + \frac{-16F}{-3F \cdot 33792 \cdot 10^{-8}} y + \frac{-36F}{-3F \cdot 55296 \cdot 10^{-8}} x = 0.$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что положение нулевой линии оказалось независимым от величины параметра силы  $F$ , т.е. положение нулевой линии остается постоянным при монопараметрическом нагружении.

Приняв в этом уравнении  $x = 0$ , найдем длину отрезка, отсекаемого нулевой линией от оси  $Oy$ :

$$a_y = -\frac{N_z I_x}{AM_x} = -\frac{-3F \cdot 33792 \cdot 10^{-8}}{576 \cdot 10^{-4} \cdot (-16F)} = -0,11 \text{ м.}$$

Аналогично находим отрезок, отсекаемый от оси  $Ox$ :

$$a_x = -\frac{N_z I_y}{AM_y} = -\frac{-3F \cdot 55296 \cdot 10^{-8}}{576 \cdot 10^{-4} \cdot (-36F)} = -0,08 \text{ м.}$$

Наибольшее сжимающее напряжение возникает в точке  $A$ , а наибольшее растягивающие — в точке  $B$  (рис. 19.14,  $\theta$ ). В опасных точках поперечного сечения имеет место линейное напряженное состояние.

Определяем значение силы  $F$  из условия прочности бруса по наибольшим напряжениям сжатия:

$$\begin{aligned} \max \sigma_{\text{сж}} = |\sigma_A| &= \left| -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{I_x} y_A - \frac{M_y}{I_y} x_A \right| = \\ &= \left[ \frac{16F}{33792 \cdot 10^{-8}} 0,04 - \frac{36F}{55296 \cdot 10^{-8}} 0,24 \right] = 1000F. \end{aligned}$$

Из этого выражения определим силу  $F$ . Она равна 440 кН.

Из условия прочности по наибольшим напряжениям растяжения имеем

$$\max \sigma_p = \sigma_B = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_B + \frac{M_y}{I_y} x_B = -\frac{3F}{576} + \frac{16F}{33792} 16 + \frac{36F}{55296} 12 = 400F.$$

Из этого выражения находим силу  $F$ . Она равна 392,9 кН.

Анализируя полученные данные, устанавливаем, что опасной является точка  $B$ , следовательно,  $F = 392,9$  кН.

**Пример 19.5.** Проверить прочность пластины, имеющей ослабление (рис. 19.15,  $a$ ) и нагруженной силой  $F = 6$  кН, действующей по линии, соединяющей центры тяжести торцевых сечений.

*Решение.* Определим внутренние силовые факторы, возникающие в наиболее ослабленном поперечном сечении (рис. 19.15,  $b$ ):

$$N = 6 \text{ кН}; \quad M_y = 0; \quad M_x = 6 \cdot 10^3 \cdot (5-3) \cdot 10^{-2} = 120 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

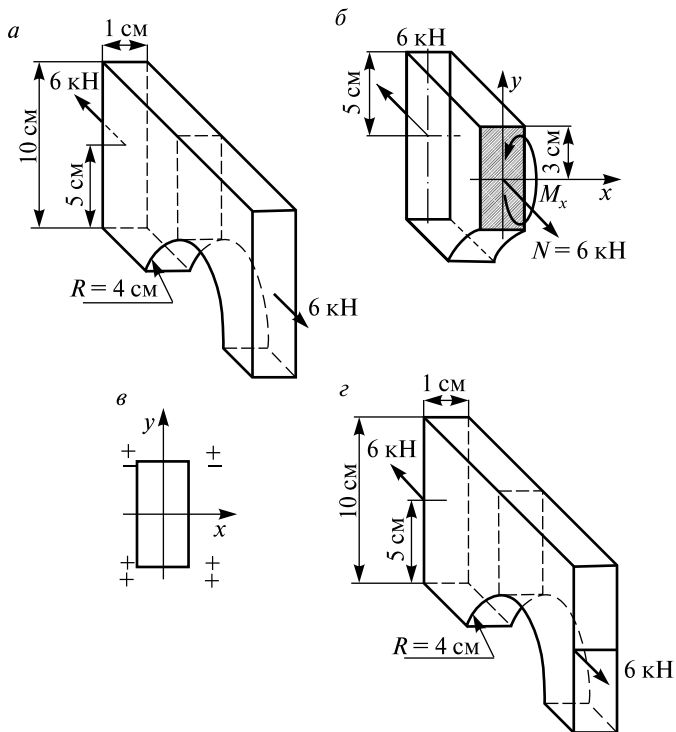


Рис. 19.15: *a* — схема загрузки пластины; *б* — к определению внутренних силовых факторов в ослабленном поперечном сечении; *в* — знаки нормальных напряжений в исследуемом поперечном сечении; *г* — рекомендуемая задача, когда линия действия силы смещена на поверхности пластины

Нормальные напряжения определяются зависимостью

$$\sigma = N / A + (M_x / I_x) y.$$

Геометрические характеристики опасного сечения:

$$A = 6 \text{ см}^2; \quad I_x = \frac{6^3}{12} = 18 \text{ см}^4.$$

Значение опасных напряжений (рис. 19.15, *в*), возникающих в нижних точках поперечного сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{6 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} + \frac{120}{18 \cdot 10^{-8}} \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 30 \text{ МПа.}$$

Рекомендуем решить задачу для случая, когда линия действия силы смещена на поверхности пластины (рис. 19.15, з).

## 19.6. Теории прочности

Напряженное состояние в точке нагруженного тела характеризуется бесконечным множеством напряжений, возникающих на площадках, которые можно провести через данную точку. Это состояние может быть линейным, плоским, а в общем случае — объемным.

При расчете важно не только установить вид напряженного состояния, но и ответить на вопрос, а не будет ли опасным для материала возникающее в результате нагружения напряженное состояние.

Прежде всего выясним, в каких состояниях может находиться, например, пластический материал.

1. Если внешние нагрузки невелики, то в материале детали возникают только упругие деформации.

2. С ростом нагрузки в материале появляются заметные остаточные деформации, значит, материал перешел из упругого в пластическое состояние.

3. С увеличением нагрузки наступает момент, когда целостность материала нарушается, начинается разрушение материала. В таком случае говорят, что материал перешел из пластического состояния в состояние разрушения.

При испытаниях материалов на одноосное растяжение было установлено, что не все материалы одинаково ведут себя под нагрузкой.

У пластических материалов состоянию разрушения предшествует пластическое состояние. Хрупкие материалы переходят в состояние разрушения при очень малых остаточных деформациях, т.е. практически минуя пластическое состояние.

Испытание материалов на одноосное растяжение позволяет определить, при каком числовом значении главного напряжения происходит переход из одного состояния в другое.

А изменится ли поведение материала, если напряженное состояние в точках нагруженного образца изменить? Многочисленные эксперименты показали, что поведение материала — его ме-

ханическое состояние в первую очередь определяется напряженным состоянием. Так, хрупкий чугун приобретает пластические свойства при большом всестороннем давлении. Таким образом, механическое состояние материала зависит от вида напряженного состояния и значений главных напряжений.

Возвратимся к вопросу оценки прочности при сложном напряженном состоянии.

Надежный способ оценки прочности заключается в том, чтобы испытать образец при заданном состоянии главных напряжений, т.е. довести его до разрушения, пропорционально увеличивая главные напряжения, и опытным путем установить, при каких значениях главных напряжений наступает опасное состояние. Затем сопоставить их с главными напряжениями, возникающими в опасной точке рассчитываемой детали, т.е. произвести оценку прочности детали.

В действительности этот способ оказывается нереальным, так как при каждой новой комбинации главных напряжений пришлось бы снова проводить эксперимент и опытным путем получать каждый раз свои значения главных предельных напряжений. На практике встречается такое большое число различных сочетаний главных напряжений, что для всех применяемых материалов создать каждое из них в лабораторных условиях невозможно. Поэтому возникает необходимость оценить прочность при сложном напряженном состоянии, основываясь на результатах испытаний материалов на одноосное растяжение. Это становится возможным при использовании так называемых гипотез (теорий) прочности — научных предположений о причинах перехода материалов в опасное состояние.

Прежде чем перейти к рассмотрению теорий прочности, введем понятие равноопасных напряженных состояний и понятие эквивалентного напряжения.

Допустим, что напряженное состояние в точке тела, отвечающее заданной нагрузке, известно. При увеличении нагрузки напряжения в той же точке увеличиваются пропорционально и в конце концов наступит разрушение материала или появятся пластические деформации. Назовем коэффициентом запаса в этом случае отношение напряжений, при которых наступает предельное состояние в точке, к одноименным действующим напряжениям. Будем назы-

вать два напряженных состояния *равноопасными*, если указанные коэффициенты запаса для них одинаковые (рис. 19.16, *а*).

Критерии прочности или текучести должны давать возможность сравнения степени опасности различных напряженных состояний материала. Указанное сравнение удобно производить, если одно из напряженных состояний, наиболее просто осуществимое в экспериментах, выбирается за основу. Такое напряженное состояние называют *эквивалентным*. Обычно в качестве эквивалентного состояния выбирается *одноосное растяжение*.

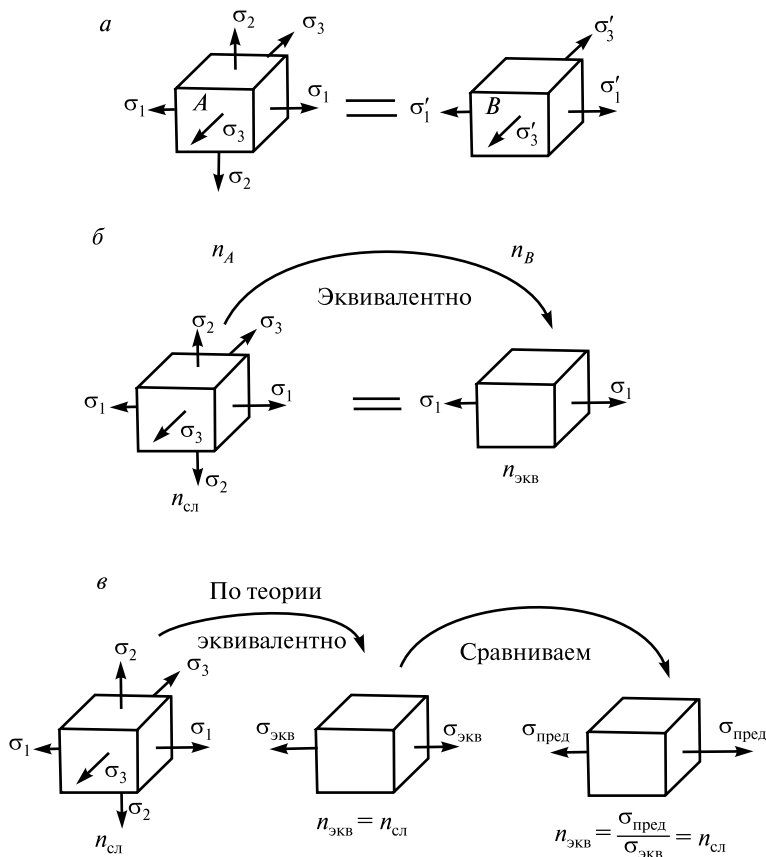


Рис. 19.16. Условный переход от сложного напряженного состояния (*а*) к эквивалентному (*б*) и сравнение с предельным (*в*)

Значение напряжения  $\sigma_{\text{экв}}$ , при котором образец материала в условиях одноосного напряженного состояния оказывается в равноопасном состоянии с рассматриваемым сложным напряженным состоянием в точке, называется *эквивалентным напряжением* (рис. 19.16, б).

Любое сложное напряженное состояние будем характеризовать главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , причем  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Осуществить условный переход от сложного напряженного состояния к эквивалентному напряжению, другими словами, найти числовое значение напряжения простого растяжения, эквивалентное заданному сложному, позволяют гипотезы (теории) прочности. С использованием соответствующего критерия, как будет показано далее, можно получить выражение  $\sigma_{\text{экв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , после чего условие предельного состояния записывается, как при простом растяжении или сжатии:

$$\sigma_{\text{экв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_0, \quad (19.24)$$

где  $\sigma_0$  — опасное напряжение, вызывающее предельное состояние, т.е. это либо предел текучести  $\sigma_0 = \sigma_T$ , либо временное сопротивление  $\sigma_0 = \sigma_B$ .

Последовательность действий при этом схематично можно представить так, как показано на рис. 19.16, в.

При расчете на прочность сравнение действующих в теле напряжений проводится не с опасным напряжением  $\sigma_0$ , а с некоторым напряжением, меньшим  $\sigma_0$ . В соответствии с методом расчета:

- по допускаемым напряжениям (это  $[\sigma]$ );
- по предельным состояниям ( $R$ ).

Тогда условие прочности или пластичности при сложном напряженном состоянии формулируется в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma], \quad (19.25)$$

или

$$\sigma_{\text{экв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq R. \quad (19.26)$$

Существует несколько теорий прочности о причинах перехода материалов в опасное состояние. Каждая теория устанавливает свои признаки равноопасности различных напряженных состояний. Кратко познакомимся с ними.

**Первая теория прочности (гипотеза наибольших нормальных напряжений).** Основатель теории — Галилей.

В основу теории положен критерий наибольших нормальных напряжений. Сформулирована она может быть следующим образом. Предельное состояние материала при сложном напряженном состоянии наступает тогда, когда наибольшие нормальные напряжения достигают значения предельного напряжения, полученного в опытах для данного материала при одноосном напряженном состоянии.

Полагая эквивалентное напряжение равным наибольшему главному напряжению, условие наступления предельного состояния записывается в виде

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 = \sigma_0. \quad (19.27)$$

Если материал имеет различные предельные напряжения на растяжение и на сжатие, то опасное состояние возникает, когда

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 \leq R, \quad (19.28)$$

где  $R$  — расчетное сопротивление при одноосном растяжении.

В случае сжатия те же условия сохраняются, но под эквивалентным напряжением понимается абсолютное значение наименьшего главного напряжения

$$\sigma_{\text{эКВ}} = |\sigma_3| \leq R, \quad (19.29)$$

где  $R$  — расчетное сопротивление при одноосном сжатии.

Принципиальным недостатком первой теории прочности является то, что она учитывает влияние на прочность только одного из трех главных напряжений и совершенно не учитывает второго главного напряжения ( $\sigma_2$ ). Эта теория прочности не получила экспериментального подтверждения. Например, при всестороннем равномерном сжатии материалы не обнаруживают никаких признаков разрушения даже при напряжениях, превышающих предел прочности при сжатии. Если же при оценке прочности воспользоваться теорией наибольших нормальных напряжений, то разрушение должно произойти при  $|\sigma_3| = \sigma_B$ .



**Вторая теория прочности.** Основатель теории — Мариотт.

Эта теория основана на предположении, что опасное состояние наступает тогда, когда наибольшая деформация достигает предельного значения, равного относительному удлинению при одноосном растяжении (сжатии).

Условие наступления предельного состояния в этом случае записывается на основании закона Гука следующим образом:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \varepsilon_0, \quad (19.30)$$

где  $\varepsilon_1$  — наибольшее относительное удлинение, соответствующие рассматриваемому напряженному состоянию;

$\varepsilon_0$  — предельное значение относительного удлинения, определяемое из опытов при одноосном растяжении  $\varepsilon_0 = \sigma_0 / E$ .

Значение предельной деформации при одноосном растяжении или сжатии можно определить на основании закона Гука:

— при растяжении  $\varepsilon_0^p = \sigma_0^p / E$ ;

— при сжатии  $\varepsilon_0^c = \sigma_0^c / E$ .

Приравниваем эти величины главным деформациям  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_3$ , тогда:

— при растяжении  $[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq R_p$ ; (19.31)

— при сжатии  $[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \leq R_c$ . (19.32)

В отличие от первой теории, здесь учитывается влияние на прочность всех главных напряжений.

Вторая теория прочности не нашла должного экспериментального подтверждения.

Учитывая несоответствие между результатами экспериментов и теоретическими прогнозами, которые делаются на основе двух приведенных теорий прочности, в настоящее время как самостоятельные теории они не находят применения в инженерных расчетах.

**Третья теория прочности (теория наибольших касательных напряжений).**

Независимо от вида напряженного состояния опасное состояние наступает тогда, когда величина максимальных касательных

напряжений хотя бы в одной точке тела достигнет некоторого предельного значения, полученного для данного материала в опытах на растяжение.

Записывается это так:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_0}{2}. \quad (19.33)$$

Отсюда условие пластичности, выраженное через эквивалентное напряжение при  $\sigma_0 = \sigma_T$ , будет

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T. \quad (19.34)$$

В частном случае упрощенного плоского напряженного состояния, реализуемого для стержня, можно выразить эквивалентное напряжение через нормальные и касательные напряжения в рассматриваемой точке поперечного сечения бруса. Тогда условие (19.34) примет вид

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_T. \quad (19.35)$$

Данная теория подтверждается в опытах с пластическими материалами. Недостатком теории является то, что она не учитывает влияние главного напряжения  $\sigma_2$  на прочность.

***Четвертая теория прочности (энергетическая теория прочности).***

Согласно этой теории независимо от вида напряженного состояния предельное состояние в данной точке тела наступает в том случае, когда удельная потенциальная энергия, приходящаяся на изменение формы, достигает определенного предельного значения, полученного в опытах на растяжение, свойственного данному материалу. Иными словами, два напряженных состояния равноопасны, если удельная потенциальная энергия изменения формы для них одинакова.

Удельная потенциальная энергия изменения формы при сложном напряженном состоянии равна

$$u_{\text{ф}} = u - u_v, \quad (19.36)$$

где  $u = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$  — полная удельная потенциальная энергия;

$u_v = \frac{1}{2}(3\sigma_{\text{ср}} \varepsilon_{\text{ср}})$  — энергия, затрачиваемая на изменение объема.

Последняя формула получается, если в выражении для  $u$  принять, что  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_{\text{ср}}$  и  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_{\text{ср}}$ , где  $\sigma_{\text{ср}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$  и, аналогично,  $\varepsilon_{\text{ср}}$ , что является средним значением напряжений и деформаций.

После подстановки в (19.36) выражений для главных осевых деформаций  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  через главные напряжения получим

$$u_{\text{ф}} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

При одноосном растяжении имеем  $\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  и появлению пластических деформаций будет соответствовать равенство

$$u_{\text{ф}} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{\text{т}}.$$

Принимая эту величину за константу материала, приходим к соотношению

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_{\text{т}}. \quad (19.37)$$

Для упрощенного плоского напряженного состояния

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_{\text{т}}. \quad (19.38)$$

Эта теория учитывает влияние на прочность всех трех главных напряжений и хорошо подтверждается экспериментально для пластических материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению или сжатию.

Так же как и третья теория прочности, эта теория подтверждается при трехосном напряженном состоянии, когда  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , так как в этом случае изменение формы не происходит.

**Теория прочности Мора.** Эта теория применяется для материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. Условием возникновения опасного состояния является равенство

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \sigma_p, \quad (19.39)$$

где  $k = \sigma_p/\sigma_c$  — коэффициент, учитывающий различное сопротивление материала растяжению и сжатию.

В случае плоского напряженного состояния формула (19.39) принимает вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1-k}{2} \sigma + \frac{1+k}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_p.$$

Отличительной чертой теории Мора от рассмотренных ранее является то, что она полностью базируется на экспериментальных данных и по мере их накопления может уточняться.

Вместе с тем эта теория не лишена недостатков: как и в теории наибольших касательных напряжений, не учитывается промежуточное главное напряжение  $\sigma_2$ .

## 19.7. Изгиб с кручением

При изгибе с кручением наряду с нормальными напряжениями возникают касательные напряжения, вызванные кручением. Это обстоятельство меняет вид напряженного состояния в точках стержня. Если во всех предыдущих случаях мы пренебрегали касательными напряжениями, вызванными поперечными силами и поэтому имели дело с линейным напряженным состоянием, то теперь оно стало плоским, а с учетом гипотезы о ненадавливании волокон — упрощенным плоским. Рассмотрим некоторые примеры работы стержней на изгиб с кручением.

**Пример 19.6.** Проверить прочность стержня, изображенного рис. 19.17, а, и нагруженного одной силой  $F = 4$  кН.

*Решение.* Построение эпюр  $M_x$  и  $M_z$  (рис. 19.17, б) приводит к необходимости рассмотрения опасного сечения 1—1 с опасными точками а и б (рис. 19.17, в). В этих точках имеет место наиболее неблагоприятное сочетание нормальных и касательных напряжений. Имеем:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{0,8 \cdot 10^3 \cdot 32}{\pi \cdot 0,05^3} = 65,09 \cdot 10^6 \text{ Па} = 65,09 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_z}{W_\rho} = \frac{0,4 \cdot 10^3 \cdot 16}{\pi \cdot 0,05^3} = 16,27 \cdot 10^6 \text{ Па} = 16,27 \text{ МПа}.$$

В этих же точках возникает упрощенное плоское напряженное состояние (рис. 19.17, в, г, д). Проверка прочности напряженного состояния не может быть выполнена иначе как с использованием той или иной теории прочности.

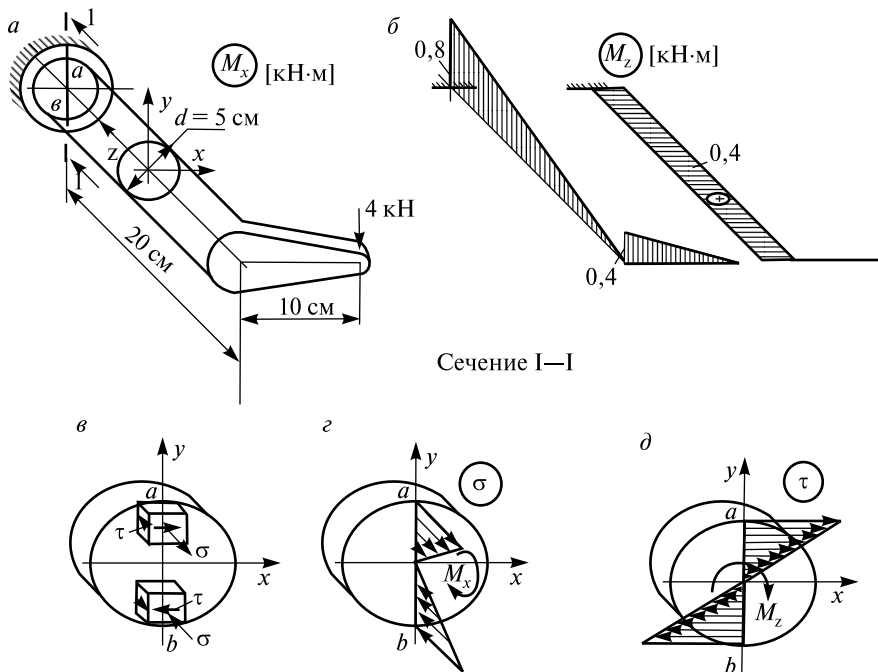


Рис. 19.17: а — схема стержня; б — эпюры  $M_x$  и  $M_z$ ; в — напряженное состояние в опасных точках поперечного сечения; з, д — эпюры нормальных и касательных напряжений

Приняв в качестве гипотезы третью теорию прочности, вычислим эквивалентное напряжение:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 10^6 \sqrt{65,09^2 + 4 \cdot 16,27^2} = 72,77 \text{ МПа},$$

что не превышает допускаемого напряжения для стали, равного 160 МПа.

## 19.8. Общий случай сложного сопротивления

В практике железнодорожного хозяйства часто встречаются конструкции или детали, работающие на общий случай сложного сопротивления.

В общем случае сложного сопротивления наряду с нормальными напряжениями возникают касательные напряжения, вызванные

кручением. Кручение во всех случаях считается свободным. Учет стеснения кручения существенно усложняет решение задач.

Вначале расчета устанавливают положение опасных сечений, затем — опасных точек в этих сечениях, а после этого выполняют проверку прочности.

При установлении положения опасных точек существенную роль играет тип поперечного сечения. Рассмотрим два характерных сечения — круглое и прямоугольное.

**Пример 19.7.** Проверить прочность стержня, изображенного на рис. 19.18, *а*, находящегося под действием двух сил  $F_1 = 4$  кН и  $F_2 = 2$  кН, приложенных к крайней его точке, если  $[\sigma] = 160$  МПа. Геометрические размеры стержня показаны на рисунке.

*Решение.* Для определения положения опасного сечения построим эпюры внутренних сил ( $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ ), они приведены на рис. 19.18, *б*. Наиболее неблагоприятное сочетание внутренних силовых факторов имеет место для заделки, поэтому далее рассматривается сечение  $m-n$ .

Направление продольной силы, изгибающих и крутящих моментов показано на рис. 19.18, *в*.

Изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  могут быть изображены в виде векторов в соответствии с тем, что при взгляде с конца вектора момент должен иметь направление против часовой стрелки. Вектор суммарного изгибающего момента представляется суммой векторов  $M_x$  и  $M_y$  (рис. 19.18, *г*). Тогда при действии только этого суммарного момента направление нулевой линии совпадает с вектором  $M_{изг}$ , а наиболее удаленные от нее точки *а* и *в* будут испытывать наибольшие соответственно растягивающие и сжимающие напряжения.

Напряжения в этих точках

$$\sigma_{a,b} = N/A \pm (\sqrt{M_x^2 + M_y^2}),$$

так как моменты сопротивления круглого поперечного сечения одинаковы относительно любых осей, знак «+» второго слагаемого относится к точке *а*, знак «-» к точке *б*.

Возможно иное получение этого же результата, показанного на рис. 19.18, *г*. Сделав сечение, мы проводим его по ранее построенным эпюрам изгибающих моментов, тогда в сечении оказываются ординаты этих эпюр (рис. 19.18, *д*). Диагональ прямоугольника, построенная на этих ординатах, является ординатой эпюры суммарного изгибающего момента, и пересечение его внешнего контура круглого поперечного сечения дает положение наиболее опасных (растянутой и сжатой) точек сечения в результате действия этого момента. Знаки, стоящие на рис. 19.18, *д*, относятся к составляющим напряжений, вызванных продольной силой и суммарным изгибающим моментом.

Разумеется, все сказанное можно отнести и к трубчатому поперечному сечению, но не имеет никакого отношения к любому иному сечению, для которого  $I_x \neq I_y$ .

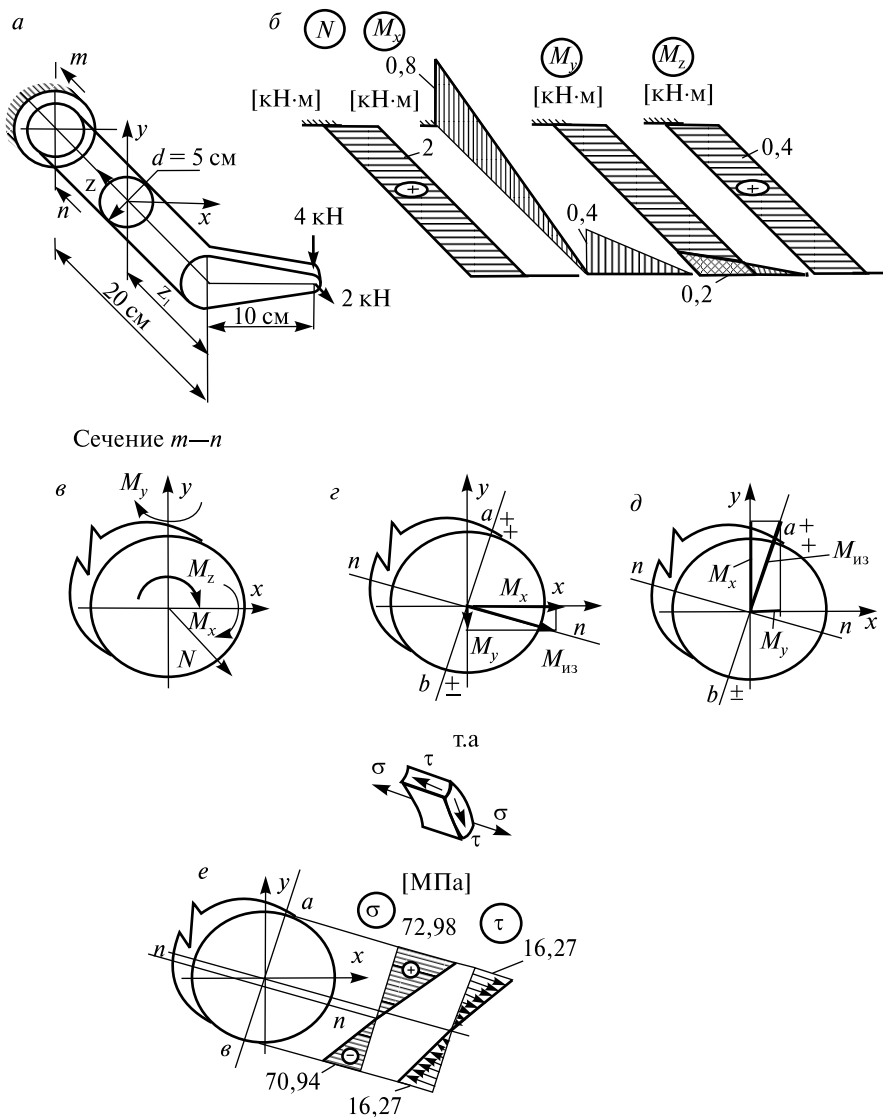


Рис. 19.18: *a* — расчетная схема стержня; *б* — эпюры  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  и  $M_z$ ; *в* — направление продольной силы, изгибающих и крутящего моментов; *г* — вектор суммарного изгибающего момента; *д* — знаки составляющих напряжений; *е* — эпюры нормальных и касательных напряжений

Переходим к вычислениям:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 5^2}{4} = 19,63 \text{ см}^2; \quad W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi 5^3}{32} = 12,27 \text{ см}^3.$$

$$\sigma_a = \frac{2 \cdot 10^3}{19,63 \cdot 10^{-4}} + \frac{\sqrt{0,8^2 \cdot 10^6 + 0,4^2 \cdot 10^6}}{12,27 \cdot 10^{-6}} = 73,91 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 10^3}{19,63 \cdot 10^{-4}} - \frac{\sqrt{0,8^2 \cdot 10^6 + 0,4^2 \cdot 10^6}}{12,27 \cdot 10^{-6}} = -71,88 \text{ МПа}.$$

Определим наибольшее значение касательных напряжений:

$$M_z = 0,4 \text{ кНм}; \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi 5^3}{16} = 24,54 \text{ см}^3;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho} = \frac{0,4 \cdot 10^3}{24,54 \cdot 10^{-6}} = 16,30 \text{ МПа}.$$

Такое напряжение возникает во всех точках, принадлежащих внешней окружности поперечного сечения. Поэтому наиболее опасной является точка *a*. Напряженное состояние в этой точке изображено на рис. 19.21, *e*, оно является упрощенным плоским.

Проверку прочности осуществим с использованием третьей теории прочности. Имеем

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{73,91^2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 16,30^2 \cdot 10^6} = 80,78 \text{ МПа},$$

таким образом, прочность стержня обеспечена.

## 19.9. Определение перемещений при сложном воздействии

Перемещение в пространственном стержне определяется формулой Максвелла—Мора

$$\Delta_{\text{кр}} = \sum_1^n \int_l \frac{M_{xp} \bar{M}_{xk}}{EI_x} dz + \sum_1^n \int_l \frac{M_{yp} \bar{M}_{yk}}{EI_y} dz + \sum_1^n \int_l \frac{M_{zp} \bar{M}_{zk}}{GI_{\text{кр}}} dz$$

в предположении возможности пренебречь деформациями, вызванными продольными силами, а также сдвигом. При этом кручение приближенно считается свободным.



Следовательно, определение перемещений сводится к использованию правил Верещагина и Симпсона, аналогичному для соответствующих плоских и плоско пространственных задач. Проиллюстрируем сказанное примером.

**Пример 19.8.** Определить линейные перемещения крайнего сечения по заданному направлению, углы поворота относительно осей  $x$  и  $y$ , а также угол закручивания этого же сечения для стержня, изображенного на рис. 19.19,  $a$ , под действием заданной силы  $F = 10$  кН. Материал стержня — сталь с модулем упругости  $E = 200$  ГПа и модулем упругости при сдвиге  $G = 80$  ГПа. Поперечное сечение стержня — квадрат с размерами  $12 \times 12$  см<sup>2</sup>, длина  $a = 1$  м.

*Решение.* Вначале построим три грузовые эпюры моментов  $M_{xp}$ ,  $M_{yp}$  и  $M_{zp}$ . Результаты построения представлены на рис. 19.19,  $b$ .

Затем снимем заданную нагрузку и приложим единичную силу по направлению определяемого перемещения.

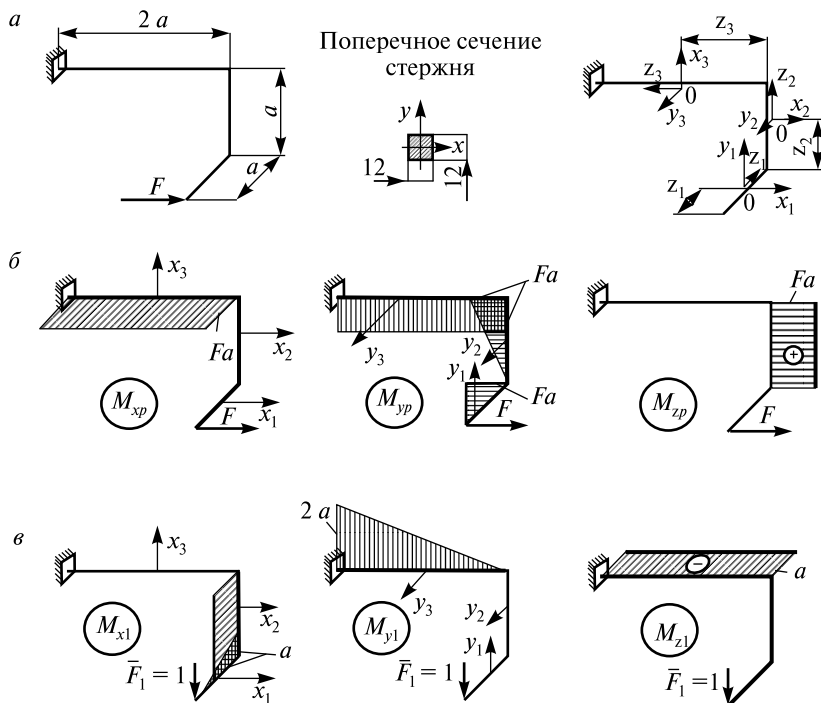


Рис. 19.19:  $a$  — расчетная схема стержня;  $b$  — грузовые эпюры изгибающих и крутящего моментов;  $c$  — единичные эпюры изгибающих и крутящего моментов

В нашем случае это вертикально приложенная на свободном конце сила  $\bar{F}_1$ . Эпюры изгибающих моментов  $\bar{M}_{x1}$ ,  $\bar{M}_{y1}$  и крутящего  $\bar{M}_{z1}$  представлены на рис. 19.19, в.

Переходим к вычислению перемещения. Обнаруживаем, что грузовая и единичная эпюры моментов  $M_x$  и  $M_z$  не имеют общих участков, а эпюры  $M_y$  имеют лишь один общий участок. Поэтому, воспользовавшись правилом Верещагина,

$$\Delta_{1p} = -Fa \cdot 2a \cdot \frac{a}{EI_y} = -\frac{2Fa^3}{EI_y};$$

Вычисления дают  $EI_y = EI_x = 200 \cdot 10^9 \cdot (12^4/12) \cdot 10^{-8} = 3,456 \text{ МН} \cdot \text{м}^2$ ;

$$\Delta_{1p} = -\frac{2 \cdot 10 \cdot 10^3}{3,456 \cdot 10^6} = -0,5787 \text{ см.}$$

Знак «—» перед ответом свидетельствует о том, что перемещение осуществляется вверх, т.е. противоположно по направлению действующей силы  $\bar{F}_1$ .

Для определения угловых перемещений также построим единичные эпюры моментов от действия единичного момента  $\bar{F}_2 = \bar{F}_3 = \bar{F}_4 = 1$ . Следует указать на необходимость тщательного вычерчивания плоскости, в которой действует тот или иной момент, а также обязательного показа оси, относительно которой строится эпюра моментов, во избежание распространенных ошибок. Обратим внимание, что от действия того или иного единичного момента на каждом участке возможно существование только одного из моментов (либо  $M_x$ , либо  $M_y$ , либо  $M_z$ ). Результаты построения единичных эпюр моментов представлены на рис. 19.20, а, б, в.

Для вычисления угловых перемещений вначале считаем величину  $GI_k$ :

$$I_k = k_3 hb^3 = 0,141 \cdot 12^4 = 2923,8 \text{ см}^4;$$

$$GI_k = 80 \cdot 10^9 \cdot 2,9238 \cdot 10^5 = 2,339 \text{ МНм}^2.$$

Далее по правилу Верещагина определим перемещения:

$$\begin{aligned} \Delta_{2p} &= Fa \cdot 2a \frac{1}{EI_x} + \frac{Faa}{2} \frac{1}{EI_y} + Faa \frac{1}{GI_k} = \frac{2,5 \cdot 10 \cdot 10^3}{3,456 \cdot 10^6} + \frac{10 \cdot 10^3}{2,339 \cdot 10^6} = \\ &= 7,234 \cdot 10^{-3} + 4,275 \cdot 10^{-3} = 11,511 \cdot 10^{-3} \text{ м;} \end{aligned}$$

$$\Delta_{3p} = 0;$$

$$\Delta_{4p} = -Fa \cdot 2a \frac{1}{EI_x} - \frac{Faa}{2} \frac{1}{EI_y} = -\frac{2,5Fa^2}{EI} = -7,234 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Рекомендуется самостоятельно определить линейные перемещения свободного конца стержня  $V_y$  и  $V_z$ , чтобы после этого сосчитать полное перемещение как геометрическую сумму трех ранее определенных.

Конечно, для более сложных нагрузок придется иметь дело с криволинейными грузовыми эпюрами, из-за чего возрастет объем вычислительной работы с использованием других приемов численного интегрирования.

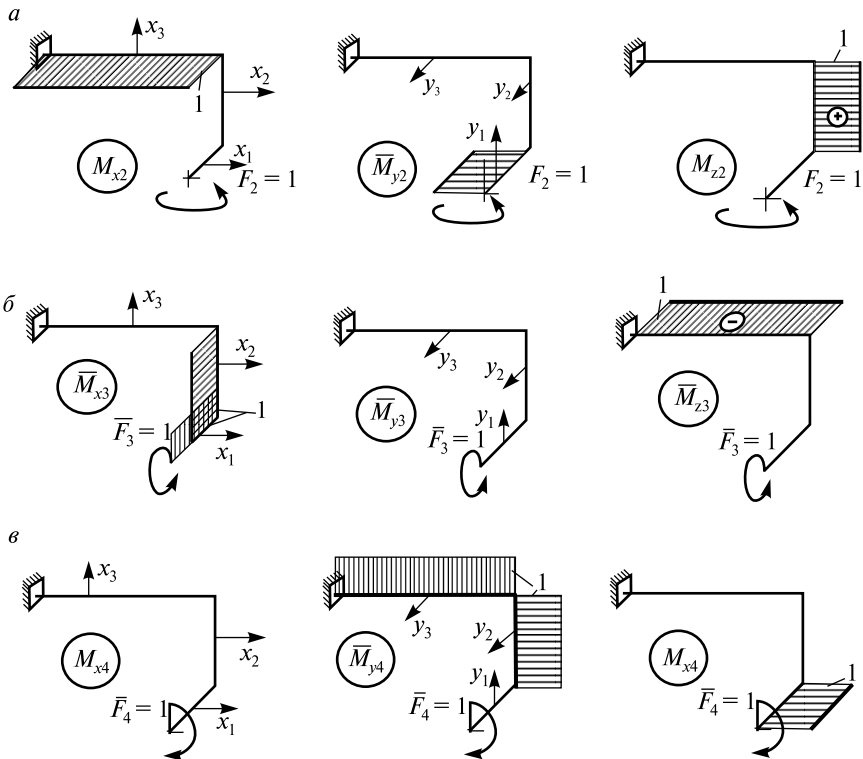


Рис. 19.20: а, б, в — единичные эпюры изгибающих и крутящего моментов для определения угловых перемещений

## Глава 20. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

### 20.1. Основные понятия

Известно, что сопротивление материалов — это наука, изучающая *прочность*, *жесткость* и *устойчивость*. Расчеты на прочность и жесткость рассмотрены в предыдущих главах. Остановимся теперь на понятии *устойчивости сжатых стержней*.

Под *устойчивостью* сжатой конструкции понимается свойство системы сохранять свое состояние при внешних малых возмущениях. Если система таким свойством не обладает, она называется *неустойчивой*. В равной мере можно сказать, что неустойчивым является ее состояние.

В реальных условиях всегда существуют какие-то причины, по которым может произойти отклонение от исходного равновесного состояния. Следовательно, возможность перехода к новому состоянию в неустойчивой системе всегда реализуется. В этом случае говорят, что произошла *потеря устойчивости*.

Особенности общепринятой расчетной схемы устойчивости поясним на следующем традиционном примере. Шар, лежащий на вогнутой поверхности (рис. 20.1, *а*), находится в состоянии *устойчивого равновесия*. Если ему сообщить небольшое отклонение (возмущение) от этого положения и отпустить, то шар возвратится в исходное состояние. Шар же, лежащий на выпуклой поверхности (рис. 20.1, *б*), покатится вниз и не вернется в сходное положение. Он находится в состоянии *неустойчивого равновесия*.

Положение шара на горизонтальной поверхности (рис. 20.1, *в*), также является устойчивым, но оно отличается от первого. Будучи отклоненным, он в исходное положение не возвращается, но движение его прекращается. Говорят, шар находится в состоянии *безразличного устойчивого равновесия*.

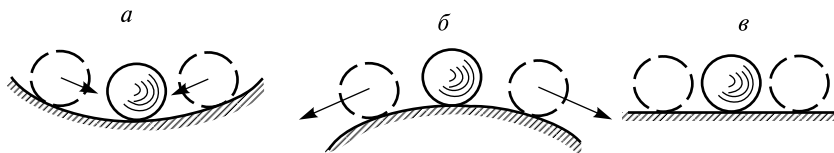


Рис. 20.1. Три различных положения металлического шарика:  
*а* — устойчивое; *б* — неустойчивое; *в* — безразлично устойчивое

Аналогичным образом будет вести себя и сжатый абсолютно жесткий стержень, прикрепленный к основанию упругой пружиной (рис. 20.2). Характер равновесия будет определяться уровнем действующей силы. При действии на стержень осевой сжимающей силы (рис. 20.2, а), меньшей некоторого критического значения, возмущение приведет к колебаниям относительно исходного положения, и после затухания колебаний стержень возвратится в вертикальное положение. Таким образом, при  $F < F_{кр}$  *вертикальная форма равновесия стержня является устойчивой.*

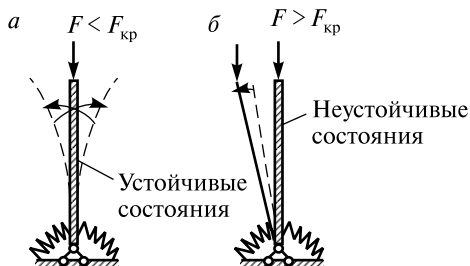


Рис. 20.2. Поведение абсолютно жесткого стержня:

а — устойчивое; б — неустойчивое

При дальнейшем увеличении сжимающей силы сверх критического значения (рис. 20.2, б)  $F > F_{кр}$  вертикальная форма равновесия становится неустойчивой. Теперь любое возмущение приведет к движению системы вплоть до нахождения устойчивого равновесного состояния, т.е. стержень не обнаруживает стремления вернуться в исходное состояние и принимает некоторую новую устойчивую форму.

*Для вертикального состояния стержня границей, отделяющей устойчивые состояния от неустойчивых, является значение силы, называемое критическим.* Описанное явление получило название потери устойчивости.

Вместе с тем обращает на себя внимание тот факт, что для разных уровней сжимающей силы различно число равновесных состояний (независимо от их качественной характеристики). В случае малых сил исходное состояние является единственно возможным. При увеличении силы наряду с исходным существуют два отклоненных состояния, в данном случае — симметричных относительно положения равновесия и реализуемых в зависимости от направления возмущения. В общем случае количество этих отклоненных состояний может быть и большим. Но при этом впервые отклоненные равновесные состояния обнаруживаются именно при действии *критической силы.*

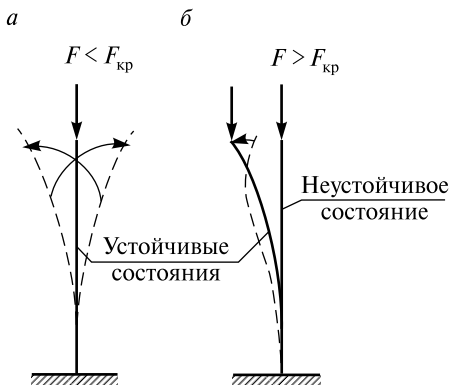


Рис. 20.3. Поведение центрально-сжатого жесткого стержня:  
 $a$  — устойчивое;  $b$  — неустойчивое

Такое явление носит название *бифуркации* равновесных состояний (раздвоение, ветвление равновесных состояний). Во многих случаях явления бифуркации равновесных состояний и потери устойчивости имеют место при одном и том же значении силы.

Аналогично изложенному поведение центрально-сжатого стержня, обладающего конечной изгибной жесткостью, т.е. способного изгибаться (рис. 20.3,  $a$ ,  $b$ ).

В случае малых сил исходное состояние устойчиво и является единственно возможным. При значениях силы, больших критической, это состояния неустойчиво, и действие возмущения приводит к движению стержня до тех пор, пока он не обнаруживает устойчивого отклоненного состояния. При этих значениях силы существует и исходное прямолинейное, и отклоненные изогнутые равновесные состояния. Обратим еще раз внимание на то, что исходное и отклоненное состояния стержня различны. В первом случае оно сжатое, во втором — сжато-изогнутое.

Отметим еще одно обстоятельство. Во всех случаях (рис. 20.2 и 20.3) речь идет об идеализированных центрально-сжатых стержнях, т.е. действующие силы не имеют эксцентриситетов. В противном случае поведение стержня будет иным. Явления потери устойчивости возможны не только для простейших сжатых стержней, изображенных на рис. 20.2 и 20.3.

Возможны более сложные случаи потери устойчивости рам, арок, пластин и оболочек. Примером катастроф может служить крушение моста консольного типа через реку Св. Лаврентия в США, а также Квебекского моста. Причиной этих трагедий стал неверный расчет сжатого составного стержня на устойчивость.

Некоторые примеры потери устойчивости приведены на рис. 20.4. В случае сжатия кольца или тонкой оболочки радиально на-

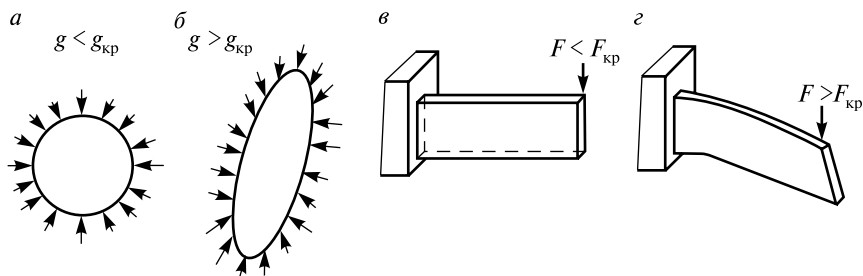


Рис. 20.4. Формы потери устойчивости:  
а, б — кольцо; в, з — консольная балка

правленными нагрузками (рис. 20.4, а) при некотором их значении (критическом) круговая форма сечения переходит в эллиптическую (рис. 20.4, б). Консоль вытянутого прямоугольного сечения (рис. 20.4, в), работающая на прямой изгиб в плоскости наибольшей жесткости при критическом значении изгибающей силы, закручивается (рис. 20.4, з). Конечно, изложенными примерами не исчерпывается все многообразие случаев потери устойчивости.

Изложенное приводит к необходимости нахождения критических сил и нагрузок, тем более что, как показывает опыт проектирования, даже для стержня, изображенного на рис. 20.3, потеря устойчивости происходит при напряжениях, меньших предела текучести материала (и даже предела пропорциональности). Другими словами, потеря устойчивости происходит ранее исчерпания прочности стержня.

Сформулируем определение критической силы. *Критической силой  $F_{кр}$  называется такое наименьшее значение сжимающей силы, при котором происходит смена вида равновесного состояния с устойчивого на неустойчивое.*

Потеря устойчивости прямолинейной формы равновесия центрально-сжатого прямого стержня носит также название *продольного изгиба*. Особенностью продольного изгиба является внезапность его возникновения. Необходимо заметить, что понятие устойчивости не следует смешивать с понятием прочности; каждое из них имеет самостоятельное значение.

В некоторых случаях при выполнении практических расчетов на устойчивость критическую нагрузку считают разрушающей, а допускаемую нагрузку определяют как часть критической:

$$[F] = F_{\text{кр}} / [n_y],$$

где  $[n_y]$  — нормируемое значение коэффициента запаса устойчивости.

Величина коэффициента устойчивости принимается примерно равной коэффициенту запаса прочности. Например, для стержней, изготовленных из стали,  $[n_y] = 1,5 \dots 3,5$ , из чугуна  $[n_y] = 3,5 \dots 6$ .

## 20.2. Формула Эйлера для определения критической силы

Рассмотрим шарнирно опертый по концам центрально-сжатый стержень длиной  $l$  и жесткостью поперечного сечения на изгиб  $EI$  (рис. 20.5).

Воспользуемся для определения критического значения силы  $F$  статическим методом. С этой целью зададим системе отклоненное изогнутое равновесное состояние и определим условие, при котором оно оказывается впервые возможным при статическом увеличении значения силы. Таким образом, по существу задача об определении критической силы заменяется задачей о бифуркации равновесных состояний. При этом остается за рамками обсуждения вопрос о том, какими качественно являются все эти равновесные состояния — устойчивыми или неустойчивыми. Такой анализ возможен лишь при исследовании энергии системы, который мы проводить не будем.

Итак, задаем системе отклоненное состояние, характеризующееся перемещениями  $v(z)$  (рис. 20.5). Тогда, используя приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня, запишем

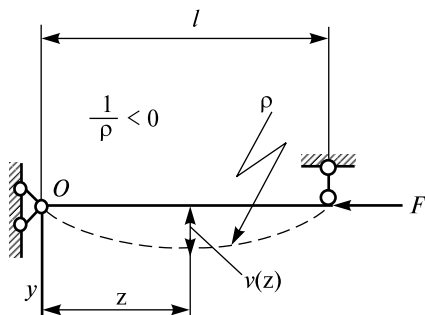


Рис. 20.5. Продольный изгиб сжатого стержня, шарнирно закрепленного по концам

$$EIv'' = -M(z) = -Fv. \quad (20.1)$$



Знак «—» поставлен потому, что полученный изгибающий момент создает отрицательную кривизну стержня. Заметим, что изгибающий момент определяется для деформированного его состояния.

Стандартно обозначим

$$k^2 = \frac{F}{EI}.$$

где  $k$  — коэффициент продольной силы,  $1/\text{см}$ .

Тогда приходим к линейному однородному дифференциальному уравнению

$$v'' + k^2 v = 0. \quad (20.2)$$

Общее решение уравнения (20.2) имеем вид

$$v = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz. \quad (20.3)$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определим из граничных условий:

$$1) z = 0, v = 0; \quad 2) z = l, v = 0.$$

Из первого граничного условия следует, что  $C_2 = 0$ , а из второго получим

$$C_1 \sin kl = 0; \quad (20.4)$$

если  $C_1 = 0$ , то имеем тривиальное решение  $v = 0$ . Такое решение соответствует равновесию неискривленного стержня. Если же  $C_1 \neq 0$ , то  $\sin kl = 0$ . Это условие возможно тогда, когда  $kl = 0, \pi, 2\pi, \dots n\pi$ , где  $n$  — произвольное целое число. Первое условие дает  $n = 0$ ; очевидно,  $F = 0$  либо  $EI = \infty$ , т.е. продольного изгиба нет. Рассматривая второе значение как приводящее к минимальному значению силы, получим

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \quad (20.5)$$

При таком значении действующей силы оказывается впервые возможным существование отклоненных изогнутых состояний стержня, бесконечно близких к исходному. Анализ энергии системы показывает, что при бесконечно малом превышении этого значения силы прямолинейное исходное состояние становится неустойчивым.

Изогнутые равновесные состояния описываются синусоидой

$$v = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}. \quad (20.6)$$

При этом величина  $C_1$  в линейной постановке задачи остается неопределенной. Практически это означает, что при данной силе любые возмущения приведут к тому, что внезапно появятся прогибы и напряжения резко возрастут. Такая внезапность чрезвычайно опасна для реальных конструкций и ее следует предупредить расчетом, правильно назначив размеры поперечного сечения.

Критическая сила, определенная из выражения (20.5), оказывается не зависящей от характеристик прочности материала. Следует обратить внимание на то, что для двух стержней с одинаковыми геометрическими характеристиками, но изготовленными из малоуглеродистой стали и высокопрочной низколегированной стали, критические силы одинаковы, так как значения модуля упругости для них практически одинаковые.

### 20.3. Влияние способа закрепления концов стержня на значение критической силы

Вернемся к дифференциальному уравнению (20.2), для которого получены значения силы (20.5) и отклоненные равновесные состояния (рис. 20.6, а). Если взять два следующих решения для характеристического уравнения устойчивости  $n = 2$  и  $n = 3$ , то получим:

$$F|_{n=2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}, \quad v|_{n=2} = C_1 \sin \frac{2\pi z}{l};$$

$$F|_{n=3} = \frac{9\pi^2 EI}{l^2}, \quad v|_{n=3} = C_1 \sin \frac{3\pi z}{l}.$$

Следовательно, при дальнейшем увеличении силы возможны еще два равновесных состояния. Для первого из них при увеличении силы в 4 раза отклоненное равновесное состояние представлено в виде двух полуволн синусоиды (рис. 20.6, б). Для другого состояния при увеличении силы в 9 раз отклоненное равновесное состояние имеет вид трех полуволн синусоиды (рис. 20.6, в). Эти состояния не

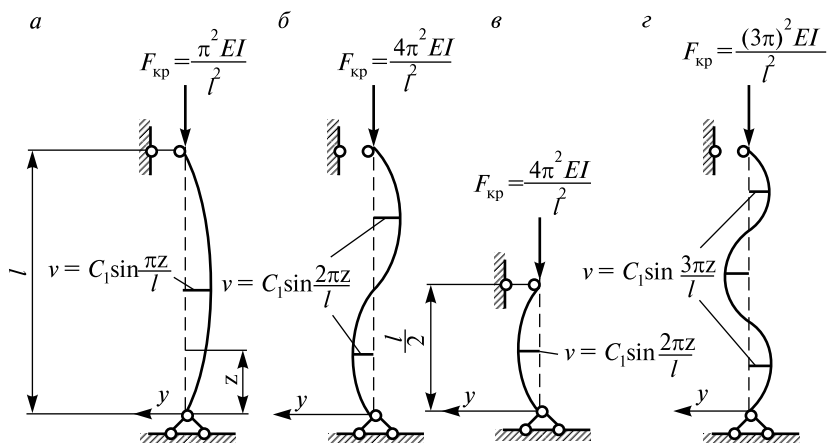


Рис. 20.6. Формы потери устойчивости стержня, отвечающие различным значениям  $n$

имеют практического значения, так как являются неустойчивым. Изучение этого решения приводит к двум выводам:

1) каждому решению характеристического уравнения соответствует свое значение силы и свое отклоненное равновесное состояние;

2) для каждого решения характеристического уравнения можно найти шарнирно опертый стержень соответствующей длины, имеющий такую же критическую силу и свою отклоненную равновесную форму по одной полуwave синусоиды (рис. 20.6, в).

В связи с изложенным полученное решение задачи о шарнирно опертом стержне может быть распространено на другие случаи закрепления стержня (рис. 20.7).

Каждому из них может быть поставлен в соответствие шарнирно опертый стержень такой длины, чтобы отклоненное равновесное состояние совпало с полуwave синусоиды.

Введем понятие приведенной (свободной) длины стержня  $l_0 = \mu l$ , где  $\mu$  — коэффициент приведенной длины, зависящий от закрепления концов стержня.

Приведенной длиной называют условную длину шарнирно опертого по концам стержня, для которого критическая сила равна критической силе для заданного стержня.

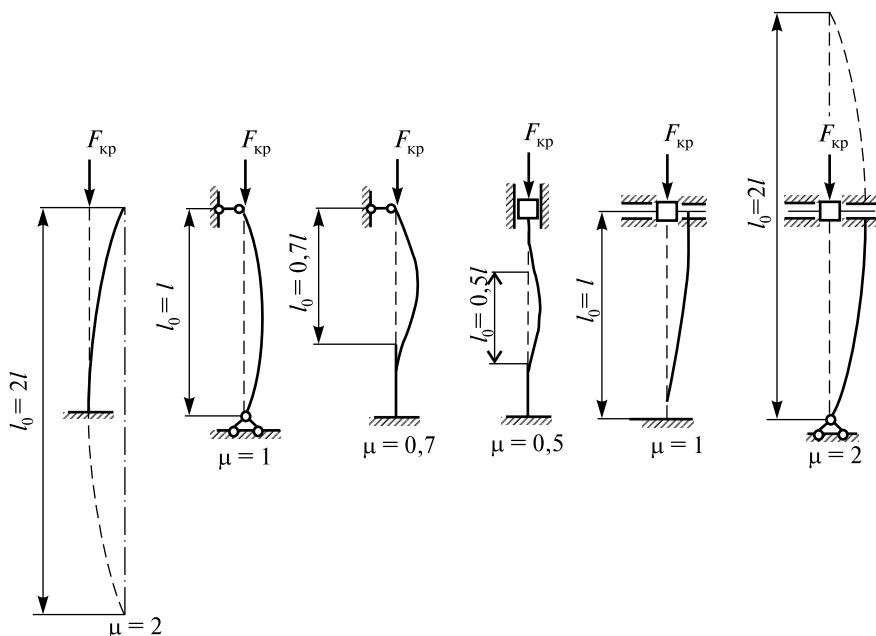


Рис. 20.7. Значения коэффициента приведенной длины для сжатых стержней при различных способах закрепления концов

Обратим внимание на то, что при выводе формулы Эйлера использовалось дифференциальное уравнение оси изогнутого стержня при плоском изгибе, тогда как задача об определении критической силы является пространственной задачей. Поэтому для случая одинакового закрепления концов стержня от перемещений в различных направлениях *формула Эйлера принимает вид*

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (20.7)$$

где  $I_{\min}$  — минимальный момент инерции поперечного сечения.

В случае неодинакового закрепления концов стержня от перемещений в различных направлениях необходимо выполнить два вычисления по формуле (20.7), для каждого из направлений принимая свои значения момента инерции и коэффициента приведен-

ной длины. Значение критической силы будет меньшим из полученных результатов.

Анализируя формулу (20.7), видим, что на величину критической силы из всех механических характеристик материала влияет лишь модуль упругости. Модуль упругости для всех марок стали практически одинаков, в связи с чем использование высокопрочных сталей для стержней, работающих на продольный изгиб, нецелесообразно.

При одинаковых условиях закрепления в разных плоскостях рациональны те сечения, которые равноустойчивы во всех направлениях и обладают большим моментом инерции при наименьшей площади поперечного сечения.

## 20.4. Пределы применимости формулы Эйлера

Формула Эйлера была выведена в предположении, что деформирование материала подчиняется закону Гука, так как применялось дифференциальное уравнение изгиба упругой линии. Поэтому *формула Эйлера применима* только до тех пор, *пока критические напряжения не превышают предела пропорциональности для данного материала*. Чтобы установить предел применимости формулы Эйлера, найдем критические напряжения, т.е. те, которые возникли бы в поперечном сечении стержня при действии на него сжимающей силы, равной критической:

$$\sigma_{\text{кр}} = F_{\text{кр}} / A = \pi^2 EI_{\text{min}} / (\mu l)^2 A = \pi^2 E / (\mu l / i_{\text{min}})^2,$$

где  $i_{\text{min}} = \sqrt{(I_{\text{min}} / A)}$  — минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня.

Введем обозначение

$$\lambda_{\text{max}} = \mu l / i_{\text{min}}.$$

Величина  $\lambda$  называется *гибкостью стержня*. Отметим, что она зависит только от размеров стержня и характера закрепления и не зависит от его материала. Конечно, приведенные ранее преобразования справедливы лишь для случая одинакового закрепления концов стержня в разных направлениях.

Выразим критическое напряжение через гибкость:

$$\sigma_{\text{кр}} = \pi^2 E / \lambda_{\text{max}}^2. \quad (20.8)$$

Из формулы (20.8) видно, что чем больше гибкость, тем при меньшем значении критических напряжений происходит потеря устойчивости.

Найдем предельную гибкость из условия, что критические напряжения не должны превышать предела пропорциональности материала стержня:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\text{max}}^2} \leq \sigma_{\text{пц}},$$

Откуда

$$\lambda_{\text{max}} \geq \sqrt{(\pi^2 E) / \sigma_{\text{пц}}}.$$

Обозначим

$$\lambda_0 = \sqrt{(\pi^2 E) / \sigma_{\text{пц}}} \quad (20.9)$$

значение предельной гибкости, т.е. наименьшее для данного материала значение гибкости, при которой потеря устойчивости происходит в упругой стадии его работы.

Видим, что  $\lambda_0$  зависит только от механических характеристик материала — предела пропорциональности и модуля упругости.

Следовательно, формула Эйлера справедлива только в том случае, если гибкость стержня будет не меньше предельной гибкости материала стержня:

$$\lambda_{\text{max}} \geq \lambda_0.$$

Выясним, какие значения принимает  $\lambda_0$  для некоторых материалов. Для стали марки ВСт3  $\sigma_{\text{пц}} \approx 200...210$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, предельная гибкость  $\lambda_0 \approx 100$ , для чугуна  $\lambda_0 \approx 80$ , для дерева  $\lambda_0 \approx 70$ .

## 20.5. Формула Ф.С. Ясинского

Эксперименты показали, что *потеря устойчивости происходит в упругой стадии* работы материала только для весьма гибких стержней, например, для стали марки ВСт3 *при гибкости, большей*  $\lambda_0 \approx 100$ .

Но это не означает, что при меньших гибкостях потеря устойчивости невозможна, напротив, для большинства реальных конструкций потеря устойчивости происходит в упругопластической стадии работы материала.

Результаты испытаний таких стержней изображаются точками на графике зависимости критических напряжений от гибкости стержня (рис. 20.8), которые можно подвергнуть статистической обработке. Наиболее часто ее результаты представляются двумя прямыми — наклонной и горизонтальной. Наклонная прямая  $\sigma_{кр} = \sigma_{кр}(\lambda)$  представляется зависимостью

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \quad (20.10)$$

называемой формулой Ф.С. Ясинского.

В формуле (20.10) параметры прямой  $a$  и  $b$  зависят от материала стержня. Например, для стержня из малоуглеродистой стали  $a = 310$  МПа,  $b = 1,14$  МПа, для стержня из дерева  $a = 29,3$  МПа,  $b = 0,194$  МПа. Смысл этих величин ясен из чертежа:  $a$  — это отрезок, отсекаемый прямой от оси критических напряжений,  $b$  — это тангенс угла наклона прямой к оси гибкости.

Горизонтальная прямая соответствует значениям напряжений, равным пределу текучести  $\sigma_T$  для данного материала. При малых гибкостях потеря устойчивости невозможна, еще до нее наступает исчерпание прочности. Принимается, что для малоуглеродистой стали такое явление возможно до гибкости  $\lambda_{пр} = 61,7$ .

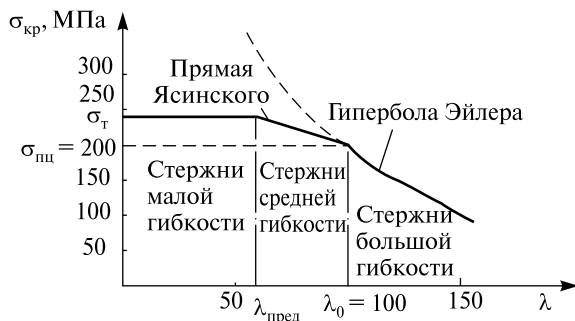


Рис. 20.8. Зависимость между критическими напряжениями и гибкостью стержня из углеродистой стали

*Стержни, у которых  $\lambda \leq \lambda_{\text{пр}}$ , называются стержнем малой гибкости, стержни, гибкость которых  $\lambda_{\text{пр}} \leq \lambda \leq \lambda_0$ , называются стержнями средней гибкости, а когда  $\lambda \leq \lambda_0$ , имеем дело со стержнями большой гибкости.*

В упругопластической стадии работы материала возможны другие способы представления результатов эксперимента, в связи с чем приводимые значения для  $\lambda_{\text{пр}}$  имеют несколько условный характер. Имеются также материалы, для которых используются нелинейные зависимости  $\sigma_{\text{кр}}(\lambda)$ . Так, для чугуна

$$\sigma_{\text{кр}} = 776 - 12\lambda + 0,053\lambda^2 \text{ (МПа)}. \quad (20.11)$$

В заключение еще раз обратимся к графической зависимости критических напряжений от гибкости для стального стержня, представленной на рис. 20.8. Видим, что при  $\lambda \geq 100$  график представляется гиперболой Эйлера, при  $60 \leq \lambda \leq 100$  — прямой Ясинского, при  $0 \leq \lambda \leq 60$  — горизонтальной прямой. Для значений  $\lambda \leq 100$  гипербола Эйлера на рисунке изображена пунктирной линией.

Таким образом, вычислив гибкость стержня и отложив ее на диаграмме, построенной для его материала, определим, на какой участок диаграммы приходится  $\lambda$ , и в зависимости от этого производим расчет стержня на устойчивость.

## **20.6. Практические расчеты сжатых стержней на устойчивость**

В зависимости от цели задачи и ее исходных данных можно выделить следующие три вида расчетов на устойчивость.

**А. Поверочный расчет.** Цель этого расчета состоит в оценке устойчивости сжатого элемента при действии на него заданной внешней нагрузки. Задача решается в следующей последовательности:

1. Вычисляется гибкость стержня.
2. В зависимости от гибкости — выбирается формула, по которой ведется расчет на устойчивость.

Условно стержни разделяются на три группы:

- а) стержни большой гибкости, для которых расчет ведется по формуле Эйлера;
- б) стержни средней гибкости, расчет на устойчивость ведется по формуле Ясинского;



г) стержни малой гибкости, для которых расчет на устойчивость не проводят, проверяют лишь их прочность.

3. Вычисляется критическая сила  $F_{кр}$ .

4. Находятся коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = F_{кр} / F. \quad (20.12)$$

5. Проверяется, соблюдается ли условие устойчивости путем сравнения расчетного коэффициента запаса устойчивости с нормируемым.

**Б. Определение допускаемой нагрузки.** В этом расчете определяется максимально допустимое значение сжимающей силы, при которой будет обеспечен требуемый запас устойчивости.

По найденному значению критической силы и заданному коэффициенту запаса устойчивости находят значение сжимающей силы:

$$[F] = F_{кр} / n. \quad (20.13)$$

**В. Проектный расчет.** Цель этого расчета заключается в определении требуемых размеров стержня, при которых он будет обладать требуемым запасом устойчивости.

Наибольшее распространение получил включенный в нормы проектирования расчет на устойчивость, по форме аналогичный расчету на простое сжатие. В зависимости от принятого метода расчета (по предельным состояниям или по допускаемым напряжениям) используются следующие расчетные формулы:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} \leq \varphi \gamma_c R; \\ \sigma &= \frac{F}{A} \leq \varphi [\sigma], \end{aligned} \quad (20.14)$$

где коэффициент  $\varphi$  называется коэффициентом продольного изгиба, он всегда меньше единицы;

$R$  — расчетное сопротивление;

$\gamma_c$  — коэффициент условий работы.

Все величины принимаются для стальных стержней в соответствии со СНиП II-23-81. В табл. 20.1 приведены значения коэффициента  $\varphi$  в зависимости от гибкости стержня для различных материалов.

Таблица 20.1

**Значения коэффициента продольного изгиба  $\varphi$  центрально сжатых элементов по СНиП II-23-81**

Гибкость $\lambda$	Материал		
	Сталь	Чугун	Дерево
10	0,988	0,97	0,99
20	0,967	0,91	0,97
30	0,939	0,81	0,93
40	0,906	0,69	0,87
50	0,869	0,57	0,80
60	0,827	0,44	0,71
70	0,782	0,34	0,61
80	0,734	0,26	0,49
90	0,665	0,20	0,38
100	0,599	0,16	0,31
110	0,537	—	0,25
120	0,479	—	0,22
130	0,425	—	0,18
140	0,376	—	0,16
150	0,328	—	0,14
160	0,290	—	0,12
170	0,259	—	0,11
180	0,233	—	0,10
190	0,210	—	0,09
200	0,191	—	0,08
210	0,174	—	—
220	0,160	—	—

При проектном расчете приходится пользоваться методом последовательных приближений, так как в начале расчета значение коэффициента  $\varphi$ , зависящего от гибкости, а следовательно, от размеров поперечного сечения стержня, неизвестно. Для каждой из попыток вычисления ведутся в следующей последовательности:

1. Задаемся значением коэффициента  $\varphi$ .
2. Вычисляем требуемое значение площади поперечного сечения

в соответствии с (20.14), например, при расчете по предельным состояниям:

$$A_{\text{тр}} = F / \phi \gamma_c R. \quad (20.15)$$

3. Осуществляем подбор размеров поперечного сечения по требуемому значению площади.

4. Выполняем проверку прочности по (20.14), для чего определяем гибкость стержня  $\lambda$  и значение коэффициента  $\phi$ .

Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока разница между напряжением и расчетным сопротивлением (допускаемым напряжением) станет меньше 2—3%. В случае, когда проверка прочности дает удовлетворительные результаты, процесс приближений прекращается.

## 20.7. Примеры расчета стержней на устойчивость

**Пример 20.1.** Для стойки двутаврового поперечного сечения № 10 длиной 1,5 м, жестко заделанной одним концом, определить допускаемое значение сжимающей силы  $F$ . Материал стойки — сталь ВСт3, коэффициент запаса устойчивости  $[n_y] = 2,5$ .

*Решение.* По сортаменту ГОСТ 8239-89 находим для данного двутавра моменты инерции  $I_x = 198 \text{ см}^4 = 198 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $I_y = 17,9 \text{ см}^4 = 17,90 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ . Стержень теряет устойчивость в плоскости наименьшей жесткости, поэтому следует выбрать наименьший момент инерции  $I_{\min} = I_y = 17,9 \text{ см}^4 = 17,9 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ , для которого  $i_{\min} = i_y = 1,22 \text{ см} = 1,22 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

Вычислим гибкость стержня. Для данного закрепления стержня  $\mu = 2$ , тогда

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 150}{1,22} = 245.$$

Для данной стали предельная гибкость  $\lambda_{\text{пр}} = 100$ , значит, гибкость стержня  $\lambda$  превышает предельную гибкость материала, поэтому для определения критической силы воспользуемся формулой Эйлера:

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{9,86 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 17,9 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 1,50)^2} = 39\,700 \text{ Н} = 39,7 \text{ кН}.$$

Определим допускаемое значение центрально сжимающей силы:

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{39,7}{2,5} = 15,88 \text{ кН}.$$

**Пример 20.2.** Чугунную стойку длиной  $l = 2,7$  м, выполненную круглого поперечного сечения диаметром  $0,12$  м, проверить на устойчивость, если центрально приложенная сжимающая сила  $F = 200$  кН, а коэффициент запаса на устойчивость  $[n_y] = 5$ . Предполагаются одинаковые условия закрепления верхнего конца стержня от перемещений в различных направлениях.

*Решение.* Вычислим гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}.$$

Для круга минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = i = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\pi d^4 / 4}{64 \pi d^2}} = \frac{d}{4} = \frac{0,12}{4} = 0,03 \text{ м}.$$

Коэффициент приведения длины  $\mu$  для заданного стержня равен  $0,7$ . Тогда гибкость стойки

$$\lambda = \frac{0,7 \cdot 2,7}{0,03} = 63.$$

Для чугуна предельная гибкость стержня равна  $80$ .

Гибкость стержня оказалась меньше предельной гибкости, поэтому формулой Эйлера пользоваться нельзя.

Определим критическое напряжение:

$$\sigma_{\text{кр}} = 776 - 12\lambda + 0,053\lambda^2 = 776 - 12 \cdot 63 + 0,053 \cdot 63^2 = 230,36 \text{ МПа}.$$

Зная критические напряжения, определим критическую силу:

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} A = 230,36 (\pi 0,12^2 / 4) = 2,60 \text{ МН} = 2600 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса на устойчивость стойки

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{2600}{200} = 13.$$

Следовательно, стойка имеет надлежащий запас устойчивости.

**Пример 20.3.** Для центрально сжатой колонны (рис. 20.9) подобрать сечение, составленное из двух швеллеров. Сечение считать монолитным и равноустойчивым. Из этого условия определить расстояние  $2a$  между центрами тяжести швеллеров. Расчетная сжимающая сила  $F = 450$  кН, длина стержня  $2,5$  м. Материал швеллеров — сталь ВСт3 с расчетным сопротивлением сжатию  $R = 210$  МПа.

*Решение.* Выполним первое приближение. Заддим  $\varphi = 0,5$ . Условимся здесь и в дальнейшем помечать цифрой  $1$  все геометрические характеристики, от-

носящиеся к одному швеллеру. Из формулы (20.15) определим требуемую площадь поперечного сечения одного швеллера  $A_{\text{тр}}^{(1)}$ , так как  $N = F$ , получим

$$A_{\text{тр}}^{(1)} = \frac{N}{2\varphi R} = \frac{450 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 2,14 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 = 21,4 \text{ см}^2.$$

Обращаясь к сортаменту ГОСТ 8240-89, находим, что ближе всего к полученной требуемой площади подходит швеллер № 18<sup>a</sup>, для которого  $A_{\text{ГОСТ}}^{(1)} = 22,2 \text{ см}^2$ .

Переходим к проверке напряжений в стержне, составленном из двух таких швеллеров. Для этого, прежде всего, определяем гибкость стержня

$$\lambda = \mu l / i_{\min}.$$

Коэффициент приведенной длины  $\mu$  для данного варианта закрепления концов (рис. 20.7) равен 2. Для определения гибкости требуется вычисление минимального радиуса инерции  $i_{\min}$ . Напомним, что по условию задачи необходимо обеспечить равноустойчивость стержня, следовательно, моменты инерции относительно осей  $x$  и  $y$  равны между собой и также равны радиусы инерции  $i_x = i_y = i_{\min}$ .

Вычислим радиус инерции всего сечения относительно оси  $x$ , так как этот подсчет проще:

$$i_x = \sqrt{\frac{2I_x^{(1)}}{2A^{(1)}}} = i_x^{(1)}.$$

Итак, радиус инерции всего сечения относительно оси  $x$  оказывается равным радиусу инерции одного швеллера относительно этой же оси. Последняя величина может быть взята из сортамента:  $i_x^{(1)} = 7,32 \text{ см}$ .

Таким образом, гибкость стержня составляет

$$\lambda = \frac{2 \cdot 2,5}{0,0732} = 68,3.$$

По таблице коэффициентов  $\varphi$  (табл. 20.1), используя линейную интерполяцию, находим коэффициент продольного изгиба:

при  $\lambda = 60$ ,  $\varphi_{60} = 0,827$ ; при  $\lambda = 70$ ,  $\varphi_{70} = 0,782$ ;

при  $\lambda = 68,3$  имеем (рис. 20.10)

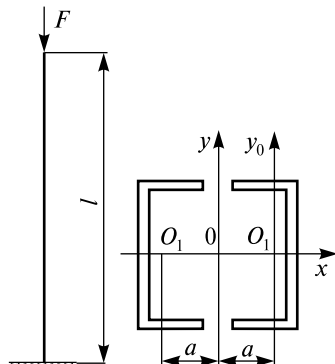


Рис. 20.9

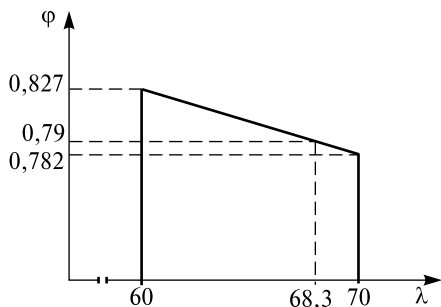


Рис. 20.10. Линейная интерполяция

кономерен, так как полученное значение коэффициента  $\varphi$  существенно отличается от принятого в первом приближении. Поскольку по результатам первого приближения получено недонапряжение, необходимо уменьшить размеры швеллера. Для этого надо либо вновь задаться значением  $\varphi$  (между принятым и полученным значением, в первом приближении), либо по таблице сортамента подобрать швеллер меньшего сечения.

Выполним второе приближение:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{\text{тр}}^{(1)}}{2} = \frac{0,5 + 0,79}{2} = 0,645.$$

Требуемая площадь поперечного сечения стойки

$$A_{\text{тр}}^{(1)} = \frac{N}{2\varphi_2 R} = \frac{450 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,645 \cdot 210 \cdot 10^6} = 1,66 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 = 16,6 \text{ см}^2.$$

Обращаясь к сортаменту ГОСТ 8240-89, находим, что ближе всего к полученной требуемой площади подходит швеллер № 16, для которого  $A^{(1)} = 18,1 \text{ см}^2$

и  $i_x^{(1)} = 6,42 \text{ см}$ .

Далее,

$$\lambda = \frac{2 \cdot 2,5}{0,0642} = 77,9 \text{ и } \varphi_{\text{тр}}^{(2)} = 0,744.$$

Проверяем напряжение по формуле (9.14):

$$\sigma = \frac{450 \cdot 10^3}{0,744 \cdot 2 \cdot 18,1 \cdot 10^{-4}} = 167,1 \text{ МПа} < R.$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{тр}}^{(1)} &= \varphi_{70} + \frac{\varphi_{60} - \varphi_{70}}{10} (70 - 68,3) = \\ &= 0,78965 \approx 0,79. \end{aligned}$$

Выполним по формуле (20.14) проверку напряжений:

$$\sigma = \frac{450 \cdot 10^3}{0,79 \cdot 2 \cdot 22 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 128,29 \text{ МПа}.$$

Полученное напряжение значительно отличается от расчетного сопротивления  $R$ . Такой результат за-

Выполним третье приближение:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{\text{тр}}^{(2)}}{2} = \frac{0,645 + 0,744}{2} = 0,6945.$$

Находим

$$A_{\text{тр}}^{(1)} = \frac{N}{2\varphi_3 R} = \frac{450 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,6945 \cdot 210 \cdot 10^6} = 1,543 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 = 15,43 \text{ см}^2.$$

Уменьшим размеры принимаемого швеллера. Задаемся в третьем приближении швеллером № 14<sup>а</sup>, для которого  $A^{(1)} = 17,0 \text{ см}^2$  и  $i_x^{(1)} = 5,66 \text{ см}$ .

Имеем

$$\lambda = \frac{2 \cdot 2,5}{0,0566} = 88,4 \text{ и } \varphi = 0,665,$$

а напряжение составляет

$$\sigma = \frac{450 \cdot 10^3}{0,665 \cdot 2 \cdot 17,0 \cdot 10^{-4}} = 199 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение в стержне составляет 5,52 %.

Вновь зададимся ближайшим меньшим по площади швеллером № 14, для которого  $A^{(1)} = 15,6 \text{ см}^2$  и  $i_x^{(1)} = 5,60 \text{ см}$ , значения гибкости и коэффициента  $\varphi$  следующие:

$$\lambda = \frac{2 \cdot 2,5}{0,056} = 89,3 \text{ и } \varphi = 0,659.$$

Имеем напряжение в стержне

$$\sigma = \frac{450 \cdot 10^3}{0,659 \cdot 2 \cdot 15,6 \cdot 10^{-4}} = 219 \text{ МПа},$$

что превышает расчетное сопротивление на 4,2 %.

Следовательно, швеллер № 14<sup>а</sup>, полученный по результатам третьего приближения, следует считать окончательно подобранным.

Определим расстояние  $2a$  исходя из равенства моментов инерции относительно осей  $x$  и  $y$ , т.е.  $I_x = I_y$  (рис. 20.9). Момент инерции относительно оси  $y$  равен

$$I_y = 2I_{y_0}^{(1)} + 2A^{(1)}a^2.$$

Выписывая из сортамента значения моментов инерции  $I_{x_0}^{(1)}$  и  $I_{y_0}^{(1)}$ , получим уравнение для определения  $a$ :

$$2 \cdot 545 = 2 \cdot 57,5 + 2 \cdot 17,0a^2, \text{ откуда } a = 5,36 \text{ см.}$$

Поскольку в плоскости  $zOx$  объединение швеллеров производится с помощью планок, то для обеспечения равноустойчивости размер  $a$  необходимо принять большим, чем полученный расчетом. Этот факт следует из теории составных стержней, рассматриваемой в специальных курсах.

Указанное размещение швеллеров обеспечивает равноустойчивость во всех направлениях, так как из равенства двух главных центральных моментов инерции вытекает равенство моментов инерции относительно всех центральных осей.

*Определим критическую и максимальную расчетную силу для выбранного стержня.* Поскольку гибкость стержня ниже предельной ( $\lambda = 88,4$ ), определение критического напряжения производим по формуле Ф.С. Ясинского (20.10):

$$\sigma_{\text{кр}} = 310 - 1,14 \cdot 88,4 = 209 \text{ МПа.}$$

Полученное напряжение выше предела пропорциональности для заданной стали ( $\sigma_{\text{пц}} = 200 \text{ МПа}$ ).

Подсчитаем критическую силу:

$$F_{\text{кр}} = 209 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 17,0 \cdot 10^{-4} = 712 \text{ кН.}$$

Обратим внимание, что ошибочное использование формулы Эйлера (20.7) дает завышенное значение критической силы. Максимальную расчетную силу вычислим, используя выражение (20.14):

$$F_{\text{max}} = \phi AR = 0,665 \cdot 2 \cdot 17,0 \cdot 10^{-4} \cdot 210 \cdot 10^6 = 474 \text{ кН.}$$

Находим коэффициент запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F_{\text{max}}} = \frac{712}{474} = 1,502.$$

Заметим, что сила  $F_{\text{max}}$  выше заданной ( $F = 450 \text{ кН}$ ), так как подбор сечения выполнен с недонапряжением.

В заключение отметим, что в случае использования метода расчета по допускаемым напряжениям все положения изложенного решения остаются в силе, необходимо лишь заменить расчетное сопротивление  $R$  на допускаемое напряжение  $[\sigma]$ .

**Пример 20.4.** Определить критическую силу для стального стержня (рис. 20.11, *a*), зашпеленного нижним концом. Верхнее сечение не имеет перемещений в плоскости  $zOx$ , в плоскости  $zOy$  перемещения свободны. Длина стержня 3 м; поперечное сечение выполнено из двутавра № 20.

*Решение.* Обратим внимание на то, что условия закрепления стержня от перемещений в различных направлениях различны.

Возможные перемещения стержня в случае потери устойчивости изображены на рис. 20.11, *б*. Выпишем необходимые величины, взятые из сорта-



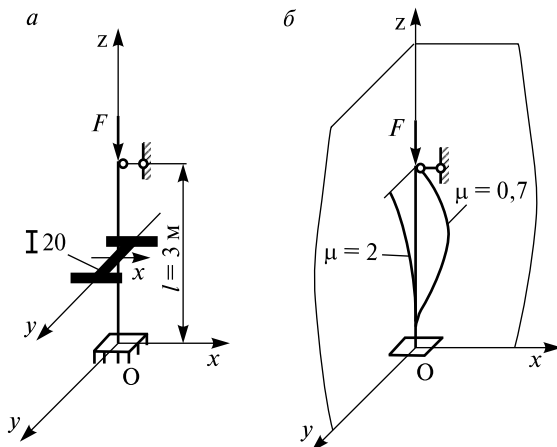


Рис. 20.11: *a* — схема заданного стержня; *б* — возможные перемещения стержня

мента:  $I_x = 1840 \text{ см}^4 = 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ;  $I_y = 115 \text{ см}^4 = 115 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ;  $A = 26,8 \text{ см}^2 = 26,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $i_x = 8,28 \text{ см} = 8,28 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $i_y = 2,07 \text{ см} = 2,07 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

Определим гибкость стержня в обеих плоскостях.

$$\text{В плоскости } zOx \quad \lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 300}{2,07} = 101,45;$$

$$\text{В плоскости } zOy \quad \lambda_y = \frac{\mu l}{i_y} = \frac{2 \cdot 300}{8,28} = 72,46.$$

Выполним вычисления соответствующих сил, в первом случае по формуле Эйлера, во втором случае — по формуле Ясинского:

$$F = \frac{\pi^2 EI_y}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 2 \cdot 10^{11} \cdot 115 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 3)^2} = 0,5147 \text{ МН};$$

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b \lambda_x = 310 - 1,14 \cdot 72,46 = 227,4 \text{ МПа};$$

$$F = \sigma_{\text{кр}} A = 227,4 \cdot 10^6 \cdot 26,8 \cdot 10^{-4} = 0,6094 \text{ МН}.$$

Критической силой является наименьшее из полученных значений  $F_{\text{кр}} = 0,5147 \text{ МН}$ .

Обратим внимание на то, что после определения гибкости в обеих плоскостях необходимости в двух вычислениях для сил не было, так как очевидно, что критической силой будет то значение, которое соответствует наибольшей гибкости.

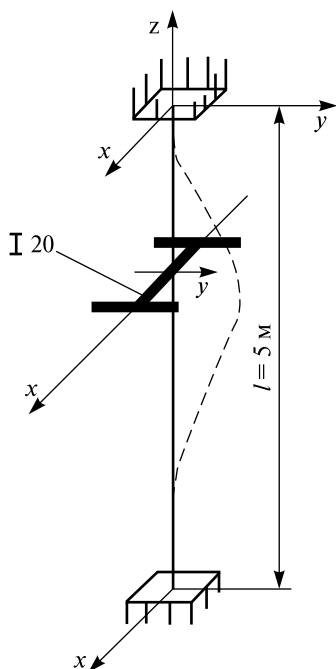


Рис. 20.12

**Пример 20.5.** Определить, при какой температуре  $t$  °С потеряет устойчивость, зашеченная с двух сторон стальная колонна (рис. 20.12), выполненная из двутавра № 20. Принять  $E = 200$  ГПа, коэффициент линейного расширения  $\alpha = 125 \cdot 10^{-7}$  1/град.

*Решение.* Из таблицы сортамента для двутавра № 20 устанавливаем геометрические характеристики. Анализ схемы закрепления стержня позволяет сделать вывод о том, что наибольшая гибкость стержня имеет место относительно оси  $x$ .

Определим максимальную гибкость стержня:

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{0,5 \cdot 5}{2,07 \cdot 10^{-2}} = 120,8.$$

Следовательно, потеря устойчивости произойдет в упругой стадии работы материала. Значит, возникающее при нагревании стержня усилие следует приравнять критической силе, вычисленной по Эйлеру.

Усилия сжатия определим, решая обычную статически неопределимую задачу для стержня с двумя зашеченными концами:

$$\frac{Nl}{EA} = \alpha l \Delta t^\circ, \quad \text{или} \quad N = EA \alpha \Delta t^\circ. \quad (20.16)$$

Уравнение для определения  $\Delta t_{\text{кр}}^\circ$  имеет вид

$$EA \alpha \Delta t^\circ = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2}.$$

Окончательно имеем

$$\Delta t_{\text{кр}}^\circ = \frac{\pi^2 I_x}{(\mu l)^2 A \alpha} = \frac{3,14^2 \cdot 115 \cdot 10^{-8}}{(0,5 \cdot 5)^2 \cdot 26,8 \cdot 10^{-2} \cdot 125 \cdot 10^{-7}} = 54,2^\circ.$$

Обратим внимание, что изложенное решение справедливо лишь при гибкостях больше предельной для данного материала. Только в пределах упругой стадии работы материала (когда справедлив закон Гука) возможно использование соотношения (20.16). В противном случае определение усилия  $N$  значительно усложняется.

## Глава 21. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ НА ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

### 21.1. Основные понятия

В рассмотренных ранее разделах при изучении задачи об одновременном изгибе и сжатии стержней считалось, что перемещения и напряжения в каждой точке стержня на основании принципа независимости действия сил могут быть найдены отдельно от сжатия и от изгиба, а затем алгебраически просуммированы. Такая схема решения возможна, если перемещения в стержне малы по сравнению с размерами стержня. Подобный случай деформации стержня был рассмотрен при изучении внецентренного растяжения и сжатия. Однако предложенный метод нельзя распространить на гибкие стержни.

Расчет гибких стержней, работающих на сжатие с изгибом, необходимо вести по деформированному состоянию. Вследствие деформации стержня при загрузении гибких стержней возникают перемещения, поэтому продольная сжимающая сила создает дополнительные изгибающие моменты. Изгибающий момент от продольной силы может оказаться значительным и поэтому им пренебрегать нельзя. Такой случай загрузения стержней получил название *продольно-поперечного изгиба*.

### 21.2. Расчет внецентренно сжатой стойки

Рассмотрим консольный стержень длиной  $l$  и жесткостью  $EI$  поперечного сечения на изгиб, загруженный сжимающей силой  $F$  и имеющий эксцентриситет  $e$ , не меняющийся в процессе загрузения. В отличие от центрального приложения силы такой стержень с самого начала нагружения имеет перемещения  $v$ , которые будут возрастать по мере увеличения силы.

Рассматриваемое загрузение стержня с полным основанием может быть отнесено к продольно-поперечному изгибу стержня, так как он испытывает одновременно действие сжимающей силы и поперечной нагрузки в виде сосредоточенного момента  $Fe$ , полученного в результате переноса точки приложения силы  $F$  на ось стержня.

Обозначим через  $\delta$  перемещение верхнего конца стержня. Запишем изгибающий момент в произвольном сечении:

$$M = -F(\delta + e - v),$$

и дифференциальное уравнение прогибов сжато-изогнутого стержня будет иметь вид

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{F}{EI}(\delta + e - v).$$

Последнее уравнение удобно переписать в виде следующего неоднородного дифференциального уравнения, обозначив  $n^2 = F/EI$ :

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + n^2 v = n^2(\delta + e). \quad (21.1)$$

Решение (21.1) представлено в виде суммы общего и частного решений:

$$v = A \sin nz + B \cos nz + \delta + e, \quad (21.2)$$

в котором постоянные  $A$ ,  $B$ , и  $\delta$  определяются из граничных условий: 1)  $z = 0$  и  $v = 0$ ; 2)  $z = 0$  и  $v' = 0$ ; 3)  $z = l$  и  $v = \delta$ .

Эти граничные условия приводят к следующим значениям постоянных:

$$A = 0; \quad B = -(\delta + e) = -e/(\cos nl),$$

в результате чего линия прогибов определяется уравнением

$$v = \frac{e}{\cos nl}(1 - \cos nz).$$

Представляют интерес графики зависимости наибольшего перемещения  $\delta = v|_{z=l}$  от действующей силы  $F = n^2 EI$ , которые приведены на рис. 21.1. При уменьшении эксцентриситета они приближаются к прямой  $F = F_{кр}$ .

Значение критической силы можно получить из приведенного решения при  $e = 0$ , чему соответствует характеристическое уравнение устойчивости для стержня, заделанного одним концом и имеющего свободным другой:

$$\cos nl = 0.$$

Этому уравнению отвечает наименьший корень  $nl = p/2$  и соответствующее ему значение силы

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

Кривые, показанные на рис. 21.1, необходимы для анализа прочности стержня при продольно-поперечном изгибе.

Приведем на одном чертеже графики зависимости между действующей силой  $F$  и характерным перемещением  $\delta$  (наибольшим перемещением гибкой стойки, рис. 21.2). При

центральной приложении силы и решении задачи в линейной постановке имеют место две прямые 1 и 2: одна из них совпадает с осью  $F(v = 0)$  другая  $F = F_{\text{кр}}$ . При значении сил, меньших  $F_{\text{кр}}$  имеет место только одно (вертикальное) равновесное состояние; при силах, больших  $F_{\text{кр}}$ , оно становится неустойчивым (на рис. 21.2 такие состояния помечены звездочками).

При решении задачи в нелинейной постановке (учет полного выражения для кривизны стержня) отклоненные равновесные состояния описываются кривой 3 (если не рассматривать еще какие-нибудь отклоненные равновесные состояния). При эксцентричном приложении силы и решении задачи в линейной постановке прямые 1 и 2 заменяются кривыми 3 (в зависимости от знака эксцентриситета).

В нелинейной задаче эта кривая заменяется кривой 4 (см. рис. 21.2),

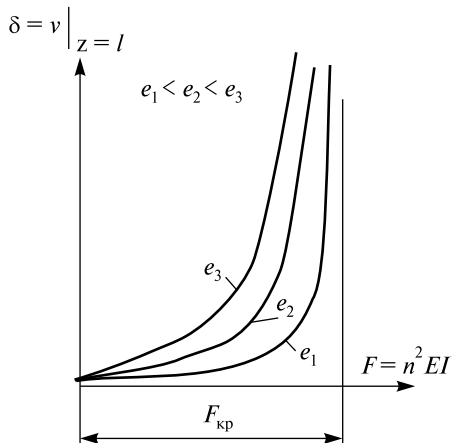


Рис. 21.1. Зависимости между сжимающей силой и максимальным прогибом эксцентренно сжатой стойки

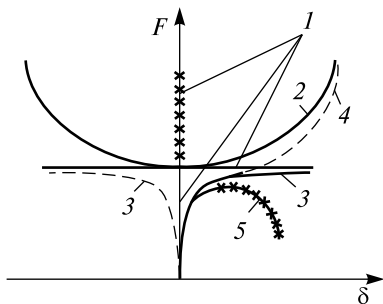


Рис. 21.2. Кривые равновесных состояний для центрально и внецентренно сжатых гибких стоек

но следует иметь в виду, что во всех уже описанных случаях задачи считаются физически линейными, т.е. предполагается действие закона Гука.

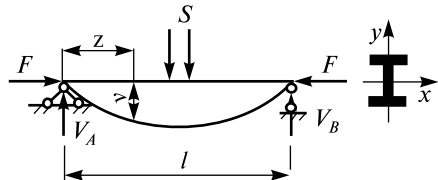
При эксцентричном приложении силы напряжения в сечениях стержня растут достаточно интенсивно, и для реальных материалов весьма быстро достигают таких значений, при которых существенную роль играют пластические деформации. В этом случае диаграмма состояний стержня описывается кривой 5 (рис. 21.2), достигающей максимальных значений силы, после чего состояние стержня становится неустойчивым при дальнейшем увеличении перемещений. Происходит потеря устойчивости стержня при исчезновении каких бы то ни было равновесных форм (или, по прежней терминологии, потеря устойчивости второго рода).

Все это показывает, насколько сложны рассматриваемые задачи даже для простейших геометрических схем (прямолинейный стержень, заделанный одним концом).

### 21.3. Определение перемещений при продольно-поперечном изгибе интегрированием дифференциального уравнения прогибов

В п. 21.2 было описано определение перемещений для простейшего случая продольно-поперечного изгиба. Остановимся на этом вопросе более подробно на двух примерах демонстрирующих так называемые «точные» решения этих задач.

Рассмотрим балку, нагруженную поперечной нагрузкой  $S$  и сжимающей продольной силой  $F$  (рис. 21.3). Запишем дифференциальное уравнение упругой линии балки в виде



$$EIv''(z) = \pm M(z), \quad (21.3)$$

где  $M(z)$  — изгибающий момент в текущем сечении от совместного действия продольных и поперечных нагрузок, знак плюс в правой части берется при направлении оси  $y$  вверх, а минус — при направлении этой оси вниз.

Рис. 21.3. Продольно-поперечный изгиб балки

Здесь и далее предполагается, что поперечная нагрузка лежит в плоскости одной из главных осей инерции поперечного сечения стержня.

Для случая, показанного на рис. 21.3, изгибающий момент можно определить как сумму двух моментов:

$$M(z) = M_0 + Fv, \quad (21.4)$$

где  $M_0$  — момент только от поперечной нагрузки сил, определяемый обычным способом;

$Fv$  — момент от продольной силы.

Из выражения (21.4) видно, что суммарный изгибающий момент в сечениях стержня может быть подсчитан только когда известны перемещения  $v$ .

Для решения задачи продольно-поперечного изгиба необходимо составить и решить дифференциальное уравнение оси изогнутого бруса

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_0 + Fv}{EI}.$$

Запишем его в следующем виде:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{F}{EI} v = -\frac{M_0}{EI}. \quad (21.5)$$

Решение уравнения (21.5) представляет собой сумму общего и частного решений: интеграла однородного уравнения и частного интеграла, зависящего от правой части.

Покажем решение на конкретном примере. На рис. 21.4 изображена балка на двух опорах с равномерно распределенной нагрузкой  $g$  и сжимающей силой  $F$ .

Изгибающий момент в произвольном сечении от поперечной нагрузки определяется равенством

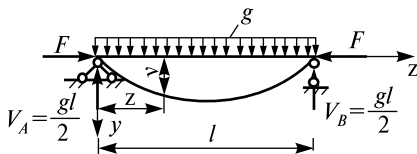


Рис. 21.4. Балка на двух опорах с равномерно распределенной нагрузкой и сжимающей силой

$$M_0 = \frac{glz}{2} - \frac{gz^2}{2}.$$

Тогда уравнение (21.5) примет вид

$$\frac{d^2v}{dz^2} + k^2v = -\frac{gz}{2EI}(l-z),$$

где  $k^2 = \frac{F}{EI}$ .

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$v = A \cos kz + B \sin kz - \frac{g}{2F}z(l-z) - \frac{g}{k^2F}. \quad (21.6)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  найдем из граничных условий:

при  $z = 0$   $v = 0$ ; при  $z = l$   $v = 0$ .

Используя эти условия и уравнение (10.6), получим

$$v = \frac{g}{Fk^2} \left[ \cos kz + \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kz \right] - \frac{g}{2F}z(l-z) - \frac{g}{k^2F}.$$

Проведя преобразования величины  $kl$  и положив  $z = l/2$ , получим наибольший прогиб

$$v_{\max} = \frac{gl^2}{8F} \left[ \frac{F_{\text{кр}}}{F} \frac{8}{\pi^2} \left( \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_{\text{кр}}}} - 1 \right) - 1 \right]$$

и наибольший изгибающий момент

$$M_{\max} = \frac{gl^2}{8} + Fv_{\max}.$$

Из проведенных преобразований видим, что при отсутствии продольной силы максимальный изгибающий момент совпадает с тем, который дает поперечная нагрузка  $g$ . По мере роста силы  $F$  максимальный изгибающий момент резко возрастает.



В качестве второго примера послужит консольный стержень длиной  $l$  и жесткостью поперечного сечения  $EI$ , загруженный на конце консоли сжимающей силой  $F$  и силой  $S$ , вызывающей изгиб (рис. 21.5).

Рассмотрим его деформированное состояние, характеризуемое перемещениями  $v$ . В этом случае изгибающий момент

$$M = -[S(l-z) + F(\delta - v)],$$

где  $\delta$  — перемещение верхнего конца стержня.

Дифференциальное уравнение прогибов сжато-изогнутого стержня после преобразования принимает вид

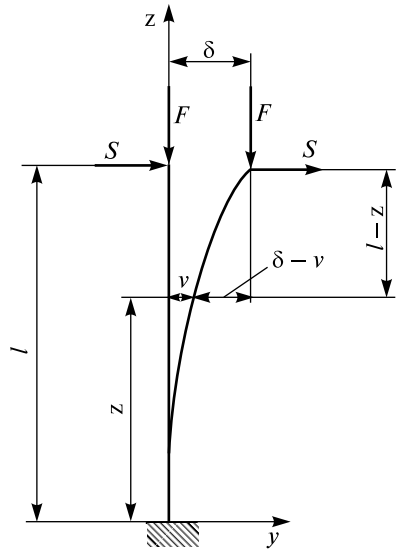


Рис. 21.5. Расчетная схема и деформированный вид консольного стержня

$$\frac{d^2v}{dz^2} + n^2v = n^2\delta + \frac{S}{EI}(l-z), \quad (21.7)$$

где  $n^2 = \frac{F}{EI}$ .

Его решение представлено в виде суммы общего и частного решений:

$$v = A \cos kz + B \sin kz + \delta + \frac{S}{EIn^2}(l-z),$$

в котором  $A$ ,  $B$  и  $\delta$  определяются из граничных условий:

1)  $z = 0$  и  $v = 0$ ; 2)  $z = 0$  и  $v' = 0$ ; 3)  $z = l$  и  $v = \delta$ .

Рассмотрение этих граничных условий приводит к следующим значениям постоянных:

$$A = \frac{S}{n^3 EI}; \quad B = -\frac{S}{n^3 EI} \operatorname{tg} nl; \quad \delta = \frac{S}{n^3 EI} \operatorname{tg} nl - \frac{Sl}{n^2 EI}.$$

После этого нетрудно записать и окончательное выражение для функции  $v$ .

Практическую ценность представляет прежде всего значение наибольшего прогиба  $\delta$ , которое после преобразований примет вид

$$\delta = \frac{Sl^3}{EI} \frac{\operatorname{tg} nl - nl}{n^3 l^3}. \quad (21.8)$$

При более сложных видах поперечной нагрузки, например, если нагрузка разделяет балку на ряд участков, определение изгибающих моментов описанным способом становится затруднительным, поскольку изгибающий момент на разных участках бруса описывается различными функциями. В таких случаях удобным оказывается применять приближенный, но достаточно точный и более простой прием расчета.

#### 21.4. Приближенный способ определения прогиба при продольно-поперечном изгибе балки

Рассмотрим балку на двух шарнирных опорах с произвольной нагрузкой  $S$  и сжимающей силой  $F$  (рис. 21.6).

Прогиб от этой нагрузки представим в виде суммы двух прогибов:

$$v = v_0 + \Delta v, \quad (21.9)$$

где  $v_0$  — прогиб, вызванный действием только поперечной нагрузки (без учета силы  $F$ );

$\Delta v$  — дополнительный прогиб, вызванный действием сжимающей силы  $F$ .

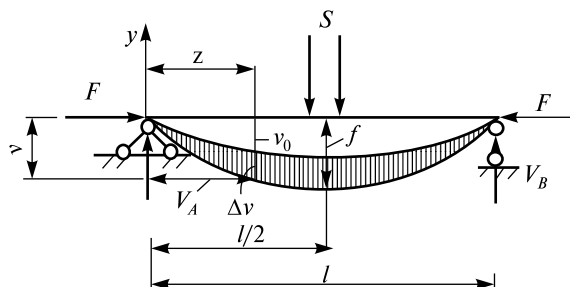


Рис. 21.6. Продольно-поперечный изгиб сжатого стержня

Подставив выражение (21.9) в дифференциальное уравнение (21.5), получим:

$$\frac{d^2 v_0}{dz^2} + \frac{d^2 \Delta v}{dz^2} = -\frac{M_0}{EI} - \frac{Fv}{EI}. \quad (21.10)$$

Известно, что при отсутствии сжимающей силы  $F$  прогиб от поперечной нагрузки определяется из выражения

$$\frac{d^2 v_0}{dz^2} = -\frac{M_0}{EI}. \quad (21.11)$$

Тогда из уравнения (21.10) с учетом равенства (21.11) получим

$$\frac{d^2 \Delta v}{dz^2} = -\frac{Fv}{EI}. \quad (21.12)$$

Предположим, что дополнительный прогиб (заштрихованный на рис. 21.6) изменяется по закону синуса:

$$\Delta v = f \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (21.13)$$

где  $f$  — наибольшее значение дополнительного прогиба (в рассматриваемом случае — посередине балки).

Тогда

$$\frac{d^2 \Delta v}{dz^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} f \sin \frac{\pi z}{l} = -\frac{\pi^2}{l^2} \Delta v.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение (21.12), получим

$$\frac{\pi^2}{l^2} \Delta v = \frac{Fv}{EI},$$

или, согласно равенству (21.9),

$$\frac{\pi^2}{l^2} (v - v_0) = \frac{Fv}{EI},$$

откуда

$$v = \frac{v_0}{1 - Fl^2 / (\pi^2 EI)}.$$

Учитывая, что для рассматриваемого примера

$$F_{\text{э}} = \pi^2 EI / l^2.$$

т.е. критическая сила, определенная по Эйлеру, окончательно получим

$$v = \frac{v_0}{1 - F / F_{\text{э}}}. \quad (21.14)$$

Эту формулу можно применять и для других случаев закрепления концов стержня, при этом  $F_{\text{э}}$  необходимо определять каждый раз с учетом характера закрепления стержня по формуле

$$F_{\text{э}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}.$$

В выражение Эйлеровой силы входит момент инерции  $I$ , соответствующий той из главных центральных осей поперечного сечения стержня, которая перпендикулярна плоскости действия поперечной нагрузки, независимо от того, минимален или максимален указанный момент инерции.

Величина  $F$  при любой гибкости определяется по формуле Эйлера. Поэтому Эйлерова сила рассматривается лишь как обозначение, введенное по аналогии с формулой Эйлера для критической силы центрально сжимаемого стержня.

Следует помнить, что приближенной формулой (21.14) нельзя пользоваться в тех случаях, когда сжимающая сила  $F$  будет близка к Эйлеровой силе; это видно из самой формулы, так как в пределе при  $F = F_{\text{э}}$  прогиб стремится к бесконечности.

В инженерных расчетах обычно сжимающая сила лежит в интервале

$$0 \leq F \leq 0,8 F_{\text{э}},$$

поэтому приведенное приближенное решение вполне пригодно для решения практических задач.

Отметим, что формула (21.14), полученная в предположении (21.13), справедлива и для консольного стержня, а также при симметричном нагружении шарнирно-опертого стержня.

В других случаях использование приближенной зависимости (21.14) требует определенной осторожности. Разумеется, эта зависимость применима и для случая внецентренно-сжатых стержней, в частности, рассмотренного в п. 21.2.

Используя равенство (21.14), можно записать максимальное сжимающее напряжение

$$|\sigma_{\max}| = \frac{F}{A} + \frac{M_0}{W_x} + \frac{Fv_0}{(1 - F/F_y)W_x}. \quad (21.15)$$

Из формулы (21.15) следует, что нормальные напряжения возрастают быстрее нагрузки. Действительно, если допустить, что поперечная и продольная нагрузки возрастают пропорционально одному параметру, скажем, в  $n$  раз, то  $v_0$  возрастет тоже в  $n$  раз, и последнее слагаемое формулы (21.15) возрастает не пропорционально  $n$ , а значительно быстрее. Поэтому расчет на прочность при продольно-поперечном изгибе нельзя вести по напряжениям. Расчет ведется по предельным нагрузкам, определяя значения сил, при которых напряжение в опасной точке поперечного сечения достигают предела текучести. Разделив это значение на нормируемый коэффициент запаса прочности, находят допускаемую нагрузку. Методику решения задач на продольно-поперечный изгиб рассмотрим далее на конкретных примерах.

## 21.5. Примеры расчета стержней на продольно-поперечный изгиб

**Пример 21.1.** Балка на двух опорах (рис. 21.7, *а*) из швеллера № 40 подвергается центральному сжатию силой  $F = 60$  кН. Определить наибольшие по абсолютной величине нормальные напряжения и стрелу прогиба балки с учетом ее собственного веса.

*Решение.* Расчетная схема балки представлена на рис. 21.7, *б*. Значение максимального прогиба определим по приближенной формуле

$$v = \frac{v_0}{1 - F/F_y},$$

где  $v_0$  — прогиб от поперечной нагрузки  $M_0$ .

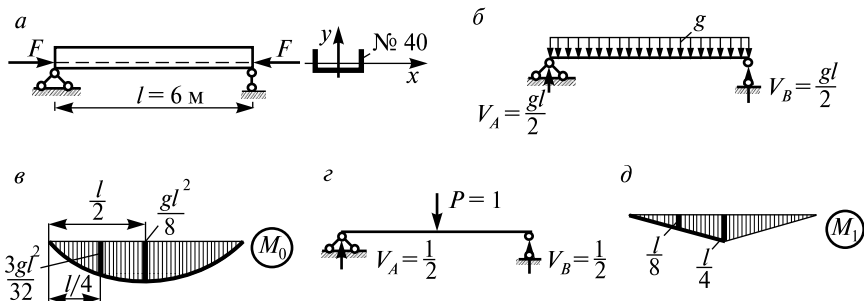


Рис. 21.7: а — схема загрузки балки; б — расчетная схема; в — эпюра изгибающих моментов; г — единичная эпюра изгибающих моментов

Для его определения построим эпюру изгибающих моментов  $M_0$  (рис. 21.7, в) и единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_1$  (рис. 21.7, г) и определим прогиб посередине с помощью формулы Максвелла-Мора. Для вычисления перемещения используем формулу Симпсона. Получим

$$(v_0)_{\max} = \int_l \frac{M_0 \bar{M}_1}{EI} dz = \frac{2l}{2 \cdot 6EI} [4(3gl^2/32)(l/8) + (gl^2/8)(l/4)] = \frac{5}{384} \frac{gl^4}{EI}.$$

Вычисления дают

$$(v_0)_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{483 \cdot 6^4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 642 \cdot 10^{-8}} = 0,635 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Определим величину эйлеровой силы:

$$F_{\text{э}} = \frac{\pi^2 EI_x}{l^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 642 \cdot 10^{-8}}{6^2} = 352 \cdot 10^3 \text{ Н} = 352 \text{ кН.}$$

Вычислим максимальный прогиб балки:

$$v_{\max} = \frac{(v_0)_{\max}}{1 - (F/F_{\text{э}})} = \frac{0,635 \cdot 10^{-2}}{1 - 60/352} = 0,765 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Величина максимального изгибающего момента

$$\begin{aligned} M_{\max} &= (M_0)_{\max} + Fv_{\max} = \frac{483 \cdot 6^2}{8} + 6 \cdot 10^4 \cdot 0,765 \cdot 10^{-2} = \\ &= 217,35 + 459,0 = 2632,5 \text{ Н} \cdot \text{м.} \end{aligned}$$

Тогда максимальное сжимающее напряжение в сечении посередине пролета

$$|\sigma_{\max}| = \frac{N}{A} + \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{60\,000}{61,5 \cdot 10^{-4}} + \frac{2632,5}{73,4 \cdot 10^{-6}} = 45,66 \text{ МПа.}$$

**Пример 21.2.** Определить наибольшие нормальные напряжения в сжатой изогнутой деревянной стойке (рис. 21.8, а). Модуль упругости для дерева считать  $E = 10$  ГПа.

*Решение.* Определим геометрические характеристики поперечного сечения:

$$A = 12 \cdot 24 = 288 \text{ см}^2 = 288 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \quad I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{12 \cdot 24^3}{12} = 13\,800 \text{ см}^4;$$

$$W_x = \frac{I_x}{h} = \frac{13\,800}{24} = 575 \text{ см}^3 = 575 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Значение максимального прогиба, имеющего место на свободном конце балки, вычислим по приближенной формуле

$$v = \frac{v_0}{1 - F/F_3},$$

где  $v_0$  — прогиб от поперечной нагрузки  $M$ .

Определим значения прогиба  $v_0$ . Для этого построим грузовую эпюру изгибающих моментов  $M_0$  и единичную эпюру  $\bar{M}_1$  и сопряжем их по правилу Верещагина.

$$v_0 = \int_l \frac{M_0 \bar{M}_1}{EI} dz = \frac{1}{1 \cdot 10^9 \cdot 13\,800 \cdot 10^{-8}} \left[ \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3000 \right] = 0,98 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

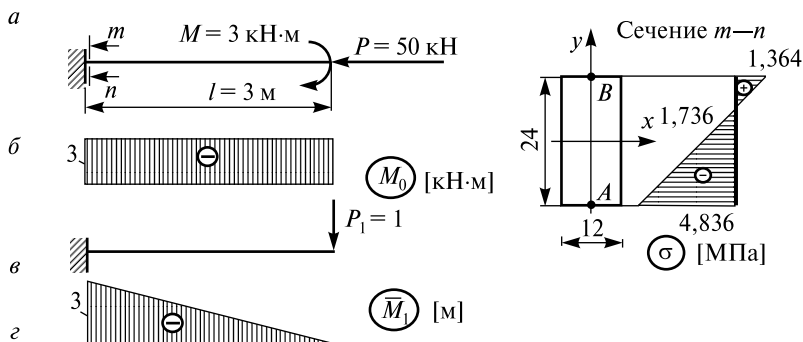


Рис. 21.8: а — расчетная схема; б — эпюра изгибающих моментов; в — единичное состояние; г — единичная эпюра изгибающих моментов

Вычислим значение эйлеровой силы

$$F_{\text{э}} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 1 \cdot 10^9 \cdot 13800 \cdot 10^{-8}}{(2 \cdot 3)^2} = 378 \text{ кН.}$$

Тогда максимальное значение прогиба

$$v_{\text{max}} = \frac{0,98 \cdot 10^{-2}}{1 - 50/378} = 1,13 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Вычислим наибольший изгибающий момент, возникающий в заделке (сечение  $m-n$ ):

$$M_{\text{max}} = (M_0) + Fv_{\text{max}} = 3000 + 50\,000 \cdot 1,13 \cdot 10^{-2} = 3,565 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Сосчитаем наибольшее сжимающее напряжения в нижних точках опасного сечения:

$$|\sigma_{\text{min}}| = \frac{N}{A} + \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{50\,000}{288 \cdot 10^{-4}} + \frac{35\,650}{1150 \cdot 10^{-6}} = 4,836 \text{ МПа.}$$

При этом наибольшее растягивающее напряжение, возникающее в верхних точках этого сечения, составит

$$\sigma_{\text{max}} = -\frac{N}{A} + \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = -1,736 \cdot 10^6 + 3,1 \cdot 10^6 = 1,364 \text{ МПа.}$$

**Пример 21.3.** Определить прогиб точки  $K$  в сжато-изогнутой стальной балке (рис. 21.9).

*Решение.* Для определения прогиба в точке  $K$  построим грузовую  $M_0$  и единичную  $\bar{M}_1$  эпюры изгибающих моментов (рис. 21.9,  $a$ ,  $b$ ). Вычислим значения прогиба в точке  $K$  при действии только поперечной нагрузки ( $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $I_x = 1 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ).

$$v_0 = \int_l \frac{\bar{M}_1 M_0}{EI_x} dz = \frac{1}{200 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-8}} \times \\ \times \left[ \frac{1}{2} \cdot 360 \cdot 0,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4 + \frac{1}{2} \cdot 360 \cdot 0,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,6 \cdot 360 \right] = 5,4 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$



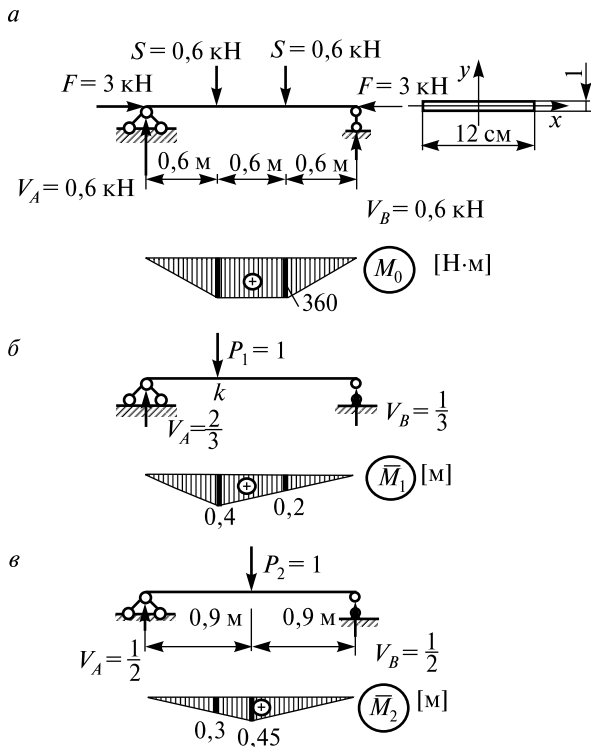


Рис. 21.9: *a* — схема загрузки балки и эпюра изгибающих моментов; *б* — единичное состояние и единичная эпюра изгибающих моментов; *в* — второе единичное состояние и вторая единичная эпюра изгибающих моментов

Вычислим эйлеровую силу:

$$F_3 = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-8}}{(1 \cdot 1,8)^2} = 6,08 \cdot 10^3 \text{ Н} = 6,08 \text{ кН}.$$

Тогда значение прогиба вычислим по приближенной формуле:

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F}{F_3}} = \frac{5,4 \cdot 10^{-2}}{1 - (3 \cdot 10^3 / 6,08 \cdot 10^3)} \approx 10,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Интересно сравнить полученное значение прогиба с величиной прогиба посередине пролета балки. Для этого получим вначале значение  $v_0$  (рис. 21.9, а, б):

$$v_0 = \int_l \frac{\bar{M}_2 M_0}{EI_x} dz = \frac{1}{200 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-8}} \times \\ \times \left[ 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 360 \cdot 0,6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 \cdot 360 \cdot \frac{1}{2} (0,45 + 0,3) \right] = 6,21 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Окончательно

$$v = \frac{v_0}{1 - \frac{F}{F_g}} = \frac{6,21 \cdot 10^{-2}}{1 - (3 \cdot 10^3 / 6,08 \cdot 10^3)} \cong 12,42 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Как и следовало ожидать, прогиб балки посередине пролета больше ранее полученного для заданной точки.

**Пример 21.4.** Двухавровая балка № 36 (рис. 21.10) пролетом  $l = 4,4$  м сжимается силами  $F$ , приложенными с эксцентриситетом  $e = 1,45$  см. Построить график зависимости между сжимающей силой  $F$  и наибольшими сжимающими напряжениями, применяя приближенное решение задачи на продольно-поперечный изгиб, без учета собственного веса балки. По построенному графику определить:

а) нагрузку  $F_{[\sigma]}$ , при которой наибольшие сжимающие напряжения достигают 160 МПа;

б) нагрузку  $F_{\sigma_T}$ , при которой эти же напряжения достигают предела текучести ( $\sigma_T = 240$  МПа);

в) действительный коэффициент запаса прочности по нагрузке  $n_p = \frac{F_{\sigma_T}}{F_{[\sigma]}}$ ,

коэффициент запаса прочности равен нормируемому значению по напряжениям  $[n_\sigma]$ ;

г) нагрузку  $[F]$ , при которой  $[n_\sigma] = \frac{240}{160} = 1,5$ ;

д) наибольшее сжимающее напряжение  $\sigma_{[F]}$  при найденной нагрузке  $[F]$ .

**Решение.** Внецентренно приложенные силы заменим центрально приложенными силами и моментами  $M = Fe$ , в результате получим расчетную схему, представленную на рис. 21.10, б. Построим эпюру изгибающих моментов  $M_0$  от действия поперечной нагрузки (рис. 21.10, в).

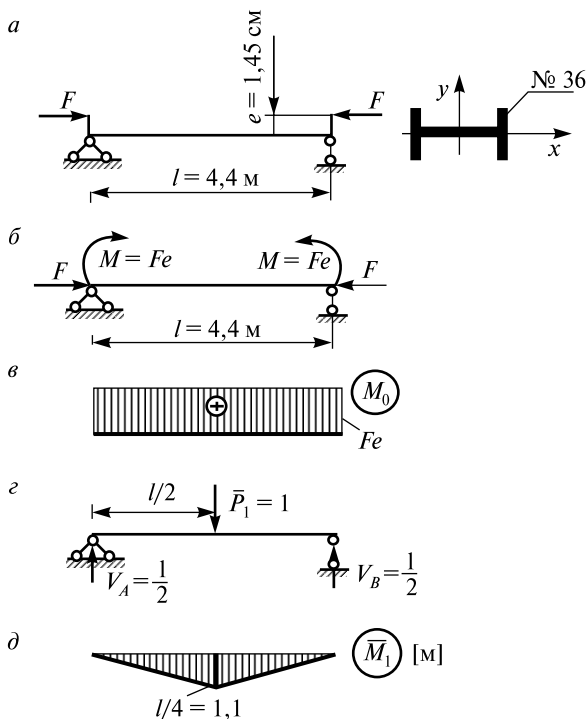


Рис. 21.10: *a* — схема нагружения балки; *б* — расчетная схема балки; *в* — эпюра изгибающих моментов; *г* — единичное состояние; *д* — единичная эпюра изгибающих моментов

В опасном сечении, расположенном посередине пролета балки, величина нормальных напряжений примет наибольшее значение в крайних точках сжатой зоны. Величину указанных напряжений можно определить из выражения

$$|\sigma_{\max}| = \frac{N}{A} + \frac{M_o}{W_x} + \frac{M_F}{W_x}.$$

Определим прогиб от действия поперечной нагрузки. Для этой цели единичную эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_1$  (рис. 21.10, *г*, *д*) сопряжем с эпюрой изгибающих моментов  $M_0$ . Перемножение осуществим по правилу Верещагина.

$$v_0 = \int_l \frac{M_0 \bar{M}_1}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{4} Fe = \frac{4,4^2 \cdot 1,45 \cdot 10^{-2} F}{8 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 516 \cdot 10^{-8}} = 0,34 \cdot 10^{-7} F \text{ [м]}.$$

Прогиб от эксцентричного действия продольной силы определим по приближенной формуле

$$v_{\max} = \frac{v_0}{1 - F/F_{\text{э}}}.$$

Определим величину эйлеровой силы:

$$F_{\text{э}} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 516 \cdot 10^{-8}}{(1,4 \cdot 4)^2} = 526 \cdot 10^3 \text{ Н} = 526 \text{ кН}.$$

Подставляя числовые данные, определим  $v$  из выражения

$$v = \frac{3,4 \cdot 10^{-8} F}{1 - F/(5,26 \cdot 10^5)} \text{ м}.$$

Тогда зависимость максимальных нормальных напряжений для стержня примет вид

$$|\sigma_{\max}| = \frac{F}{61,9 \cdot 10^{-4}} + \frac{1,45 \cdot 10^{-2} F}{71,1 \cdot 10^{-6}} + \frac{Fv}{71,1 \cdot 10^{-6}} \text{ Па}.$$

Для построения зависимости  $\sigma_{\max} = f(F)$  рекомендуется использовать 6-8 точек, причем для более точного построения необходимо дать силе  $F$  такое значение, чтобы соответствующее значение нормальных напряжений  $\sigma$  оказалось выше предела текучести. Результаты расчетов сведем в табл. 21.1.

Таблица 21.1

Результаты расчетов к примеру 21.1

$F$ , кН	$F/A$ , МПа	$M_0/W$ , МПа	$v_0$ , м	$v$ , м	$Fv/W$ , МПа	$ \sigma $ , МПа
50	8,08	10,20	0,0017	0,0019	1,34	19,62
100	16,16	20,39	0,0034	0,0042	5,91	42,46
150	24,23	30,59	0,0051	0,0071	14,98	69,80
200	32,31	40,79	0,0068	0,0110	30,94	104,04
250	40,39	50,98	0,0085	0,0162	56,95	148,32
300	48,46	61,18	0,0102	0,0237	99,99	209,63
350	56,54	71,38	0,0119	0,0356	175,92	303,84

По результатам проведенных вычислений построим график зависимости максимальных сжимающих напряжений от силы  $F$  (рис. 21.11).

Используя построенную зависимость, определим нагрузку  $F_{\sigma_{\tau}}$ , при которой наибольшие сжимающие напряжения достигают предела текучести 240 МПа, а также нагрузку  $F_{[\sigma]}$ , при которой напряжения достигают 160 МПа.

Найденные значения сил приведены на рис. 21.11. По полученным значениям сил определим действительный коэффициент запаса конструкции нагрузкам:

$$n_p = F_{\sigma_{\tau}} / F_{[\sigma]}.$$

Для нормальной эксплуатации конструкции этой коэффициент запаса недостаточен, он должен быть равен 1,5. Определим величину допускаемой силы:

$$[F] = F_{\sigma_{\tau}} / [n] = 322\,000 / 1,5 = 215 \text{ кН}.$$

По значению  $[F]$ , используя рис. 21.11, определим наибольшее сжимающее напряжение  $\sigma_{[F]}$ , возникающее в стержне:  $\sigma_{[F]} = 116 \text{ МПа}$ .

В заключение заметим (см. рис. 21.11), что нормальные напряжения  $\sigma$  меняются быстрее, чем нагрузка. Поэтому расчет сжато-изогнутых стержней следует производить по допускаемой нагрузке.

В точности также выполняется определение значения допускаемой нагрузки в любой задаче о монопараметрическом нагружении стержня продольной и поперечной нагрузкой, т.е. такими нагрузками, которые зависят только от одного параметра и возрастают одновременно. Заметим, что такие нагрузки в инженерной практике встречаются весьма часто, поэтому описанный прием может считаться весьма общим.

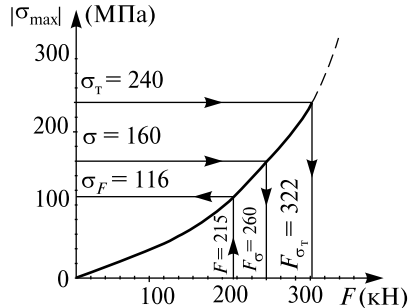


Рис. 21.11: График зависимости максимальных сжимающих напряжений от силы

## Глава 22. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ

### 22.1. Понятие о динамическом нагружении

Ранее рассматривались задачи статического нагружения, когда нагрузки, действуя на элементы конструкции постоянно или плавно, изменялись от нуля до некоторого значения и внутренние силы уравнивали внешние нагрузки.

К задачам динамики в сопротивлении материалов относятся:

- расчет деталей, движущихся при заданных ускорениях;
- расчет на действие ударной нагрузки;
- расчет на прочность и жесткость при колебаниях.

Динамическое действие силы характеризуется тем, что она достигает своего конечного значения за короткий промежуток времени, вследствие чего частицы материала получают ускорения  $a$ , следовательно, возникают силы инерции, которыми пренебречь нельзя.

Расчет конструкций с учетом сил инерции и возникающего движения масс системы называют *динамическим расчетом*.

*Динамическая нагрузка* — это такая, которая быстро изменяет свою величину или положение. Примером такой нагрузки может служить движущийся поезд.

Задачи на определение напряжений и перемещений с учетом влияния сил инерции решаются на основе принципа Даламбера, позволяющего сводить задачи динамики к задачам статики.

Согласно этому принципу всякое движущееся тело может рассматриваться как находящееся в состоянии равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции, равную произведению массы тела на его ускорение и направленную в сторону, противоположную ускорению. Поэтому когда известны силы инерции, без всяких ограничений и условий можно использовать метод сечений и определять внутренние усилия, используя уравнения равновесия.

В тех случаях, когда определение сил инерции затруднительно, например, при ударе, для определения напряжений и деформаций используется закон сохранения энергии. Далее будут изложены краткие сведения и рассмотрены простейшие задачи о расчете элементов конструкций на динамическое действие нагрузки.

## **22.2. Движение тел с постоянным ускорением.**

### **Динамический коэффициент**

В качестве характерного примера рассмотрим задачу расчета троса при подъеме груза с постоянным ускорением  $a$  (рис. 22.1,  $a$ ), т.е. работу лифта, когда массу троса лифта не будем учитывать. Используем метод сечений и определим из условия равновесия динамическое значение внутреннего усилия  $N_d$ , возникающего в тросе.

Для этой цели разрежем трос и рассмотрим нижнюю отсеченную часть. Составим уравнение равновесия — сумму проекций всех сил на вертикальную ось (рис. 22.1, б).

К телу, кроме его веса, равно-  
го  $G = m_T g$ , где  $m_T$  — масса груза,  
 $g$  — ускорение силы тяжести,  
приложена сила инерции  $F_{\text{и}} =$   
 $= m_T a$ , направленная в сторону,  
противоположную ускорению.

Используя принцип Далам-  
бера, получим

$$\sum Y = 0; \quad N_{\text{д}} = G + F_{\text{и}} = G + a \frac{G}{g} = G(1 + a/g).$$

В состоянии покоя  $N_{\text{ст}} = G$ , за счет движения с ускорением уси-  
лие в тросе возрастает в отношение

$$\mu = N_{\text{д}}/N_{\text{ст}} = (1 + (a/g)), \quad (22.1)$$

где  $\mu$  — динамический коэффициент, показывающий, во сколько раз динамический фактор больше статического.

Отношение динамического значения некоторого фактора (уси-  
лия, напряжения, перемещения) к соответствующему статичес-  
кому значению этого фактора называется *динамическим коэффи-  
циентом*.

Величина динамического коэффициента зависит от вида на-  
грузки, геометрических размеров, массы, материала сооружения  
и ряда других факторов.

В инженерной практике часто прибегают к использованию дина-  
мического коэффициента, когда в расчетах определение внутренних  
усилий ведут от условных статических загрузжений, а затем найден-  
ное статическое усилие умножают на динамический коэффициент:

$$\varepsilon_{\text{д}} = \mu \varepsilon_{\text{ст}}, \quad \sigma_{\text{д}} = \mu \sigma_{\text{ст}}, \quad M_{\text{хд}} = \mu M_{\text{хст}}, \quad \Delta l_{\text{д}} = \mu \Delta l_{\text{ст}}.$$

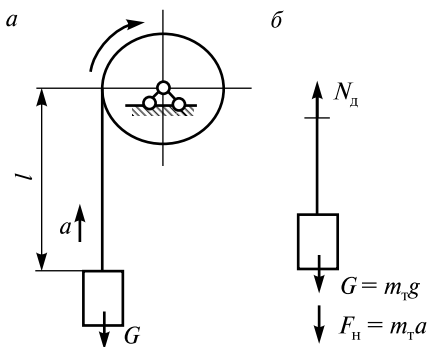


Рис. 22.1. Подъем груза с ускорением (а); к уравнению равновесия (б)

Условие прочности по динамическим напряжениям будет иметь вид

$$\sigma_d = \mu \sigma_{ст} \leq [\sigma]. \quad (22.2)$$

Из этого равенства можно заключить, что в ряде случаев динамический расчет можно заменить статическим, понизив допускаемое напряжение делением на динамический коэффициент. Так поступают, когда при расчете трудно теоретически определить динамический коэффициент.

Рассмотрим еще один характерный пример динамического действия нагрузки.

**Пример 22.1.** Определить наибольшие нормальные напряжения и абсолютное удлинение стального стержня  $BC$  (рис. 22.2,  $a$ ) длиной  $l$ , который вращается вокруг вертикальной оси  $OO_1$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$  рад/с. Площадь поперечного сечения стержня  $A$ .

*Решение.* При равномерном вращении ускорение частиц стержня, расположенных на расстоянии  $z$  от оси вращения, направлены к самой оси (центростремительное ускорение), составит

$$a = \omega^2 z.$$

Инерционные (центробежные) силы направлены по радиусам от оси вращения. Их интенсивность, отнесенная к единице длины стержня, равна

$$p_i = \frac{\rho A}{g} \omega^2 z.$$

Покажем ее эпюру на рис. 22.2,  $b$ .

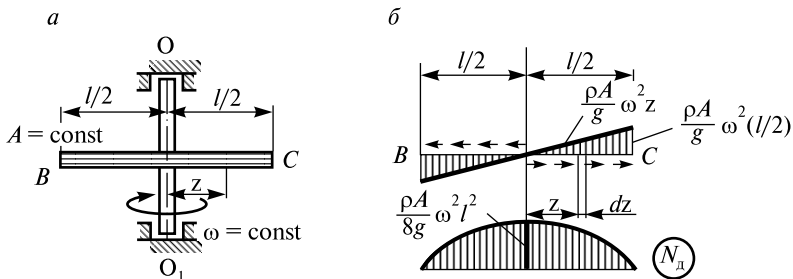


Рис. 22.2:  $a$  — стержень  $BC$ ;  $b$  — эпюра интенсивности и эпюра продольной силы в стержне



Определим элементарную продольную силу инерции:

$$dN = \frac{\rho A}{g} \omega^2 z dz.$$

Силы инерции вызывают растяжение рассматриваемого стержня. Тогда сила инерции в сечении на расстоянии  $z$  от оси  $OO_1$  будет равна

$$N_d = \int_z^{l/2} dN = \frac{\rho A \omega^2 (l^2/4 - z^2)}{2g}.$$

Наибольшее значение  $N_d$  будет в месте закрепления стержня на оси, т.е. при  $z = 0$ .

$$N_d = \rho A \omega^2 l^2 / 8g.$$

Покажем эпюру  $N_d$  на рис. 22.2, б.

Закон изменения нормальных напряжений по длине стержня примет вид

$$\sigma_d = N_d / A = \rho \omega^2 (l^2 / 4 - z^2) / 2g.$$

Определим наибольшие нормальные напряжения. Они будут иметь место при  $z = 0$ , т.е.

$$\sigma_d = \sigma_{d\max} = N_d / A.$$

В заключение найдем абсолютное удлинение стального стержня:

$$\Delta l_d = 2 \int_0^{l/2} \frac{N_d dz}{EA} = 2 \int_0^{l/2} \frac{\rho \omega^2 (l^2/4 - z^2) dz}{E \cdot 2g} = \frac{\rho \omega^2}{Eg} \left[ \frac{l^2}{4} \int_0^{l/2} dz - \int_0^{l/2} z^2 dz \right] = \frac{\rho \omega^2}{Eg} \cdot \frac{1}{12} l^3.$$

## 22.3. Ударное действие нагрузки

Под ударом понимается взаимодействие движущихся тел в результате их соприкосновения, характеризующее резким изменением скоростей точек тела за весьма малый промежуток времени.

Время удара измеряется в тысячных, а иногда и миллионных долях секунды, сила же удара достигает большой величины, например, действие кузнечного молота на кусок металла, удар падающего груза при забивке свай, воздействие колеса локомотива на рельс при перекачивании через стык и др.

Определение напряжений и деформаций при ударе — одна из наиболее сложных задач сопротивления материалов, которая еще далека от своего окончательного решения. Рассмотрим лишь наиболее простой и приближенный метод расчета на удар. Для упрощения решения введем ряд допущений:

1) характер нарастания напряжений и деформаций стержня при ударе остается таким же, как и при статическом действии нагрузки (не учитываются волновые процессы в соударяемых телах);

2) при ударе справедлив закон Гука с тем же модулем упругости, что и при статическом действии нагрузки;

3) удар является неупругим, т.е. ударяющее тело не отскакивает после удара, а перемещается с конструкцией;

4) масса упругой системы, воспринимающей действие ударной нагрузки, считается малой по сравнению с массой ударяющего тела, поэтому в расчетах не учитывается;

5) потерей части энергии, перешедшей в тепловую и в энергию колебательного движения соударяющихся тел, пренебрегаем.

Будем рассматривать продольный и поперечный удары, т.е. элементы стержневых конструкций, подвергающиеся удару, могут испытывать различные виды деформаций: сжатие (рис. 22.3, *а*), изгиб (рис. 22.3, *б*), изгиб с кручением (рис. 22.3, *в*).

Основные расчетные формулы выведем на примере продольного удара.

Рассмотрим удар груза весом  $G$ , падающего с высоты  $h$  на неподвижный стержень длиной  $l$ .

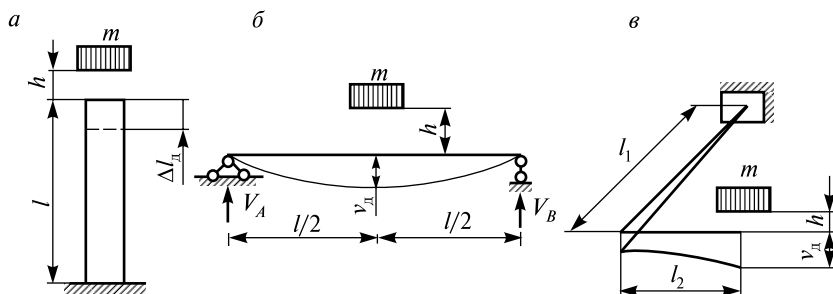


Рис. 22.3. Стержневые конструкции испытывают деформации:  
*а* — сжатия; *б* — изгиба; *в* — изгиба с кручением

Скорость тела в момент удара определяется по известной формуле свободного падения  $v = \sqrt{2gh}$ . Эта скорость за короткий промежуток времени удара, исчисляемого тысячными долями секунды, падает до нуля.

Приравняем работу падающего груза потенциальной энергии деформации стержня:

$$W = G(h + \Delta l_{\text{д}}), \quad (22.3)$$

где  $\Delta l_{\text{д}}$  — изменение длины стержня при динамическом действии силы.

Потенциальную энергию деформации сжимаемого стержня при постоянных продольной силе и площади поперечного сечения можно выразить формулой

$$U = N^2 l / (2EA). \quad (22.4)$$

По закону Гука запишем удлинение стержня

$$\Delta l_{\text{д}} = Nl / (EA). \quad (22.5)$$

Выразив из закона Гука продольную силу и подставив ее в выражение (22.4), получим

$$U = N^2 l / 2EA = EA \Delta l_{\text{д}}^2 / (2l). \quad (22.6)$$

Приравняв работу падающего груза (22.3) потенциальной энергии деформации стержня (22.6), получим

$$W = U, \text{ или } G(h + \Delta l_{\text{д}}) = \frac{EA \Delta l_{\text{д}}^2}{2l}, \quad (22.7)$$

$$\text{или } \Delta l_{\text{д}}^2 EA - G \cdot 2l \Delta l_{\text{д}} - Gh \cdot 2l = 0. \quad (22.8)$$

Разделив все члены уравнения (22.8) на  $EA$ , получим

$$\Delta l_{\text{д}}^2 - \frac{Gl}{EA} \cdot 2 \Delta l_{\text{д}} - \frac{Gl}{EA} \cdot 2h = 0, \quad (22.9)$$

но  $Gl/(EA) = \Delta l_{\text{ст}}$  — изменение (укорочение) длины стержня от статического приложения нагрузки  $G$ . Тогда (22.9) примет вид

$$\Delta l_{\text{д}}^2 - 2\Delta l_{\text{д}} \Delta l_{\text{ст}} - \Delta l_{\text{ст}} 2h = 0. \quad (22.10)$$

Решив квадратное уравнение (22.10) относительно  $\Delta l_{\text{д}}$ , получим

$$\Delta l_{\text{д}} = \Delta l_{\text{ст}} \pm \sqrt{\Delta l_{\text{ст}}^2 + 2h\Delta l_{\text{ст}}}. \quad (22.11)$$

Решение со знаком минус перед знаком корня противоречит физическому смыслу задачи. Получим окончательно

$$\Delta l_{\text{д}} = \Delta l_{\text{ст}} + \sqrt{\Delta l_{\text{ст}}^2 + 2h(\Delta l_{\text{ст}})^2 / \Delta l_{\text{ст}}} = \Delta l_{\text{ст}} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}} \right). \quad (22.12)$$

Выражение в скобках показывает, во сколько раз перемещение в точке удара превышает перемещение при статическом приложении нагрузки, и называется *динамическим коэффициентом*

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}}. \quad (22.13)$$

Из полученных формул видно, что динамические напряжения и перемещения зависят от статической деформации ударяемого тела. Чем больше статическая деформация, тем меньше динамические напряжения.

Этим можно объяснить то, что при буксировке тяжелых барж канаты, соединяющие буксировочный катер с баржей, имеют большую длину. Короткие тросы не выдерживают динамическую нагрузку. Для смягчения удара используют также резиновые прокладки и пружины, дающие большие деформации и уменьшающие ударное воздействие.

При внезапном приложении нагрузки, т.е. при  $h = 0$  динамический коэффициент равен двум, следовательно, напряжения и деформации стержня будут в два раза больше статических. Это загрузку можно представить как подвешенный груз, укрепленный над балкой таким образом, чтобы он касался верха балки, но не давил на нее, а передавался целиком на нить, и если мгновенно

рассечь нить, то сила тяжести груза всей своей величиной внезапно передастся на балку.

Если высота падения  $h$  значительно больше статической деформации  $\Delta l_{\text{ст}}$ , то для определения динамического коэффициента формулу (22.13) можно упростить:

$$\mu \cong \sqrt{2h/(\Delta l_{\text{ст}})}. \quad (22.14)$$

Аналогичный вид имеют формулы и для поперечного удара, только в этом случае вместо  $\Delta l_{\text{ст}}$  в формулу (22.13) необходимо подставить статический прогиб балки в месте удара:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + 2h/\Delta_{\text{ст}}}, \quad (22.15)$$

где  $\Delta_{\text{ст}}$  — перемещение в точке удара.

Скорость тела в момент удара определяется по известной формуле свободного падения  $v = \sqrt{2gh}$ ; определив из данного выражения  $h$  и подставив в (22.15), получим

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + v^2/(g\delta_{\text{ст}})}. \quad (22.16)$$

Рассмотрим пример, поясняющий применение полученных результатов.

**Пример 22.2.** Определить наибольшие нормальные и касательные напряжения в медном стержне переменного сечения (рис. 22.4), возникающие при падении на него груза  $G = 6$  кН. Считать, что брус не теряет устойчивость, массой бруса пренебречь.

**Решение.** Напряжения в стержне  $\sigma_{\text{ст}}$  и  $\tau_{\text{ст}}$  и перемещение его верхнего сечения  $\Delta l_{\text{ст}}$  от статической приложенного груза  $G = 6$  кН равны:

$$|\sigma_{\text{ст}}^{\text{max}}| = \frac{N}{A} = \frac{6 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^{-4}} = 2 \text{ МПа};$$

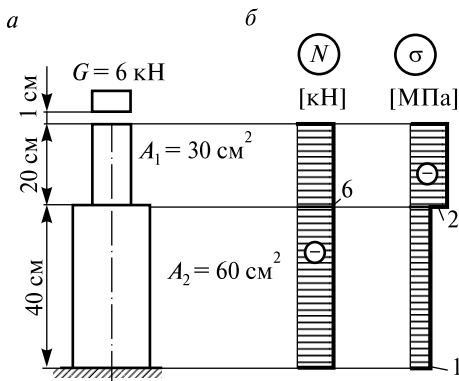


Рис. 22.4: *a* — схема стержня; *б* — эпюра продольной силы; *в* — эпюра нормальных напряжений

$$|\tau_{\text{ст}}^{\text{max}}| = 0,5\sigma_{\text{ст}}^{\text{max}} = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ МПа};$$

$$\Delta l_{\text{ст}} = \Delta_{\text{ст}} = \frac{Nl}{EA} = \frac{6000 \cdot 0,2}{200 \cdot 10^9 \cdot 30 \cdot 10^{-4}} + \frac{6000 \cdot 0,4}{200 \cdot 10^9 \cdot 60 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Динамический коэффициент вычислим по формуле (22.13), он будет равен

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-6}}} = 51.$$

Тогда динамические напряжения и удлинение в стержне будут равны:

$$\Delta l_{\text{д}} = \Delta l_{\text{ст}} \mu = 8 \cdot 10^{-6} \cdot 51 = 0,0707 \text{ см};$$

$$\sigma_{\text{д}} = \sigma_{\text{ст}} \mu = 2 \cdot 51 = 102 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\text{д}} = \tau_{\text{ст}} \mu = 1 \cdot 51 = 51 \text{ МПа.}$$

**Пример 22.3.** На недеформируемый диск *A*, укрепленный на нижнем конце стального стержня длиной  $l = 2$  м, круглого поперечного сечения диаметром  $d = 4$  см, падает груз весом  $G = 2$  кН с высоты  $h = 1,5$  см (рис. 22.5). Определить динамическое смещение нижнего сечения стержня и динамические нормальные напряжения в нем. Силами трения, массой стержня и диска *A* пренебречь.

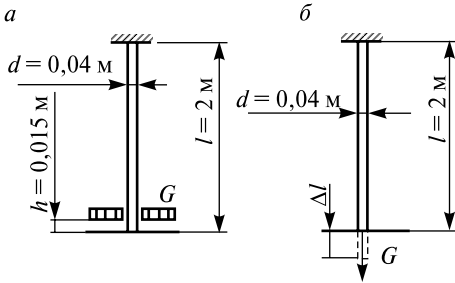


Рис. 22.5: *a* — схема стержня; *б* — схема стержня при статическом приложении нагрузки

*Решение.* Нормальные напряжения в стержне  $\sigma_{\text{ст}}$  и перемещение его нижнего сечения  $\Delta l_{\text{ст}}$  от статического приложения груза  $G$  будут равны (см. рис. 22.5, *б*):

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{N}{A} = \frac{2 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-4}} = 1,592 \text{ МПа};$$

$$\Delta l_{\text{ст}} = \Delta_{\text{ст}} = \frac{Nl}{EA} = \frac{2000 \cdot 2,0}{200 \cdot 10^9 \cdot 12,56 \cdot 10^{-4}} = 1,59 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Динамический коэффициент вычислим по формуле (22.15), он будет равен

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}}{1,59 \cdot 10^{-5}}} = 44,45.$$

Тогда динамическое напряжение и удлинение в стержне будут равны:

$$\Delta l_d = \Delta l_{ст} \mu = 1,59 \cdot 10^{-5} \cdot 44,45 = 0,0707 \text{ см};$$

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \mu = 1,592 \cdot 44,45 = 70,7 \text{ МПа}.$$

**Пример 22.4.** Найти наибольшие динамические нормальные и касательные напряжения для стальной балки без учета ее массы, если груз весом  $G = 0,5 \text{ кН}$  падает с высоты  $h = 0,04 \text{ м}$  посередине пролета  $l = 3 \text{ м}$  (рис. 22.6, а).

*Решение.* Проведем статический расчет, т.е. определим максимальные напряжения  $\sigma_{ст}$  и  $\tau_{ст}$ , а также перемещение в срединном сечении балки при нагружении ее статической сосредоточенной силой, равной  $0,5 \text{ кН}$ . Для этого построим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ , предварительно определив опорные реакции  $V_A$  и  $V_B$ , которые равны между собой и составляют величину, равную  $0,25 \text{ кН}$ . Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  показаны на рис. 22.6, б.

Из эпюр изгибающих моментов и поперечных сил устанавливаем, что максимальный изгибающий момент равен  $M_x = 0,375 \text{ кН}\cdot\text{м}$ , а поперечная сила  $Q_y$  постоянна и равна  $0,25 \text{ кН}$ .

Геометрические характеристики поперечного сечения — именно момент инерции и момент сопротивления — равны:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72 \text{ см}^4;$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{4 \cdot 6^2}{6} = 24 \text{ см}^3.$$

Определим величину статических напряжений. Максимальное нормальное и максимальное касательное напряжения равны:

$$\begin{aligned} \sigma_{ст}^{\max} &= \frac{M^{\max}}{W_x} = \\ &= \frac{0,375 \cdot 10^3}{24 \cdot 10^{-6}} = 15,625 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

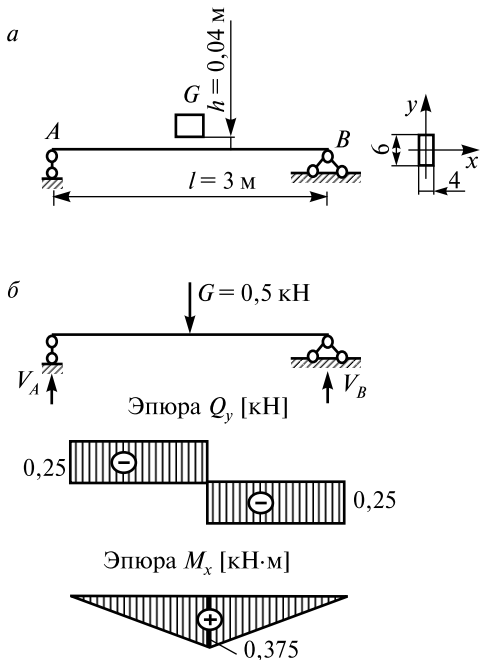


Рис. 22.6: а — схема балки; б — эпюра поперечных сил и эпюра изгибающего момента

$$\tau_{\text{ст}}^{\text{max}} = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b} = \frac{0,25 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1,5 \cdot 10^{-6} \cdot 12}{4 \cdot 6^3 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 10^{-2}} = 0,15625 \text{ МПа.}$$

Статическое перемещение балки, нагруженной силой посередине, определим по известной из теории изгиба формуле:

$$\Delta_{\text{ст}} = v = \frac{F_y l^3}{48 E I_x} = \frac{0,5 \cdot 10^3 \cdot 3^3 \cdot 12}{48 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 6^3 \cdot 10^{-8}} = 0,195 \text{ см.}$$

Рассчитаем динамический коэффициент:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4}{0,195}} = 7,477.$$

Находим динамические напряжения:

$$\sigma_{\text{д}} = \sigma_{\text{ст}} \mu = 15,625 \cdot 7,477 = 116,83 \text{ МПа;}$$

$$\tau_{\text{д}} = \tau_{\text{ст}} \mu = 0,15625 \cdot 7,477 = 1,169 \text{ МПа.}$$

**Пример 22.5.** На стальную балку (рис. 22.7, а), выполненную из двутаврового сечения № 16 и удерживаемую медным тросом  $CD$  длиной  $l = 1$  м и площадью поперечного сечения  $2 \text{ см}^2$ , падает груз весом  $G = 2 \text{ кН}$  с высоты  $h = 0,02$  м. Определить максимальные напряжения, возникающие в системе от удара. Массой системы пренебречь.

*Решение.* Определим наибольшие нормальные напряжения в двутавровой балке и в медном тросе, для чего загрузим систему в точке удара условной статической силой  $F_{\text{ст}} = G$  (рис. 22.7, б) и определим наибольший изгибающий момент в балке и усилие в тросе.

Наибольший изгибающий момент будет иметь место в сечении крепления медного троса и составит

$$M_x = 2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Усилие, возникающее в медном тросе, определим из уравнения:

$$\sum M_B = 0; \quad 2 \cdot 5 - N_M \cdot 4 = 0; \quad N_M = 2,5 \text{ кН.}$$

Тогда наибольшие нормальные напряжения при статическом действии нагрузки будут:

в двутавровой балке № 16 ( $I_x = 873 \text{ см}^4$ ;  $W_x = 109 \text{ см}^3$ )

$$\sigma_6^{\text{max}} = \frac{M_x^{\text{max}}}{W_x} = \frac{2 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 18,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 18,3 \text{ МПа;}$$



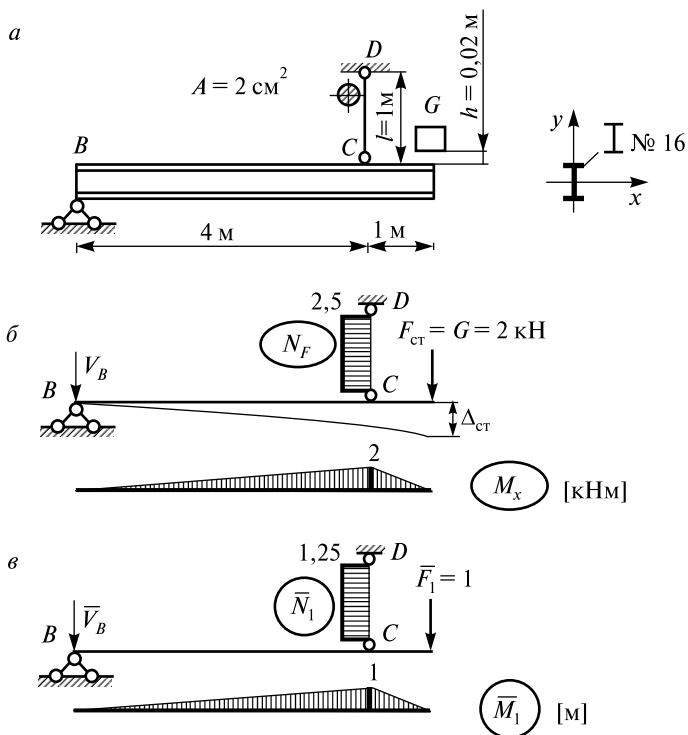


Рис. 22.7: *a* — схема комбинированной конструкции; *б* — грузовые эпюры; *в* — единичные эпюры

в медном тросе

$$\sigma_{\text{тр}} = \frac{N}{A_{\text{тр}}} = \frac{2,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 12,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 12,5 \text{ МПа.}$$

Определим динамический коэффициент по формуле (22.15)

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\text{ст}}}}.$$

Для этой цели найдем полное статическое перемещение  $\Delta_{\text{ст}}$ . Загрузим систему в точке удара единичной силой и построим единичные эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{N}_1$  (рис. 22.7, *в*) и по формуле Мора перемножением соответствующих эпюр получим

$$\Delta_{\text{ст}} = \Delta_{1p} = \int_l \frac{\bar{M}_1 M_x}{EI_x} dz + \int_l \frac{\bar{N}_1 N_F}{EA} dz = \frac{1}{200 \cdot 10^9 \cdot 873 \cdot 10^{-8}} \times$$

$$\times \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{100 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} \times$$

$$\times (250 \cdot 1 \cdot 1,25) = 0,020625 \text{ см.}$$

Тогда динамический коэффициент

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 2}{0,020625}} = 14,95.$$

Наибольшие динамические напряжения, возникающие в балке,

$$\sigma_{\text{д}}^{\text{max}} = \mu \sigma_{\text{ст},6}^{\text{max}} = 14,95 \cdot 18,3 = 268,095 \text{ МПа.}$$

В медном тросе напряжения

$$\sigma_{\text{д}}^{\text{тр}} = \mu \sigma_{\text{тр}} = 14,95 \cdot 12,5 = 186,875 \text{ МПа.}$$

## 22.4. Колебания упругих систем

Рассмотрим собственные колебания системы с одной степенью свободы. Дальнейший материал имеет важное значение для изучения динамических характеристик системы, в особенности при действии вибрационных нагрузок.

При действии на упругую систему сил, величина или направление которых периодически изменяются, возникают колебания. Колебания элементов конструкций часто является причиной разрушения и катастроф. Известно немало случаев, когда конструкции или их отдельные детали, находясь под действием периодических сил, выходили из строя, хотя запас прочности, рассчитанный по статическому нагружению, был обеспечен.

При колебаниях вследствие наличия ускорений возникают силы инерции, которые могут во много раз превосходить усилия, возникающие в элементах сооружений от действия статических нагрузок. Поэтому динамические нагрузки значительно опаснее статических.

Общей чертой всех колебательных движений является то, что они представляют собой многократно повторяющиеся или приблизительно повторяющиеся движения через определенные промежутки времени.

При изучении колебательных движений нас, главным образом, будет интересовать не состояние системы в данный момент времени, а признаки, характеризующие повторяемость движений, т.е.:

- 1) закон, по которому повторяется движение;
- 2) время, через которое система снова приходит к тому же самому состоянию;
- 3) наибольшие перемещения упругой системы, возникающие при колебаниях.

Рассмотрим системы, у которых масса тела  $m$  сосредоточена в одной точке. Массу стержня, поддерживающего тело, будем считать пренебрежимо малой по сравнению с колеблющейся массой (рис. 22.8, а). В этом случае положение тела, совершающего колебания, определяется одним параметром — перемещением  $y$  относительно положения статического равновесия.

В динамических расчетах важным понятием является *число степеней свободы системы*, под которым понимают число независимых переменных, необходимых и достаточных для описания положения системы в любой момент времени.

Балки, показанные на рис. 22.8, б—г, являются системами с одной степенью свободы.

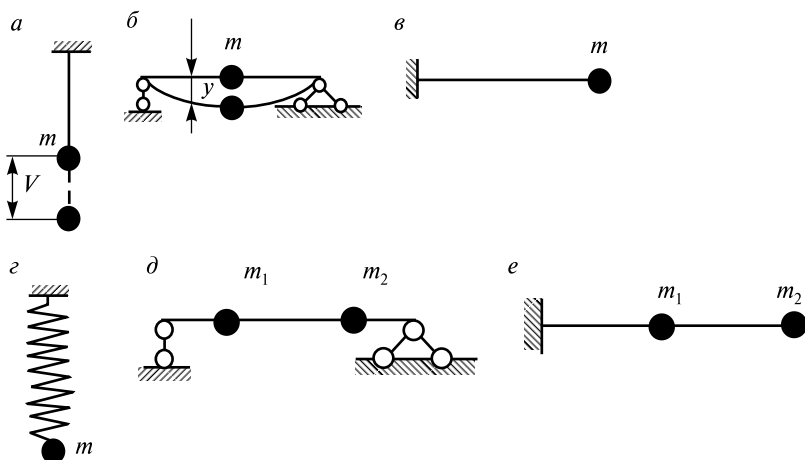


Рис. 22.8. Системы с одной (а, б, в, г) и двумя (д, е) степенями свободы

Системы с одной степенью свободы — это такие, у которых для полного описания геометрического состояния достаточно знать только один параметр, например, положение определенной точки.

На рис. 22.8, *д, е* показаны балки, являющиеся системами с двумя степенями свободы, так как для определения величин сил инерции обоих грузов необходимо знать два параметра, например, прогибы двух поперечных сечений балки. И так количество степеней свободы может меняться от 1 до  $\infty$ .

Будем рассматривать только *гармонические колебания*, т.е. происходящие с неизменной амплитудой. Такие колебания возникают в том случае, когда возвращающая сила прямо пропорциональна отклонению системы от положения статического равновесия.

При рассмотрении упругих колебаний системы различают *собственные* и *вынужденные колебания*.

*Собственными (свободными)* называют колебания (колебательные движения), которые совершает система около положения устойчивого равновесия после того как она была выведена из состояния равновесия.

Чтобы представить процесс свободных колебаний, выведем балку из состояния равновесия, приложив силу. Удалим внезапно эту силу. Под действием сил упругости балка перейдет в колебательный процесс. В этом случае характер колебаний определяется исключительно собственными параметрами системы — массой и жесткостью балки.

Таким образом, свободные колебания происходят в системе при отсутствии внешнего воздействия и без поступления энергии извне. Возникают они вследствие первоначального отклонения системы от положения равновесия и запасенной в системе энергии.

В отличие от них *вынужденными колебаниями* называются колебания системы, происходящие при действии на нее возмущающей силы.

Рассмотрим свободные продольные колебания, совершаемые системой пружина—масса (рис. 22.9, *а*).

Обозначим через  $y$  смещение массы по вертикали от положения статического равновесия, соответствующее некоторому моменту времени  $t$ . Смещение вниз от положения статического равновесия будем считать положительным.

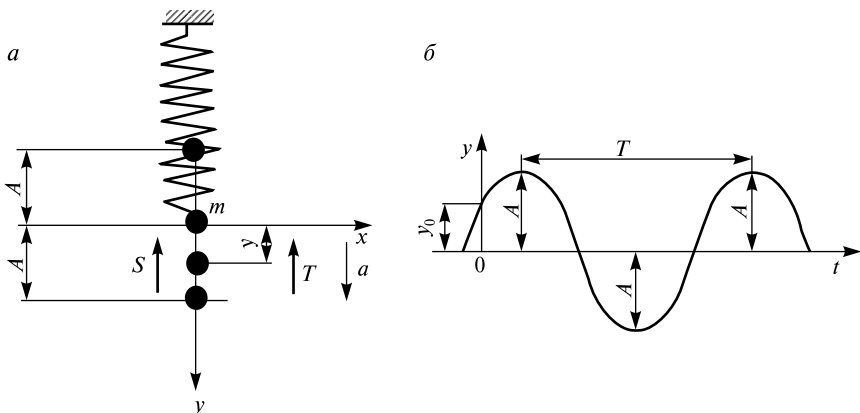


Рис. 22.9. Колебательная система пружина—масса с одной степенью свободы (а); график изменения колебаний во времени (б)

Усилие  $S$ , возникающее в пружине, связано с ее жесткостью  $c$  и равно  $S = cy$ .

*Коэффициент жесткости упругой системы* — это сила, вызывающая смещение массы на единицу.

Жесткость пружины выразим через податливость упругой системы  $\delta_{11}$ , т.е.  $c = 1/\delta_{11}$ .

*Податливостью упругой системы* называют ее смещение в точке, вызванное единичной силой.

На массу действует сила инерции  $T$ , равная произведению массы на ускорение и направленная в сторону, противоположную ускорению. Ускорение определяется второй производной от пути, тогда

$$T = ma = m(d^2y/dt^2). \quad (22.17)$$

Составим уравнение равновесия, т.е. спроектируем все действующие силы на ось  $y$ :

$$\sum y = 0; \quad S + T = 0, \quad \text{или} \quad cy + m \frac{d^2y}{dt^2} = 0; \quad (22.18)$$

перепишем

$$(1/\delta_{11})y + m(d^2y/dt^2) = 0, \quad (22.19)$$

или

$$d^2 y / dt^2 + (1 / m \delta_{11}) y = 0. \quad (22.20)$$

Обозначим  $\varphi = \sqrt{1 / m \delta_{11}}$  и назовем его частотой собственных колебаний (число колебаний за  $2\pi$  с).

Дифференциальное уравнение (22.20) представляет собой линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, решение которого имеет вид

$$y = C_1 \sin \varphi t + C_2 \cos \varphi t, \quad (22.21)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий движения, т.е. от положения массы и ее скорости в момент  $t$ .

Выражение (22.21) может быть записано в виде

$$y = A \sin(\varphi t + \vartheta), \quad (22.22)$$

где  $A$  — амплитуда колебаний (максимальное отклонение центра массы от положения равновесия);

$\varphi$  — круговая частота свободных колебаний (число колебаний за  $2\pi$  с),  $1/\text{с}$ ;  
 $(\varphi t + \vartheta)$  — фаза колебаний;

$\vartheta$  — начальная фаза колебаний, т.е. фаза в момент времени  $t = 0$ .

График изменений колебательных движений  $y$  во времени представлен на рис. 22.9, б.

Промежуток времени между двумя совершенно одинаковыми положениями системы называют *периодом колебаний* и обозначают  $T$ . Определим этот промежуток времени.

Поскольку период синуса и косинуса равен  $2\pi$ , по истечении времени  $T$  колеблющаяся масса возвращается в исходное состояние. Если времени  $t$  дадим приращение периода  $T$ , т.е. на основании формулы (11.22) имеем

$$\varphi(t + T) + \vartheta - (\varphi t + \vartheta) = 2\pi,$$

откуда

$$T = 2\pi / \varphi. \quad (22.23)$$

Круговая частота собственных колебаний определяется из выражения

$$\varphi = \sqrt{1 / (\delta_{11} m)}, \quad (22.24)$$

где  $m$  — масса колеблющегося груза;

$\delta_{11}$  — податливость упругой системы, м/Н.

Определим амплитуду  $A$  и фазу  $\vartheta$  колебаний из начальных условий движения. Если в начальный момент времени при  $t = 0$  смещение массы было  $y = y_0$ , а скорость  $v = v_0$ , то из предыдущих уравнений получим:

$$y_0 = A \sin \vartheta, \quad v_0 = A \varphi \cos \vartheta. \quad (22.25)$$

Выражая тригонометрические функции  $\sin \vartheta$  и  $\cos \vartheta$  из (22.25), возводя в квадрат и складывая их, получим:

$$A = \sqrt{y_0^2 + (v_0 / \varphi)^2}, \quad \operatorname{tg} \vartheta = y_0 \varphi / v_0. \quad (22.26)$$

Таким образом, амплитуда определяется исключительно из начальных условий, а *частота свободных колебаний совершенно не зависит от начальных условий*. Поскольку в системе всегда присутствуют силы трения, собственные колебания всегда затухают.

Приведенные рассуждения и решения являются приближенными, так как в них не учитываются силы сопротивления, например, сопротивление воздуха, силы трения в шарнирах, силы внутреннего сопротивления.

Силы сопротивления воздуха при скоростях колебаний, которые наблюдаются в стержнях, невелики, и поэтому ими можно пренебречь. Силы трения в шарнирах могут быть сведены до минимума в результате улучшения конструкции шарнира. Основными являются силы внутреннего сопротивления, которые зависят от материала стержня и ряда других факторов.

Наиболее распространенной гипотезой учета затухания является *гипотеза Фойгта*. Материал балки рассматривается как вязкое тело, в котором возникают напряжения  $\sigma$ , зависящие не только от величины деформации  $\epsilon$ , но и от скорости изменения деформации во времени.

Приведенные формулы справедливы и для случая изгибных колебаний при условии, что в этом случае  $\delta_{11}$  будет определяться как прогиб балки от единичной силы, приложенной в точке прикрепления колеблющейся массы.

Рассмотрим примеры простейших видов колебаний систем.

**Пример 22.6.** К вертикально укрепленному стальному консольному стержню длиной  $l = 2$  м, диаметром  $d = 0,04$  м подвешен груз  $G = 10$  кН. Определить частоту собственных вертикальных колебаний системы без учета собственного веса стержня.

*Решение.* Круговая частота  $\varphi$  собственных колебаний груза (число колебаний за  $2\pi$  с) вычисляется по формуле (22.24). Предварительно определим массу колебаний груза:

$$m = G / g = 10 \cdot 10^3 / 9,8 = 1,02048 \cdot 10^3 \text{ Нс}^2/\text{м},$$

где  $g$  — ускорение свободного падения ( $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>).

Статическое удлинение стержня от единичной силы

$$\delta_{11} = \frac{1l}{EA} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 4}{200 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 10^{-4}} = 7,96 \cdot 10^{-9} \text{ м/Н}.$$

Тогда частота собственных колебаний груза без учета собственного веса стержня

$$\varphi = \sqrt{1/(\delta_{11}m)} = \sqrt{1/(7,96 \cdot 10^{-9} \cdot 1,02048 \cdot 10^3)} = 351 \text{ 1/с}.$$

**Пример 22.7.** Определить частоту собственных колебаний двух опорной балки, выполненной из двутавра № 20, с учетом и без учета массы балки. Длина пролета балки 4 м. Груз  $G = 4$  кН расположен в середине пролета балки.

*Решение.* Круговую частоту  $\varphi$  собственных колебаний груза без учета массы балки вычислим по формуле (22.24).

Определим массу колеблющегося груза:

$$m = G / g = 4 \cdot 10^3 / 9,8 = 0,40816 \cdot 10^3 \text{ Нс}^2/\text{м},$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $g = 9,8$  м/с<sup>2</sup>.

Податливость упругой системы вычислим, загрузив заданную упругую систему единичным воздействием  $\bar{P}_1 = 1$  в точке сосредоточения массы груза. Построим единичную эпюру и воспользовавшись правилом Верещагина, получим

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dz = \frac{2}{200 \cdot 10^9 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = 0,3623 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н}.$$

Тогда частота собственных колебаний груза без учета веса балки

$$\varphi = \sqrt{1/(\delta_{11}m)} = \sqrt{1/(0,3623 \cdot 10^{-6} \cdot 0,40816 \cdot 10^3)} = 82,23 \text{ 1/с}.$$



Определим частоту собственных колебаний с учетом собственной массы балки. Для упругой системы с одной степенью свободы с учетом собственной массы балки она составляет

$$\varphi = \sqrt{1/\delta_{11} \left( m + k \frac{Q}{g} \right)},$$

где  $k$  — коэффициент приведения, равный примерно  $1/2$  в случае, если рассматривается система с одной степенью свободы;

$Q$  — вес балки.

Для определения веса балки воспользуемся ГОСТ 8239-89, из которого определим массу  $1$  м балки. Тогда полный вес балки будет  $Q = gl = 210 \cdot 4 = 840$  Н.

Определим частоту собственных колебаний балки:

$$\varphi = \sqrt{1/0,3623 \cdot 10^{-6} \left( 0,40816 \cdot 10^3 + 1/2 \frac{840}{9,8} \right)} = 78,23 \text{ 1/с.}$$

Анализируя полученные данные, можно сделать вывод, что частота собственных колебаний с увеличением жесткости возрастает, а с увеличением массы — понижается.

**Пример 22.8.** Определить частоту и период собственных колебаний груза  $G = 20$  Н, закрепленного на рычаге  $AB$  (рис. 22.10), удерживаемого стальной пружиной. Размеры пружины:  $R = 0,03$  м,  $d = 0,004$  м,  $n = 10$ . Деформацией и весом рычага пренебречь.

*Решение.* Определим усилие, возникающее в пружине, для этого рассмотрим заданную упругую систему, загрузив ее единичным воздействием  $\bar{P}_1 = 1$  (рис. 22.10, б).

Составим уравнение статики и определим усилие:

$$\sum m_A = 0; \quad -S \cdot 0,4 + \bar{P}_1 \cdot 1,2 = 0 \quad \Rightarrow \quad S = 3.$$

Тогда осадка пружины  $CC_1$  будет равна

$$\lambda = \frac{64SR^3n}{Gd^4} = \frac{64 \cdot 3 \cdot 0,03^3 \cdot 10}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,004^4} = 0,25311 \text{ см.}$$

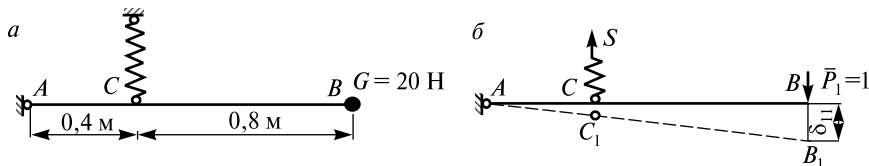


Рис. 22.10: а — схема рычага, удерживаемого пружиной; б — схема единичного воздействия

Рассматривая подобие треугольников  $ACC_1$  и  $ABB_1$ , определим единичное перемещение  $\delta_{11}$ :

$$\frac{\lambda}{0,4} = \frac{\delta_{11}}{1,2}, \quad \delta_{11} = 0,7593 \text{ см.}$$

Определим массу колеблющегося груза:

$$m = G / g = 20 / 9,8 = 2,040816 \text{ Нс}^2/\text{м.}$$

Тогда частота собственных колебаний груза

$$\varphi = \sqrt{1/\delta_{11}m} = \sqrt{1/0,7593 \cdot 10^{-2} \cdot 2,040816} = 8,033 \text{ 1/с.}$$

## 22.5. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы

*Вынужденными* называют колебания, происходящие под действием внешней периодической возмущающей силы  $F(t)$ , изменяющейся во времени по какому-либо закону.

Примером могут служить колебания корпуса локомотива от работы тяговых двигателей.

Рассмотрим случай (рис. 22.11), когда на систему с одной степенью свободы действует вынуждающая сила, изменяющаяся по периодическому закону

$$F(t) = F_0 \sin \theta t, \quad (22.27)$$

где  $F_0$  — амплитуда, т.е. максимальное значение возмущающей силы;

$\theta$  — круговая частота изменения возмущающей силы.

Составим уравнение равновесия, т.е. спроектируем все действующие силы на ось  $y$ .

$$\sum y = 0; \quad S + T = F(t), \quad \text{или}$$

$$cy + m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_0 \sin \theta t. \quad (22.28)$$

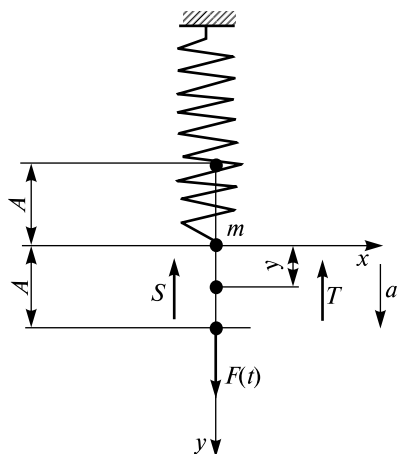


Рис. 22.11. Модель к определению вынужденных колебаний одномассовой системы

Перепишем (22.28) с учетом обозначений:

$$(1/\delta_{11})y + m(d^2y/dt^2) = F_0 \sin \theta t, \quad (22.29)$$

или

$$d^2y/dt^2 + (1/(m\delta_{11}))y = (F_0/m) \sin \theta t. \quad (22.30)$$

Решение имеет вид

$$y = C_1 \sin \varphi t + C_2 \cos \varphi t + \frac{F_0}{m(\varphi^2 + \theta^2)} \sin \theta t, \quad (22.31)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные постоянные собственных колебаний, зависящие от начальных условий движения.

Слагаемое  $(F_0/(m(\varphi^2 + \theta^2))) \sin \theta t$  представляет собой вынужденные колебания упругой системы.

Собственные колебания со временем затухнут. Рассмотрим только вынужденные колебания. Они происходят с частотой вынуждающей силы. Наибольшее отклонение пружины от своего первоначального положения, т.е. амплитуда вынужденных колебаний

$$y_d = \frac{F_0}{m\varphi^2(1 - \theta^2/\varphi^2)}. \quad (22.32)$$

Учитывая, что  $F_0/m\varphi^2$  — это перемещение, которое получила бы масса, если бы к ней статически была приложена сила  $F_0$ , имеем

$$y_d = \frac{y_{ст}^{F_0}}{1 - \theta^2/\varphi^2} = y_m^{F_0} \mu. \quad (22.33)$$

Динамический коэффициент  $\mu$  показывает, во сколько раз амплитуда вынужденных колебаний больше статического перемещения, вызванного максимальным значением вынуждающей силы.

Для исследования значения динамического коэффициента

$$\mu = 1 / (1 - \theta^2/\varphi^2) \quad (22.34)$$

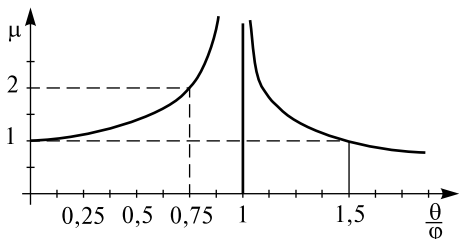


Рис. 22.12. График динамического коэффициента, построенный по абсолютным значениям

рассмотрим его график (рис. 22.12), построенный по абсолютным значениям. Из этого графика видно, что когда частота вынужденных колебаний  $\theta$  приближается к частоте собственных колебаний  $\phi$ , динамический коэффициент  $\mu$  безгранично возрастает. Такое явление называется *резонансом*. Это явление пред-

ставляет опасность для сооружений и его нельзя допускать. При частоте возмущающей силы, превышающей собственную частоту, динамический коэффициент уменьшают.

Полученные соотношения описывают вынужденные колебания системы, происходящие без затухания, и являются приближенным решением.

**Пример 22.9.** На двухопорной балке, выполненной из двутаврового профиля № 20, посередине пролета ( $l = 4$  м) расположен двигатель весом  $G = 4$  кН, совершающий 600 об/мин (рис. 22.13, а). Неуравновешенность двигателя (дисбаланс) составляет 80 Н на радиусе 0,1 м (рис. 22.13). Определить наибольшее нормальное напряжение, возникающее в балке, с учетом ее массы, используя ответ задачи, рассмотренной в примере 22.7.

**Решение.** Определим величину наибольших нормальных напряжений, возникающих в балке от собственного ее веса и от двигателя, для этой цели построим эпюру изгибающих моментов (рис. 22.13, в). Взяв из таблицы сортамента для двутавра № 20 момент сопротивления  $W_x = 184 \text{ см}^3$ , определим величину наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{4,412 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 23,96 \text{ МПа}.$$

Найдем наибольшие напряжения от вибрационной нагрузки. Для этой цели определим величину возмущающей силы, предварительно найдя круговую частоту ротора электродвигателя (число циклов  $2\pi$  в секунду):

$$\theta = 2\pi \frac{n}{60} = 2\pi \frac{600}{60} = 62,8 \text{ с}^{-1}.$$

Тогда амплитудная величина возмущающей силы

$$P = m\theta^2 r = (80 / 9,8) \cdot 62,8^2 \cdot 0,1 = 3,219 \text{ кН}.$$

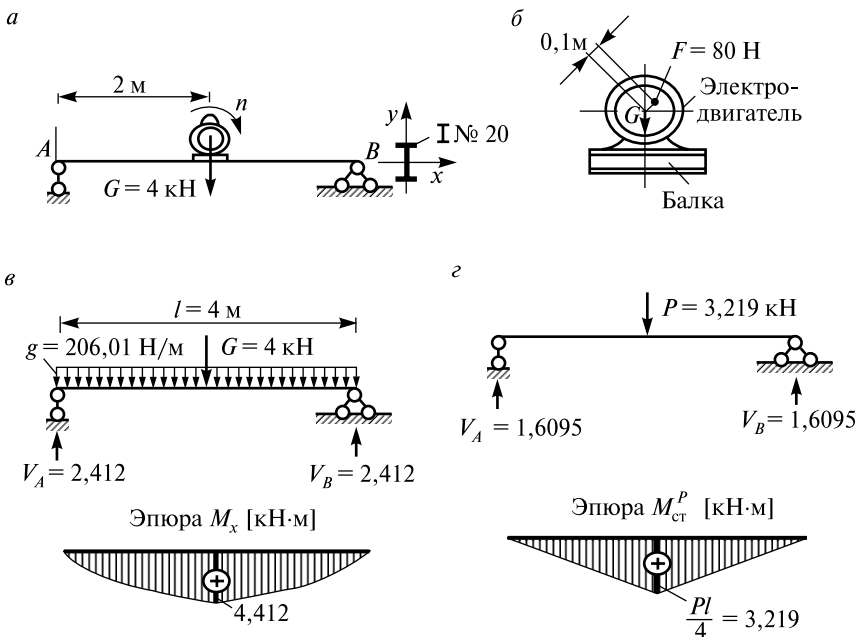


Рис. 22.13: *a* — заданная балка; *б* — схема электродвигателя; *в* — расчетная схема балки с учетом собственного веса и эпюра изгибающих моментов; *г* — расчетная схема балки при статическом действии нагрузки и эпюра изгибающих моментов

Построим эпюру изгибающих моментов (рис. 22.19, *г*) и определим величину наибольших статических напряжений:

$$\sigma_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{ст}}^p}{W_x} = \frac{3,219 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 17,49 \text{ МПа.}$$

Используя данные примера 22.7, в котором определена частота собственных колебаний балки с учетом ее массы, определим динамический коэффициент:

$$\mu = \frac{1}{1 - \theta^2 / \varphi^2} = \frac{1}{1 - \frac{62,8^2}{78,23^2}} \cong 2,81.$$

Тогда величина наибольших нормальных напряжений от вибрационной нагрузки

$$\sigma_{\text{дин}} = \mu \sigma_{\text{ст}} = 2,81 \cdot 17,49 = 49,1469 \text{ МПа.}$$

Таким образом, напряжения в крайних точках сечения балки меняются в следующих пределах:

$$\min \sigma = 23,96 - 49,1469 = -25,1869 \text{ МПа;}$$

$$\max \sigma = 23,96 + 49,1469 = 73,1069 \text{ МПа.}$$

**Пример 22.10.** На консольной балке (рис. 22.14), составленной из двух швеллеров № 12, установлен электродвигатель весом  $G = 2 \text{ кН}$ , совершающий  $n = 1200 \text{ об/мин}$ . Определить положение  $x$  мотора, при которых:

- а) динамический коэффициент  $\mu = 2$ ;
- б) наступит резонанс.

Массу балки не учитывать.

**Решение.** Определим массу колеблющегося груза:

$$m = G/g = 2 \cdot 10^3 / 9,8 = 0,204 \cdot 10^3 \text{ Нс}^2/\text{м.}$$

Податливость упругой системы вычислим, загрузив заданную упругую систему единичным воздействием  $\bar{P}_1 = 1$  (рис. 22.14, б) в точке сосредоточения массы груза. Построим единичную эпюру (рис. 22.14, в) и, воспользовавшись правилом Верещагина, получим

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_1^2}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} x \cdot x \cdot \frac{2}{3} x \right) = \frac{x^3}{3EI}.$$

Частота собственных колебаний груза без учета веса балки

$$\varphi = \sqrt{1/\delta_{11} m} = \sqrt{1 \cdot 3EI / (x^3 \cdot 0,204 \cdot 10^3)}.$$

Вычислим круговую частоту ротора электродвигателя, т.е. частоту вынужденных колебаний

$$\theta = 2\pi \cdot \frac{n}{60} = 2\pi \frac{1200}{60} = 125,6 \text{ с}^{-1}.$$

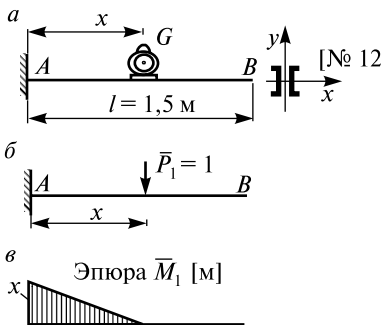


Рис. 22.14: а — консольная балка с электродвигателем; б — упругая система с единичным воздействием; в — единичная эпюра изгибающего момента

Рассмотрим первое условие задачи и определим положение электромотора при условии, что динамический коэффициент  $\mu = 2$ .

$$\mu = \frac{1}{1 - \theta^2 / \varphi^2} = 2; \quad 125,6^2 = \frac{3EI \cdot 0,5}{0,204 \cdot 10^3 \cdot x^3}.$$

Подставляя модуль упругости, равный  $E = 200 \cdot 10^9$  Па, и момент инерции балки, состоящей из двух швеллеров  $2I_x^{\text{ГОСТ}} = 2 \cdot 304 \cdot 10^{-8} = 608 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ , получим  $x = 0,835$  м.

*Рассмотрим второе условие задачи, т.е. случай, когда наступит резонанс.* В этом случае частота собственных колебаний должна быть равна частоте вынужденных колебаний:

$$\varphi = \theta; \quad 125,6^2 = \frac{3EI}{0,204 \cdot 10^3 \cdot x^3}.$$

Решая полученное уравнение относительно  $x$ , определим, что положение электромотора в этом случае должно быть равным 1,05 м.

## **Глава 23. ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ**

### **23.1. Основные понятия об усталости и характеристики цикла**

Преобладающая часть деталей машин и конструкций в процессе эксплуатации работает в условиях периодически изменяющихся напряжений. Многочисленные опыты и анализ поломок различных деталей машин и сооружений позволили установить, что при переменных напряжениях разрушение деталей происходит при напряжениях, значительно меньших предела прочности, а в ряде случаев — и предела текучести. Разрушение деталей при действии переменных напряжений носит название *усталостных*.

Процесс постепенного накопления повреждений в материале под действием переменных напряжений, приводящих к образованию трещины и разрушению, называется *усталостью материала*. Свойство материала противостоять усталости называется *выносливостью*.

Долгое время существовало мнение, что при работе детали в условиях циклически меняющихся напряжений происходит изменение в кристаллическом строении металла. Это мнение основывалось на том, что материал с достаточными пластическими свойствами при длительной работе в условиях переменных напряжений разрушается как хрупкий, без заметных остаточных деформаций. На ту же мысль наводил и внешний вид излома, характерный для усталостного разрушения. Материал в месте излома имеет две зоны — гладкую отшлифованную мелкозернистой структуры и крупнозернистую, шероховатую, матовую, характерную для хрупкого излома. Поэтому и возникло предположение, что металл с течением времени «устает» и вместо пластического становится хрупким.

В настоящее время доказана ошибочность этого предположения, однако термин «усталость» остался в научном употреблении. Техника микрофотографирования позволила проследить за процессом разрушения при переменных напряжениях. Разрушение происходит вследствие постепенного развития микротрещины. Наличие двух зон в месте излома вызвано тем, что под влиянием переменных напряжений края трещины то расходятся, то сходятся, нажимая друг на друга, благодаря чему происходит сглаживание поверхности трещины, ее «шлифование». Когда развившаяся трещина ослабит сечение настолько, что она не в состоянии воспринимать действующие нагрузки, происходит внезапное хрупкое разрушение, характерное даже для весьма пластичных материалов.

Около 90 % всех повреждений на железнодорожном транспорте связано с усталостью.

Рассмотрим возникновение переменных напряжений на примере работы оси железнодорожного подвижного состава (рис. 23.1). Вес подвижного состава вызывает изгиб оси. Соответствующая расчетная схема и эпюра изгибающих моментов показаны на рис. 23.1, а, б.

Проследим за изменением напряжения, возникающего в некоторой точке А, находящейся на поверхности оси (рис. 23.2).

Напряжения при изгибе определяются по формуле

$$\sigma = (M/I)y. \quad (23.1)$$



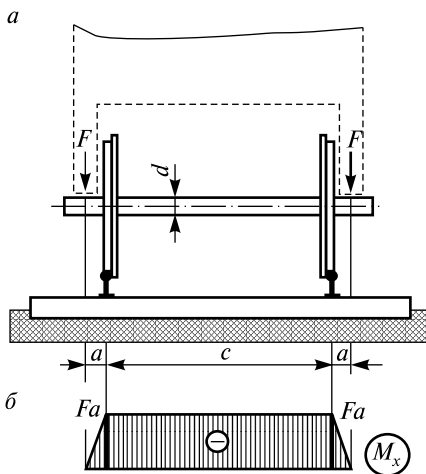


Рис. 23.1. Расчетная схема колесной пары подвижного состава (а) и эпюра изгибающих моментов (б)

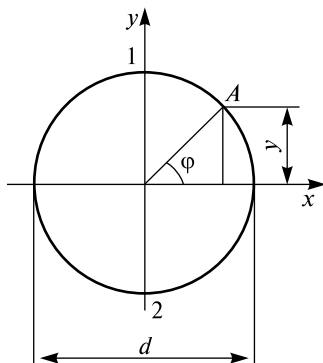


Рис. 23.2. Поперечное сечение круглого вала и точка А на его контуре

Расстояние  $y$  от нейтральной оси сечения до точки  $A$  будет меняться и в каждый момент времени может быть найдено из выражения

$$y = \frac{d}{2} \sin \varphi. \quad (23.2)$$

Тогда нормальные напряжения составят

$$\sigma = \frac{M}{I} y = \frac{M}{I} \frac{d}{2} \sin \varphi = \frac{Fa}{I} \frac{d}{2} \sin \omega t = \sigma_a \sin \omega t. \quad (23.3)$$

Из выражения (23.3) видим, что нормальные напряжения в поперечном сечении изменяются по периодическому закону с периодом  $T = 2\pi$  и амплитудой  $\sigma_a = (32Fa/\pi)d^3$ . Наибольшие напряжения возникают в точке 1 или 2.

Совокупность всех значений переменных напряжений за один период процесса их изменения называется *циклом напряжений*.

В рассматриваемом случае максимальное  $\sigma_{\max}$  и минимальное  $\sigma_{\min}$  напряжения цикла равны по величине и противоположны по

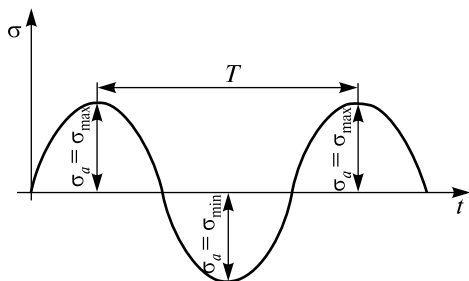


Рис. 23.3. График изменения нормальных напряжений в контурной точке поперечного сечения круглого вала

знаку. Полусумма максимального и минимального напряжения называется *средним напряжением цикла* (рис. 23.3):

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}. \quad (23.4)$$

Положительное наибольшее числовое значение переменной составляющей цикла напряжений называется *амплитудой цикла*:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (23.5)$$

Среднее напряжение цикла может быть как положительным, так и отрицательным. Амплитуда цикла всегда положительна.

Отношение  $R = (\sigma_{\min}/\sigma_{\max})$  называется *коэффициентом асимметрии цикла*.

Различным законам изменения напряжений соответствуют различные виды циклов (рис. 23.4).

Для симметричного цикла (см. рис. 23.3)  $R = -1$ ,  $\sigma_T = 0$ ,  $\sigma_a = \sigma_{\max}$ , поэтому в обозначениях величин, соответствующих симмет-

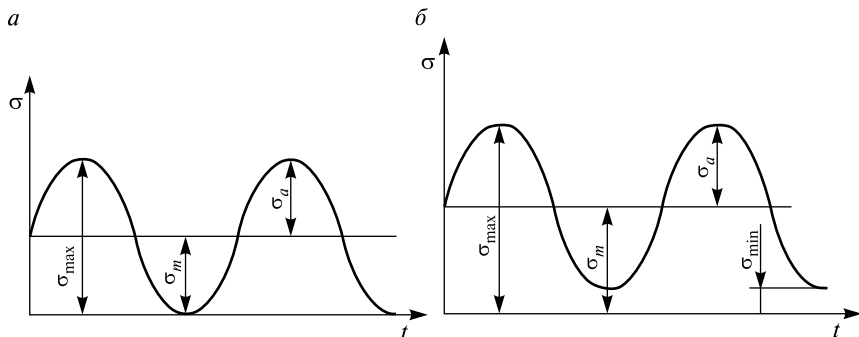


Рис. 23.4. Изменение напряжений при асимметричном цикле:  
а — пульсационный (от нулевой); б — знакопостоянный

ричному циклу, вводится индекс — 1. Для пульсационного (от нулевого)  $R = 0$  (рис. 23.4).

*Циклы, имеющие одинаковое значение коэффициента асимметрии, называются подобными.*

Симметричный цикл является наиболее опасным и вместе с тем наиболее распространенным.

## 23.2. Кривая усталости. Предел выносливости

Для проведения расчетов на прочность при действии знакопеременных напряжений необходимо знать механические характеристики материалов. Они определяются опытным путем на специальных машинах. Первую машину для усталостных испытаний построил немецкий ученый А. Велер.

Для получения характеристик сопротивления усталости необходимо провести испытания не менее 10 одинаковых образцов. Чаще всего испытания проводятся при симметричном цикле напряжений. При этом каждый образец испытывают только при одной амплитуде напряжений до разрушения или до базового числа циклов. Под *базовым числом циклов*  $N_0$  понимается предварительно задаваемое число циклов напряжений, до которого испытывается образец.

Первый образец испытывается при амплитуде напряжений  $\sigma_a \approx (0,75 \dots 0,65)\sigma_b$ . Постепенное снижение напряжения  $\sigma_a$  приводит к увеличению долговечности образца, под которой понимается число циклов до разрушения. Поскольку число циклов при проведении испытаний растет очень быстро, при построении кривой усталости пользуются полулогарифмической системой координат (рис. 23.5). Цель испытаний на усталость заключается в определении такой механической характеристики, которая могла бы количественно охарактери-

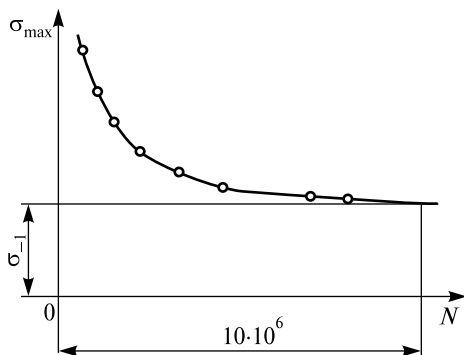


Рис. 23.5 Кривая усталости

зовать способность материалов сопротивляться усталости. К этой характеристике относится предел выносливости  $\sigma_1$ .

Наибольшее значение максимального напряжения цикла  $\sigma_{\max}$  (или  $\sigma_{\min}$ , если  $|\sigma_{\max}| < |\sigma_{\min}|$ ), которое не вызывает разрушение испытуемого на выносливость образца из данного материала при неограниченно большом числе циклов.

Предел выносливости при симметричном цикле обозначается через  $\sigma_{-1}$ , при отнулевом — через  $\sigma_0$ .

Для расчета деталей, не предназначенных на длительный срок службы, вводится понятие *ограниченного предела выносливости*  $\sigma_{RN}$ , где индексы означают:  $N$  — заданное число циклов, меньшее базового;  $R$  — коэффициент асимметрии.

Предел выносливости связан эмпирической зависимостью с пределом прочности при статическом нагружении: для сталей  $\sigma_{-1} \approx (0,5 \dots 0,4)\sigma_B$ , для цветных металлов  $\sigma_{-1} \approx (0,5 \dots 0,25)\sigma_B$ .

### 23.3. Диаграмма предельных амплитуд

При эксплуатации детали машин могут испытывать напряжения, изменяющиеся по разнообразным циклам. Поэтому, как показывает практика, с целью получения пределов выносливости материала для различных циклов напряжений наряду с испытаниями образцов при симметричных циклах проводят также испытания и при асимметричных циклах. Результаты испытаний изображаются в виде диаграмм. Широкое распространение получили диаграммы предельных амплитуд, их строят в координатах  $\sigma_T - \sigma_a$  (рис. 23.6). Точки, лежащие на линии  $AC$  диаграммы (рис. 23.6, *а*), характеризуют предельные циклы, для которых максимальные напряжения являются пределами выносливости при различных коэффициентах асимметрии  $\sigma_{\max} = \sigma_T + \sigma_a$ . Точки, расположенные ниже линии  $AC$ , представляют собой циклы, не вызывающие разрушения образцов до базы испытаний. Точки, расположенные на линии  $AC$ , соответствуют циклам, при которых разрушение образцов происходит при меньшем числе циклов, чем базовое. Луч, проведенный из начала координат диаграммы через точки  $K$  и  $L$ , характеризует подобные циклы, т.е. циклы с одинаковыми коэффициентами  $R$ .

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_T} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{1 - R}{1 + R}. \quad (23.6)$$

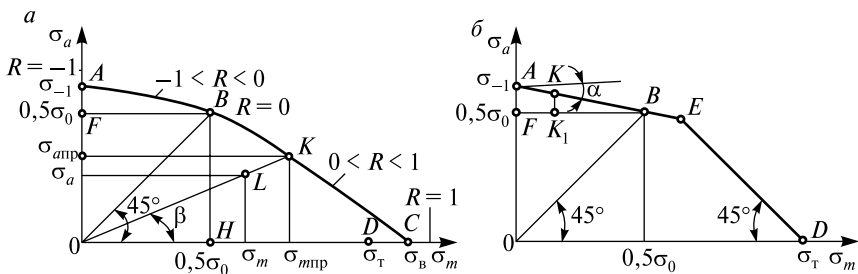


Рис. 23.6. Диаграмма предельных амплитуд:  
 а — классическая диаграмма; б — схематизированная по Кинасовилю диаграмма

С помощью диаграммы можно определить предельные напряжения для любого цикла. Например, для пульсирующего (отнулевого) цикла, у которого  $\sigma_{\min} = 0$ , а  $\sigma_a = \sigma_m = \sigma_{\max}/2$ . Для этого из начала координат проводят прямую под углом  $45^\circ$  до пересечения в точке  $B$ . Координаты этой точки: ордината  $HB$  равна предельному амплитудному напряжению, а абсцисса  $BF$  — предельному среднему напряжению этого цикла. Предельное максимальное напряжение пульсирующего цикла равно сумме координат точки  $B$ :

$$\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m = \sigma_0. \quad (23.7)$$

Подобным образом можно решить вопрос о предельных напряжениях любого цикла.

Если деталь машины, испытывающая переменные напряжения, изготовлена из пластического материала, то опасным будет не только усталостное разрушение, но и возникновение пластических деформаций. Максимальные напряжения цикла в этом случае определяются равенством

$$\sigma_{\max} = \sigma_a + \sigma_m = \sigma_T, \quad (23.8)$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести.

Наибольшее распространение получили диаграммы предельных амплитуд, построенные по результатам трех серий испытаний образцов: при симметричном цикле  $\sigma_{-1}$  (точка  $A$ ), при отнулевом цикле (точка  $B$ ) и при статическом разрыве  $\sigma_T$  (точка  $D$ ) (рис. 23.6, б). Соединяя точки  $A$  и  $B$  прямой и проводя из точки  $D$

прямую под углом  $45^\circ$ , получим приближенную диаграмму предельных амплитуд. Такую схематизацию диаграммы предложил *Р.С. Кинасашвили*.

Зная координаты точки  $A(0, \sigma_{-1})$  и  $B(0,5\sigma_0; 0,5\sigma_0)$ , можно составить уравнение прямой  $AE$ . Возьмем на прямой произвольную точку  $K$  с координатами  $\sigma'_a$  и  $\sigma'_m$ . Из подобия треугольников  $ABF$  и  $BKK_1$  получим

$$\frac{\sigma_{-1} - 0,5\sigma_0}{\sigma'_a - 0,5\sigma_0} = \frac{0,5\sigma_0}{0,5\sigma_0 - \sigma'_m} \quad (23.9)$$

откуда находим уравнение прямой  $AE$  в виде

$$\sigma_{-1} = \Psi \sigma'_m + \sigma'_a, \quad (23.10)$$

где  $\Psi = (\sigma_{-1} - 0,5\sigma_0) / 0,5\sigma_0$ .

## 23.4. Факторы, влияющие на снижение предела выносливости

Создание надежных и экономичных конструкций возможно лишь при всестороннем учете тех факторов, которые существенно влияют на величину усталостной прочности. К числу таких факторов относятся следующие.

**Концентрация напряжений.** Концентрация напряжений оказывает неблагоприятное влияние на усталостную прочность, так как усталостное разрушение носит локальный характер. В тех местах детали, где имеются разного рода отверстия, выточки, переходы от одних размеров и форм сечений к другим, наблюдается значительное возрастание действительных напряжений по сравнению с номинальными (рис. 23.7).

Максимальное напряжение в месте концентраций напряжений (рис. 23.7, *а*) определяется с помощью теоретического коэффициента концентрации напряжений  $\alpha_\sigma$ :

$$\sigma_{\max} = \alpha_\sigma \sigma_{\text{ном}},$$

где  $\sigma_{\text{ном}}$  — номинальное напряжение, определяемое без учета концентрации напряжений по формулам сопротивления материалов.

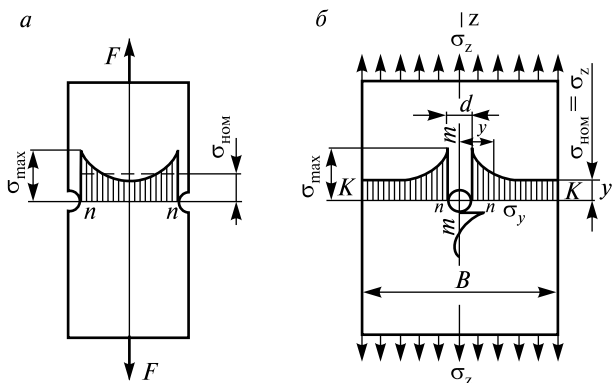


Рис. 23.7. Образец с надрезом (а) и отверстием (б)

Обычно номинальное напряжение определяют для наиболее ослабленного сечения. Для полосы, ослабленной отверстием (рис. 23.7, б),

$$\sigma_{\text{ном}} = F / A_{\text{netto}}.$$

Когда определение напряжений в ослабленном сечении затруднено, за  $\sigma_{\text{ном}}$  принимают напряжение в неослабленном сечении.

Величину коэффициента концентрации напряжений определяют либо с помощью методов теории упругости, либо экспериментальным путем.

Например, в теории упругости приводится решение для растянутой полосы, ослабленной круглым отверстием, расположенным на оси симметрии. Если ширина пластины  $B$  велика по сравнению с диаметром  $d$ , то в наиболее ослабленном сечении  $K-K$  (рис. 23.7, б) напряжение  $\sigma_z$  определяется по формуле

$$\sigma_z = \frac{\sigma}{2} \left( 2 + \frac{d^2}{4y^2} + \frac{3d^4}{16y^4} \right),$$

где  $\sigma$  — среднее напряжение в сечении, достаточно удаленном от места ослабления;

$y$  — расстояние от центра отверстия до точки, в которой определяется напряжение.

При  $y = r$   $\sigma_{\max} = 3\sigma$ . Таким образом, при  $d/(2B) \rightarrow 0$   $\sigma_{\text{ном}} = \sigma$  и коэффициент концентрации напряжений  $\alpha_{\sigma} = 3$ .

С увеличением  $y$  напряжения быстро убывают, асимптотически приближаясь к напряжениям  $\sigma$ .

В точках  $m$  на вертикальных площадках возникают сжимающие напряжения

$$\sigma_y = -\frac{\sigma}{2} \left( \frac{3d^4}{16z^4} - \frac{d^2}{4z^2} \right).$$

При  $z = d/2$   $\sigma_y = -\sigma$ , при  $z = d$   $\sigma_y = \sigma/32$ . Как видно из эпюры, приведенной на рис. 23.7. б, эти напряжения быстро затухают.

Приведенное точное решение может быть использовано лишь для случая пластинки, ширина которой велика по сравнению с диаметром отверстия  $B = 5d$ . С уменьшением ширины пластинки теоретический коэффициент концентрации напряжений возрастает, а напряжения у наружных краев пластинки (точки  $K, K_1$ ) становятся меньше.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений зависит от формы выточки и от соотношения размеров ослабления и поперечных размеров полосы. Очевидно, что коэффициент  $\alpha$  не может быть меньше единицы. Далее даны значения коэффициента  $\alpha$  для различных значений отношения диаметра отверстия к ширине пластинки:

$d/B$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\alpha$	3,00	3,03	3,14	3,36	3,74	4,32

Как видно, коэффициент  $\alpha$  растет по мере увеличения отношения  $d/B$ .

В практических расчетах концентрация напряжений оценивается введением так называемого *эффективного коэффициента концентрации напряжений*, представляющего собой отношение предела выносливости образца без концентраторов напряжений к пределу выносливости образца тех же размеров, но с концентратором напряжений:

$$K_{\sigma} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1K}; \quad K_{\tau} = \tau_{-1} / \tau_{-1K}. \quad (23.11)$$



В приближенных расчетах при отсутствии экспериментальных данных эффективные коэффициенты вычисляются по формулам:

$$K_{\sigma} = 1 + g(\alpha_{\sigma} - 1); \quad K_{\tau} = 1 + g(\alpha_{\tau} - 1), \quad (23.12)$$

где  $\alpha$  — теоретический коэффициент концентрации напряжений;

$g$  — коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений.

В приближенных расчетах принимают: для литых материалов  $g = 0,1 \dots 0,2$ ; для малоуглеродистых сталей и жаропрочных деформируемых сплавов  $g = 0,2 \dots 0,4$ ; для алюминиевых сплавов  $g = 0,3 \dots 0,5$ ; для легированных сталей  $g = 0,6 \dots 0,8$ ; для титановых сплавов  $g = 0,8 \dots 0,9$ .

Коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений  $g$  зависит главным образом от свойств материала, т.е. от отношения  $\sigma_T/\sigma_B$  и радиуса кривизны  $\rho$  поверхности детали в зоне концентрации напряжений. Графически эта зависимость представлена на рис. 23.8.

Снижение предела выносливости с увеличением размеров детали носит название *масштабного фактора*  $K_d$ . Снижение предела выносливости за счет масштабного фактора учитывается введением масштабного коэффициента

$$K_d = \sigma_{-1d} / \sigma_{-1} \quad \text{или} \quad K_d = \tau_{-1d} / \tau_{-1}, \quad (23.13)$$

который представляет собой отношение предела выносливости детали к пределу выносливости образца диаметром 6—12 мм. При этом считают, что состояние поверхности детали и образца одинаковые.

В качестве причин проявления масштабного фактора можно указать:

1) статистический фактор — большая вероятность появления дефектов и перенапряженных зерен материала в детали большего размера, что приводит к увеличению вероятности разрушения;

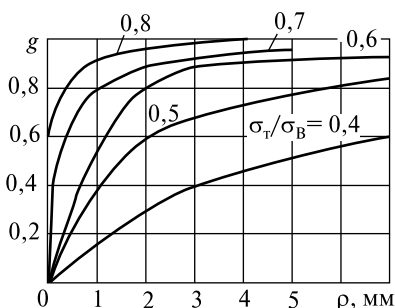


Рис. 23.8. График зависимости коэффициента чувствительности стали от отношения напряжений и радиуса кривизны поверхности детали

2) технологический фактор — влияние способа обработки детали в процессе ее изготовления;

3) производственный фактор — ухудшение качества материала с увеличением объема детали, поковки и т.п.

Предел выносливости детали зависит не только от величины наибольшего местного напряжения  $\sigma_{\max}$ , но и от градиента местных напряжений  $G$ , т.е. от скорости убывания местных напряжений.

$$G = \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_{x=d/2}. \quad (23.14)$$

Чем выше градиент, тем в меньшем объеме материала концентрируются высокие напряжения, тем меньше зерен материала приходится на этот объем и тем меньше вероятность образования здесь усталостной трещины. Поэтому чувствительность материала к концентрации напряжений с увеличением градиента уменьшается. При одном и том же  $\sigma_{\max}$  градиент напряжений падает с увеличением размеров поперечного сечения.

В расчетах используют относительный градиент напряжений

$$\bar{G} = \frac{G}{\sigma_{\max}}, \quad (23.15)$$

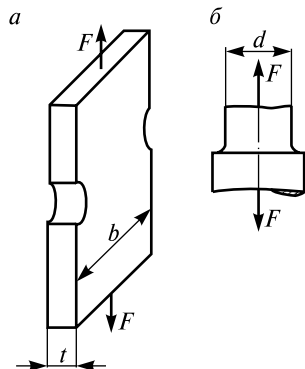


Рис. 23.9. К вопросу о линейной протяженности очага концентрации напряжений: *a* — для прямоугольного образца с надрезом; *б* — для круглого образца с галтелью

увеличение которого снижает чувствительность материала к местным напряжениям.

Линейная протяженность  $L$  очага концентрации оказывает обратное влияние: чем больше  $L$ , тем большее число зерен находится в зоне повышенных напряжений и вероятность усталостного разрушения выше. Для стержня, представленного на рис. 23.9, прямоугольного сечения, имеющего две канавки,  $L = 2t$ ; для вала  $L = \pi d$ . Таким образом, площадь поперечного сечения, охваченная зоной повышенных напряжений, характеризуется величиной  $L/\bar{G}$  (мм<sup>2</sup>).

Для сталей и чугуна концентрация напряжений и масштабный фактор учитывают отношением  $K_\sigma/K_{d\sigma}$  и  $K_\tau/K_{d\tau}$ , которые вычисляют по формулам:

$$\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} = \frac{2\alpha_\sigma}{1 + (88,3\bar{G}_\sigma/L)^{\nu_\sigma}}; \quad \frac{K_\tau}{K_{d\tau}} = \frac{2\alpha_\tau}{1 + (88,3\bar{G}_\tau/L)^{\nu_\tau}}, \quad (23.16)$$

где 88,3 — коэффициент, имеющий размерность мм<sup>2</sup>;

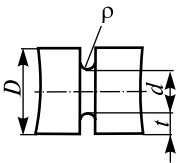
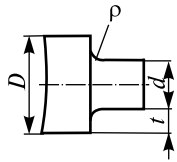
$\nu_\sigma, \nu_\tau$  — коэффициент чувствительности металла к концентрации напряжений и масштабному эффекту.

Для углеродистых сталей  $\nu_\sigma = 0,1 \dots 0,14$ ;  $\nu_\tau = (1,5 \dots 2)\nu_\sigma$ .

Относительные градиенты напряжений  $\bar{G}_\sigma$  и  $\bar{G}_\tau$  для валов с выточкой и галтелью при изгибе и кручении определяются по формулам, приведенным в табл. 23.1.

Таблица 23.1

**Формулы для определения относительных градиентов напряжений для валов с выточкой и галтелью**

Деталь	$D/d$	Вид деформации		
		Изгиб	Кручение	Растяжение (сжатие)
	св 1,5	$\bar{G}_\sigma = \frac{2}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\bar{G}_\tau = \frac{1}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\bar{G}_p = \frac{2}{\rho}$
	до 1,5	$\bar{G}_\sigma = \frac{2(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\bar{G}_\tau = \frac{1}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\bar{G}_p = \frac{2(1+\varphi)}{\rho}$
	св 1,5	$\bar{G}_\sigma = \frac{2,3}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\bar{G}_\tau = \frac{1,15}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\bar{G} = \frac{2,3}{\rho}$
	до 1,5	$\bar{G}_\sigma = \frac{2,3(1+\varphi)}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\bar{G}_\tau = \frac{1,15}{\rho} + \frac{2}{d}$	$\bar{G}_p = \frac{2(1+\varphi)}{\rho}$
$\varphi = \frac{1}{2 + 4\sqrt{t/\rho}}$				

Значения коэффициента концентрации напряжений для вала с выточкой при  $t = \rho$  приведены на рис. 23.10, а на рис. 23.11 даны коэффициенты концентрации напряжений для ступенчатого вала с галтелью.

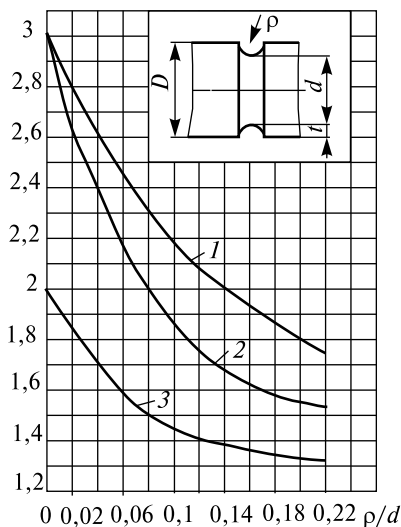
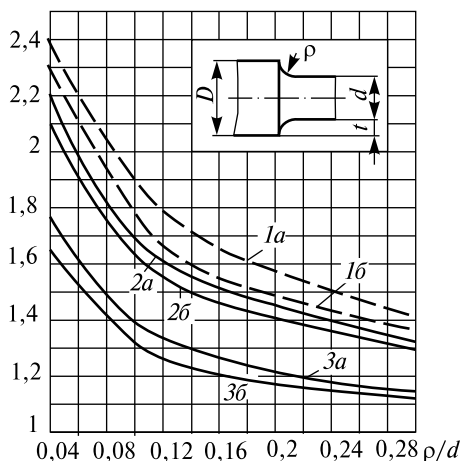


Рис. 23.10. Коэффициент концентрации напряжений для вала с выточкой при  $t = \rho$ :

1 — для растяжения — сжатия; 2 — для изгиба; 3 — для кручения



**Качество поверхности детали.** В большинстве деталей усталостное разрушение начинается с поверхности. Снижение предела выносливости тем больше, чем грубее обработана поверхность детали. Влияние состояния поверхности учитывается *коэффициентом качества поверхности*, который представляет собой отношение предела выносливости образца с полированной поверхностью к пределу выносливости такого же образца с заданным состоянием поверхности:

$$K_{F\sigma} = \sigma_{-1n} / \sigma_{-1} \quad (23.17)$$

Для повышения усталостной прочности детали используются технологические методы упрочнения поверхности, такие как наклеп, закалка и т.д.

Характер влияния состояния поверхности на предел выносливости детали изображен на рис. 23.12, из которого видно, что с увеличением предела

Рис. 23.11. Коэффициенты концентрации напряжений для ступенчатого вала с галтелью: при растяжении—сжатии:

1а — при  $D/d = 1,3$ ; 1б — при  $D/d = 1,2$ ; при изгибе: 2а — при  $D/d = 1,5$ ; 2б — при  $D/d = 1,2$ ; при кручении: 3а — при  $D/d = 1,33$ ; 3б — при  $D/d = 1,2$

прочности предел выносливости уменьшается.

**Внешняя среда.** Усталостная прочность детали зависит от среды, в которой она находится. Коррозионная среда (вода, кислоты, пары и т.д.) резко снижает усталостную прочность. В некоторых случаях снижение предела выносливости достигает 70—80 %. Снижение предела выносливости вследствие коррозии учитывается в расчетах введением коэффициента  $K_k$ , равного отношению предела выносливости  $\sigma_{-1n}$  образца с полированной поверхностью к пределу выносливости  $\sigma_{-1k}$  корродированного образца:

$$K_k = \sigma_{-1n} / \sigma_{-1k}. \quad (23.18)$$

Применение защитных покрытий поверхности, таких как металлизация, цементирование, азотирование и т.д., уменьшает эффект коррозионной среды.

**Температура.** При повышении температуры предел выносливости снижается, а при понижении возрастает. Так, для стали при температуре выше 300 °С предел выносливости уменьшается на 15...20 % на каждые 100 °С повышения температуры. Снижение температуры с 20 °С до –200 °С предел выносливости для тех же сортов стали увеличивается более чем вдвое.

**Поверхностное упрочнение.** Для повышения предела выносливости деталей широко используют технологические методы поверхностного упрочнения: обдувку дробью, обработку роликом, закалку токами высокой частоты, цементацию, цианирование, азотирование и др. Эффект поверхностного упрочнения заключается в создании в поверхностном слое остаточных сжимающих напряжений, благотворно влияющих на усталостную прочность. Тем самым осуществляется перенос очага зарождения усталостного разрушения с поверхности в подповерхностную область. Поверхностное упрочнение учитывается коэффициентом упрочнения

$$K_v = \sigma_{-1упр} / \sigma_{-1}, \quad (23.19)$$

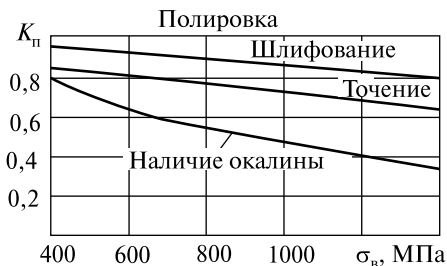


Рис. 23.12. Значения коэффициента качества поверхности в зависимости от предела прочности стали

где  $\sigma_{-1\text{упр}}$  — предел выносливости упрочненного образца;  
 $\sigma_{-1}$  — предел выносливости не упрочненного образца.

Коэффициент упрочнения  $K_v$  для различных методов дан в табл. 23.2.

Таблица 23.2

**Ориентировочные данные для углеродистых и легированных конструкционных сталей, характеризующих эффект поверхностного упрочнения**

Метод упрочнения	Вид обработки	Диаметр образца, мм	
		7...20	30...40
Обдувка дробью	Без концентрации	1,10...1,30	1,10...1,20
	С концентрацией	1,40...2,50	1,10...1,50
Обкатка роликом	Без концентрации	1,20...1,40	1,10...1,25
	С концентрацией	1,50...2,20	1,30...1,80
Цементация на глубину 0,2...0,6 мм	Без концентрации	1,20...2,10	1,10...1,15
	С концентрацией	1,50...2,50	1,20...2,00
Азотирование на глубину 0,1...0,4 мм	Без концентрации	1,15...1,25	1,10...1,15
	С концентрацией	1,90...3,00	1,30...2,00
Закалка токами высокой частоты	Без концентрации	1,30...1,60	1,20...1,50
	С концентрацией	1,60...2,80	1,50...2,50

**Совместное влияние всех факторов.** На основании приведенных данных пределов выносливости деталей при изгибе и кручении с учетом влияния концентрации напряжений, масштабного фактора, качества поверхности и поверхностного упрочнения определяют по формулам:

$$\sigma_{-1\text{д}} = \sigma_{-1} / K_{\text{сд}}; \quad \tau_{-1\text{д}} = \tau_{-1} / K_{\text{сд}}. \quad (23.20)$$

Коэффициенты снижения предела выносливости детали соответственно при изгибе и кручении вычисляют по формулам:

$$K_{\text{сд}} = \left( \frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \frac{1}{K_v}; \quad K_{\text{сд}} = \left( \frac{K_{\tau}}{K_{d\tau}} + \frac{1}{K_{F\tau}} - 1 \right) \frac{1}{K_v}. \quad (23.21)$$

При воздействии коррозии в формулы (12.21) вместо  $K_F$  подставляют  $K_{\text{кор}}$ .

## 23.5. Коэффициент запаса усталостной прочности

Диаграмма предельных амплитуд, рассмотренная в п. 23.3, построена по результатам испытания образцов. При расчете реальной конструкции необходимо учитывать снижение предела выносливости, обусловленное уже перечисленными факторами. Предел выносливости реальной детали меньше предела выносливости образца в  $k$  раз, а сама диаграмма  $\sigma_a - \sigma_m$  примет вид, приведенный на рис. 23.13.

Уравнение прямой  $A'E'$  имеет вид

$$\sigma_a = (1/k)(\sigma_{-1} - \psi\sigma_m).$$

Рассмотрим точку  $D$  на диаграмме, которой соответствуют расчетные значения напряжений  $\sigma_a$ ,  $\sigma_m$  действующие в конструкции, обладающей некоторым запасом прочности. При пропорциональном увеличении амплитуды и среднего значения напряжения цикла прямая  $OD$  пересечет прямую  $A'C'$  в точке  $B$ . Под коэффициентом запаса усталостной прочности понимается отношение отрезков:

$$n_p = OB / OD \text{ или } n_p = OG / OF.$$

Амплитудное значение напряжения, соответствующее точке  $B$ , будет равно

$$\sigma_{aB} = \frac{1}{k}(\sigma_{-1} - \psi\sigma_{mB}). \quad (23.22)$$

Рассматривая треугольники  $ODF$  и  $OBG$ , определим, что

$$\sigma_{aB} = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} \sigma_{mB}. \quad (23.23)$$

Приравняв правые части (23.22) и (23.23), найдем

$$\sigma_{mB} = \frac{\sigma_{-1}}{k\sigma_a + \psi\sigma_m} \sigma_m. \quad (23.24)$$

Тогда коэффициент запаса по усталостной прочности конструкции будет равен

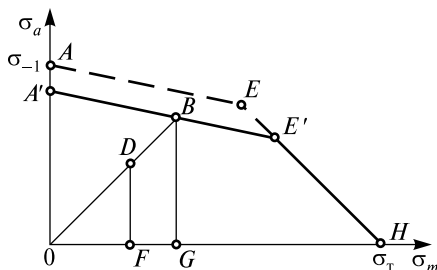


Рис. 23.13. Схематизированная диаграмма предельных амплитуд

$$n_p = \frac{\sigma_{mB}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{-1}}{k\sigma_a + \psi\sigma_m}. \quad (23.25)$$

Из рассмотрения прямой  $CH$  на диаграмме предельных амплитуд найдем условие прочности, в соответствии с которым максимальное напряжение цикла  $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$  не может превышать предел текучести или предел прочности материала.

Коэффициент запаса по пределу текучести

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\sigma_{\max}}. \quad (23.26)$$

При проектировании конструкции сначала производится расчет на прочность по текучести, и только в том случае, когда это условие прочности удовлетворяется, проводят расчет по усталостной прочности.

Изложенный расчет относится к случаю одноосного напряженного состояния. В случае плоского или объемного напряженного состояния вопрос оценки прочности усложняется.

В расчетах при плоском напряженном состоянии, характеризуемом нормальным напряжением  $\sigma$  и касательным напряжением  $\tau$ , используется зависимость

$$1/n^2 = 1/n_\sigma^2 + 1/n_\tau^2. \quad (23.27)$$

Зависимость (23.27) подтверждается опытами. Указанная зависимость может быть получена теоретическим путем, рассматривая третью теорию прочности. Из уравнения (23.27) находят коэффициент запаса конструкции

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (23.28)$$

Полученное значение коэффициента запаса прочности следует сопоставить с допускаемым значением коэффициента запаса прочности, принимаемым из норм или справочных данных.



## Глава 24. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ

### 24.1. Основные сведения и понятия

Стержневая система, которая после включения шарниров во все узлы будет неизменяемой системой, называется *фермой*. На рис. 24.1, *а* изображена ферма, опирающаяся на две опоры, с шарнирными узлами, а на рис. 24.1, *б* точно такая же ферма, но с жесткими соединениями стержней.

На практике встречаются, главным образом, фермы, у которых стержни жестко скреплены в узлах с помощью сварки, заклепок, болтов. В отдельных случаях, например, в железобетонных фермах, узлы изготовляют одновременно с самими элементами и составляют с ними одно целое. Тем не менее в расчетных схемах ферм обычно предполагается наличие идеальных шарниров, лишенных трения. Сами стержни предполагаются строго прямолинейными. Оси всех стержней пересекаются в центре узла. Предполагается также, что нагрузка прикладывается в узлах. При этих условиях стержни фермы работают на растяжение или сжатие.

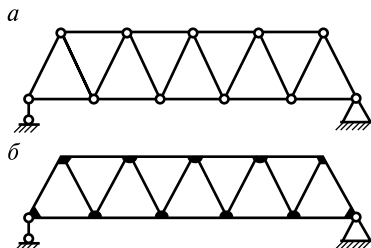
При шарнирном соединении элементов моменты в стержнях равны нулю, однако при жестких узлах возникает незначительный изгиб отдельных элементов, но напряжения от изгиба по сравнению с напряжениями от осевой силы малы, поэтому ими, как правило, пренебрегают.

В силу сказанного за расчетную схему принимается ферма с идеальными шарнирами во всех узлах.

Совокупность стержней, ограничивающих ферму сверху, называется верхним поясом, снизу — нижним поясом. Внутренние стержни образуют решетку, причем вертикальные стержни называются стойками, наклонные — раскосами.

Рис. 24.1. Фрагмент пролетного строения моста:

*а* — плоская ферма с идеальными шарнирами; *б* — плоская ферма с жесткими узлами



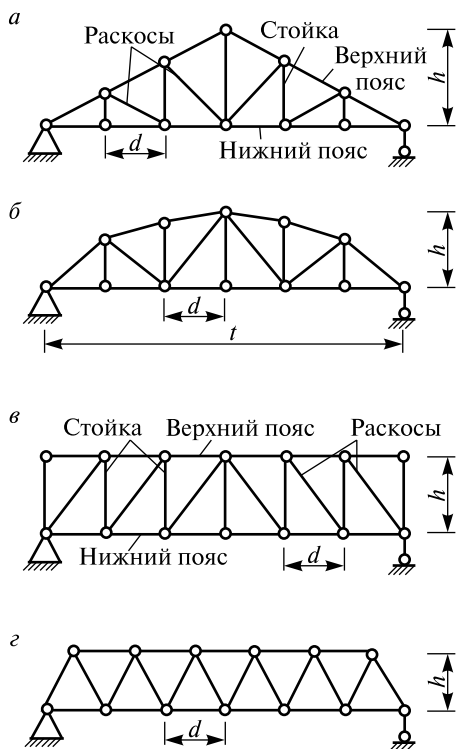


Рис. 24.2. Контуры ферм:  
а — треугольная; б — полигональная;  
в и г — с параллельными поясами

По очертанию контура различают фермы треугольного (рис. 24.2, а) и полигонального очертания (рис. 24.2, б) и фермы с параллельными поясами (рис. 24.2, в и г).

В качестве генеральных размеров ферм принимаются длину пролета  $l$  — расстояние между опорными точками; высоту  $h$  — наибольшее расстояние по вертикали между узлами нижнего и верхнего поясов фермы; длину панели  $d$  — расстояние между узлами верхнего или нижнего поясов (рис. 24.3, а—г).

Практика проектирования показывает, что оптимальные фермы получаются при соотношении генеральных размеров  $h/l = 1/8 \dots 1/10$ . Эти рекомендации относятся, главным образом, к фермам на двух опорах.

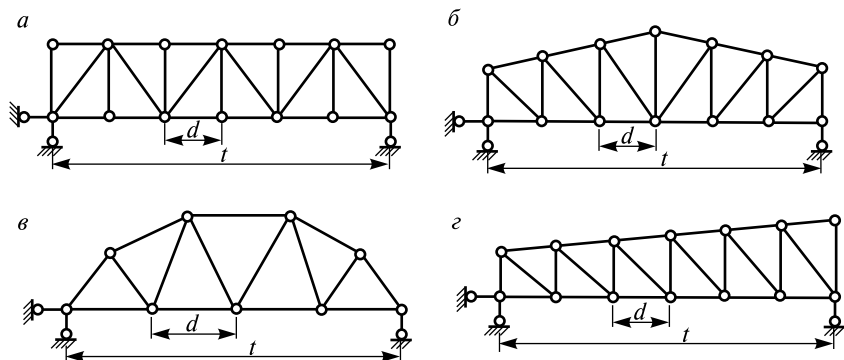


Рис. 24.3. Генеральные размеры ферм (а—г)

## 24.2. Определение усилий в стержнях ферм

Расчет ферм состоит в определении продольных усилий в стержнях, а также перемещений отдельных узлов.

Для нахождения внутренних усилий мысленно разрезают ферму на две части и рассматривают условия равновесия одной из частей, к которой прикладывают внешние силы и неизвестные усилия в разрезанных стержнях. В отдельных случаях усилия определяют вырезанием узлов. Поскольку величины внутренних усилий неизвестны не только по величине, но и по знаку, то предполагаем их положительными и направляем в сторону от узла. В конце расчета выяснится истинное направление внутренних усилий. Знак плюс означает, что выбранное направление будет правильным, поэтому стержень растянут. В противном случае, когда усилие окажется отрицательным, стержень сжат.

При расчете ферм различают следующие способы определения усилий: вырезания узлов и способ сквозных сечений. Последний подразделяют на способ моментной точки и способ проекций в зависимости от того, какое из уравнений равновесия удастся составить.

Пусть потребуется определить усилия в элементах фермы, изображенной на рис. 24.4, *а*. Отбросим мысленно опорные связи и заменим их действие опорными реакциями.

Из уравнения равновесия

$$\sum X = H_A + P_2 = 0 \quad (24.1)$$

найдем горизонтальную опорную реакцию  $H_A$ .

Вертикальные опорные реакции  $R_A$  и  $R_B$  определим из уравнений:

$$\sum M_B = R_A l + P_2 h - P_6 \cdot 5d - P_8 \cdot 3d - P_4 \cdot 2d = 0; \quad (24.2)$$

$$\sum M_A = R_B l + P_2 h + P_6 d + P_8 \cdot 4d + P_4 \cdot 4d = 0, \quad (24.3)$$

после чего найдем усилия в стержнях фермы. Сначала применим способ вырезания узлов. Найдем усилие  $N_{A1}$ . Вырежем узел *A* (рис. 24.4, *б*) и составим для него уравнение равновесия

$$\sum Y = N_{A1} \sin \alpha + R_A = 0, \quad (24.4)$$

откуда  $N_{A1} = R_A / \sin \alpha$ .

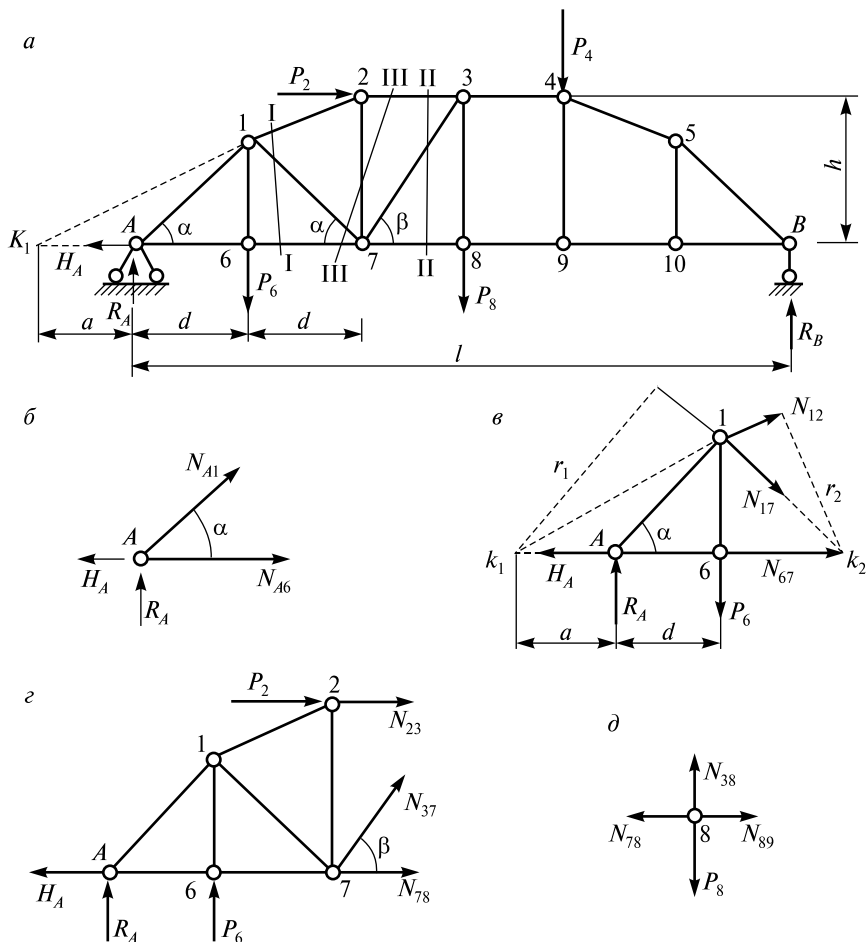


Рис. 24.4. К определению усилий в элементах фермы:  
 а — элементы фермы; б — узел А фермы; в — левая часть фермы по сечению I—I;  
 г — левая часть фермы по сечению II—II; д — вырезанный узел 8

Для определения усилия  $N_{A6}$  составим сумму проекций сил на горизонтальную ось:

$$\sum X = N_{A6} - (R_A / \sin \alpha) \cos \alpha - H_A = 0. \quad (24.5)$$

Из этого уравнения найдем

$$N_{A6} = (R_A / \operatorname{tg} \alpha) + H.$$

Таким образом, оказалось, что наклонный стержень  $A_1$  верхнего пояса сжат, а горизонтальный стержень  $A_6$  нижнего пояса растянут.

Теперь определим усилия  $N_{17}$  и  $N_{12}$ . Проведем сквозное сечение I—I (рис. 24.4, а) так, чтобы оно пересекало не более трех стержней. Отбросим одну часть фермы, например, правую, и заменим ее действие неизвестными усилиями  $N_{12}$ ,  $N_{17}$  и  $N_{67}$  (рис. 24.4, в), предполагая их растягивающими. Для определения одного из неизвестных усилий составим уравнение равновесия так, чтобы в него не вошли два других усилия. Для этого найдем точку пересечения направлений этих двух стержней и примем ее за моментную точку.

При определении усилия  $N_{17}$  моментной точкой служит точка  $k_1$ .

$$\sum M_{k1} = N_{17}r_1 - R_A a + P_6 (a + d) = 0, \quad (24.6)$$

откуда  $N_{17} = [R_A a - P_6 (a + d)]/r_1$ .

Для определения усилия  $N_{12}$  составим сумму моментов относительно точки  $k_2$  и приравняем ее нулю:

$$\sum M_{k2} = N_{12}r_2 + R_A 2a - P_6 d = 0. \quad (24.7)$$

Следовательно,

$$N_{12} = [(-2R_A + P_6)/r_2]d.$$

Подобным образом можно найти и усилие в стержне 6—7, попадающем в сечение I—I. Здесь моментной точкой будет узел 1.

Для нахождения усилия  $N_{37}$  в раскосе 3—7 проведем сквозное сечение II—II и отбросим правую часть фермы (рис. 24.4, з). Два других стержня 2—3 и 7—8 в данном случае параллельны.

Составим уравнение проекций всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, на ось, перпендикулярную параллельным стержням, в данном случае на вертикальную ось:

$$\sum Y = N_{37} \sin \beta + R_A - P_6 = 0, \quad (24.8)$$

из которого получим

$$N_{37} = (R_A - P_6)/\sin \beta.$$

Как видим, раскос испытывает усилие сжатия.

Найдем усилие в стойке. Любое сквозное сечение, проведенное через стойку 3—8, пересечет более трех стержней, и трех уравнений статики будет недостаточно для того, чтобы определить усилия во всех стержнях. Снова применим способ вырезания узла. Вырежем

мысленно узел 8 и действие отброшенных связей заменим силами (рис. 24.4, д). Проектируя все силы на вертикаль, получим

$$\sum Y = N_{38} - P_8 = 0, \quad (24.9)$$

откуда  $N_{38} = P_8$ . Заметим, что если в узле 8 внешняя нагрузка отсутствует, то усилие  $N_{38}$  будет равно нулю.

Найдем теперь усилие  $N_{27}$ . Как и в предыдущем случае, любое сквозное сечение, проведенное через стержень 2—7, будет пересекать более трех стержней (именно 4 стержня). Усилия в двух из этих четырех стержней уже известны. В этом случае можно применить способ вырезания узлов. Рассматривая условия равновесия мысленно вырезанного узла 7, получим

$$\sum Y = N_{27} + N_{17} \sin \alpha + N_{37} \sin \beta = 0, \quad (24.10)$$

откуда найдем  $N_{27}$ , поскольку  $N_{17}$  и  $N_{37}$  определены ранее.

Выше указывалось, что сечение не должно пересекать более трех стержней. Возможно, что среди стержней, пересекаемых сечением, окажутся стержни, усилия в которых уже известны. Тогда сечение можно провести более чем через три стержня. Так, например, проведя сечение III—III (см. рис. 24.4, а), составим уравнение проекций  $\sum Y = 0$ , из которого найдем усилие в стойке  $N_{27}$ , поскольку усилие  $N_{17}$  уже известно.

Используя рассмотренные способы, можно найти усилия в стержнях любой геометрически неизменяемой фермы.

**Пример 24.1.** Определить усилия в стержнях 3—4; 4—9; 9—10; 3—9 фермы, показанной на рис. 24.5. Размеры и нагрузки приведены там же.

*Решение.* Для определения усилий в стержнях фермы сначала надо определить реакции опор. Для этого мысленно отбросим опоры и заменим их действие на ферму реакциями  $R_A$  и  $R_B$ . Рассматриваем ферму, находящуюся в равновесии под действием семи сил и двух неизвестных реакций опор, и определим опорные реакции. Ввиду симметрии фермы и нагрузки реакции опор равны друг другу и каждая равна по величине 6 кН.

После того как реакции опор определены, переходим к определению усилий в стержнях фермы. Разрезаем мысленно ферму по стержням, усилия в которых надо определить, т.е. по стержням: 3—4; 4—9; 9—10 (сечение I—I, рис. 24.5, б), и удаляем правую отсеченную часть фермы, заменив ее действие реакциями стержней  $N_{3-4}$ ;  $N_{4-9}$ ;  $N_{9-10}$ . Предположим, что стержни растянуты. Теперь левая часть фермы (рис. 24.5, б) находится в равновесии под действием опорной реакции  $R_A = 6$  кН; трех сил: 1 кН, 2 кН и 2 кН, а также усилий в стержнях  $N_{3-4}$ ;  $N_{4-9}$ ;  $N_{9-10}$ . Чтобы найти величины этих усилий, необходимо составить уравнения равновесия для левой отсеченной части фермы.

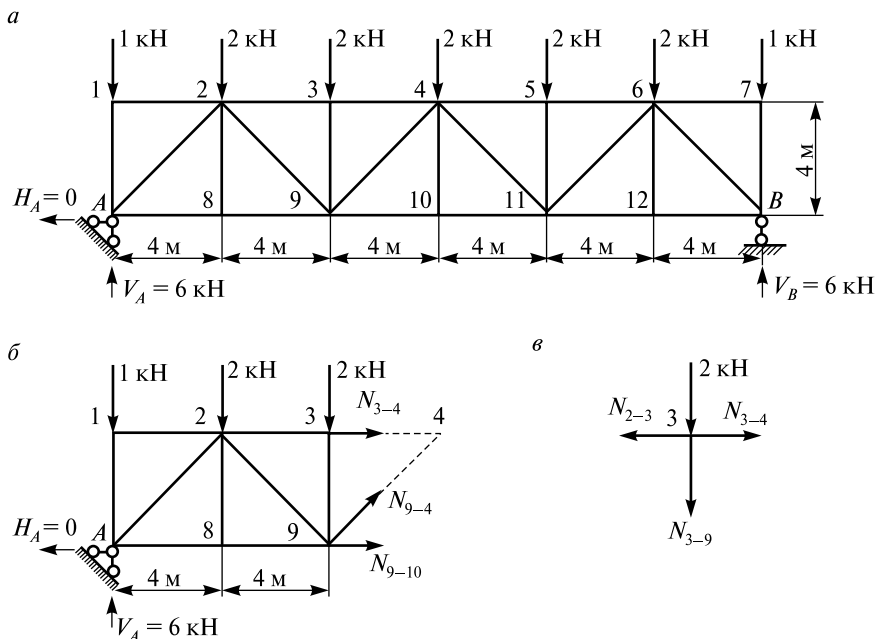


Рис. 24.5: *a* — ферма; *б* — левая часть фермы по сечению I—I; *в* — вырезанный узел 3

Определим усилие в стержне 3—4.

$$\sum M_9 = 0; N_{3-4} \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = 0; \text{ откуда } N_{3-4} = -8 \text{ кН.}$$

Отрицательное значение величины реакции  $N_{3-4}$  свидетельствует о том, что в действительности эта реакция направлена в противоположную сторону принятой, т.е. к узлу 3, следовательно, стержень 3—4 сжат.

Определим усилие в стержне 9—10.

$$\sum M_4 = 0; -N_{9-10} \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 8 - 1 \cdot 12 + 6 \cdot 12 = 0; \text{ откуда } N_{9-10} = 9 \text{ кН.}$$

Стержень 9—10, как и предполагалось, растянут.

Поскольку усилия  $N_{3-4}$  и  $N_{9-10}$  параллельны, не существует точки их пересечения, поэтому для определения усилия  $N_{4-9}$  составим уравнение проекций всех сил на вертикальную ось — ось Y.

$$\begin{aligned} \sum Y = 0; \quad & 6 - 1 - 2 - 2 + N_{4-9} \cdot \cos 45^\circ = 0; \\ \text{откуда } N_{4-9} = & -1 / \cos 45^\circ = -2 / \sqrt{2} \text{ кН.} \end{aligned}$$

Отрицательное значение усилия  $N_{4-9}$  свидетельствует о том, что в действительности стержень 4—9 сжат.

Теперь определим усилие в стержне 3—9 (это стойка). Используем способ вырезания узла. Вырежем мысленно из фермы узел 3 (рис. 24.5, в) и составим уравнение равновесия для этого узла.

$\sum Y = 0$ ;  $-2 - N_{3-9} = 0$ ; откуда  $N_{4-9} = -2$  кН. Стержень 3—9 также сжат.

### 24.3. Понятия о шпренгельных фермах

В фермах больших пролетов расстояния (панели) между узлами достигают значительных размеров. Продольные балки, которые передают нагрузку на поперечные балки и затем — в узлы фермы, вследствие большой длины получаются массивными (рис. 24.6, б),

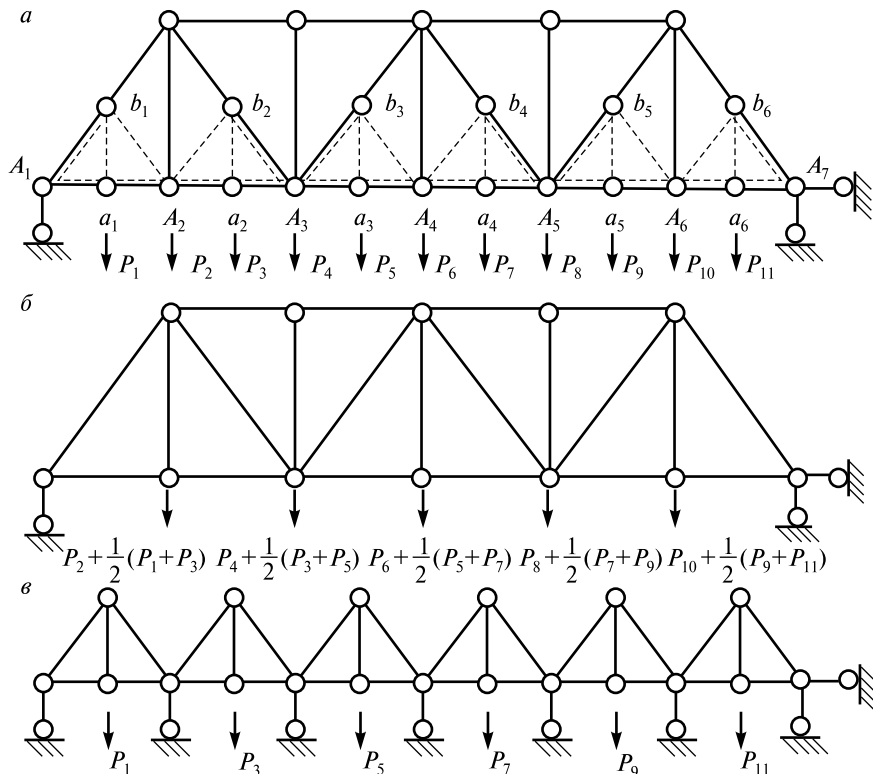


Рис. 24.6. Шпренгельная ферма (а); основные узлы фермы (б); дополнительные элементы (в)



что экономически невыгодно. В таких случаях с целью уменьшения пролета продольных балок в середине каждой панели фермы ставятся дополнительные элементы, как показано пунктиром на рис. 24.6, а.

Кроме основных узлов, обозначенных буквой  $A$ , образуются дополнительные узлы  $a$ , к которым прикрепляются дополнительные поперечные балки, а элементы  $ab$ , поддерживающие поперечные балки в узлах  $a$ , передают нагрузку на раскосы. Для того чтобы раскосы не изгибались, между узлами  $b$  и  $A$  введены дополнительные элементы-фермочки, изображенные на рис. 24.6, в. Эти фермочки называются шпренгелями, а сама ферма, показанная на рис. 24.6, а, называется *шпренгельной* фермой. Усилия в каждом шпренгеле возникают только тогда, когда нагрузка расположена в пределах данного шпренгеля. В стержнях основной фермы, к которым примыкают шпренгели, например  $A_1b_1$ ,  $A_2b_2$ ,  $A_3b_3$ , усилия определяют как найденные в основной ферме и в шпренгеле. Точно так же суммируются усилия в элементах нижнего пояса фермы.

---

## Раздел 3

### ДЕТАЛИ МАШИН

Детали машин является заключительным разделом курса «Механика материалов и конструкций железнодорожного транспорта», он дает учащимся основы расчета на прочность и жесткость деталей машин общего назначения, учит выбирать материал и дает правила конструирования с учетом технологии изготовления и эксплуатации. Знания курса закрепляются курсовым проектом.

## Глава 25. ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ДЕТАЛЯМ И УЗЛАМ МАШИН НА СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ИЗГОТОВЛЕНИЯ

### 25.1. Сведения о механизмах и машинах

Машины, механизмы, приспособления, инструменты и другие изделия основного и вспомогательного производства железнодорожных предприятий изготавливают из деталей. *Деталью* принято называть элемент конструкции, изготовленный из материалов одной марки без применения сборочных операций.

Совокупность деталей, соединенных на предприятии-изготовителе сборочными операциями и предназначенных для совместной работы, называется *сборочной единицей (узлом)*. Характерными примерами узлов являются подшипник, узел опоры, редуктор и т.п.

*Механизмом* называют совокупность взаимосвязанных звеньев, допускающую их относительное движение и предназначенную для преобразования движения одного или нескольких звеньев в требуемые движения остальных звеньев.

*Звено механизма* — это одна или несколько жестко соединенных деталей. Различают входные и выходные звенья механизма. *Входное звено* — это звено, которому сообщается движение, преобразуемое механизмом в требуемые движения других звеньев. *Выходное звено* — это звено, совершающее движение, для выполнения которо-

го предназначен механизм. В каждой паре совместно работающих звеньев различают *ведущие* и *ведомые* звенья.

Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающих относительное движение, называют *кинематической парой*. По функциональному признаку кинематические пары могут быть вращательными, поступательными, винтовыми и т.д.

Анализируя конструкции различных машин, их узлов и деталей, нетрудно заметить, что многие типы деталей и узлов встречаются почти во всех машинах с одними и теми же функциональными назначениями. Например, болты, валы, механические передачи и др.

Все другие детали (узлы), применяющиеся только в одном или нескольких типах машин (коленчатые валы, поршни, шатуны, канаты и т.п.), относятся к деталям специального *назначения* и изучаются в соответствующих специальных курсах.

Все детали и узлы общего назначения делят на три основные группы: соединительные детали и соединения (сварные, резьбовые, шпоночные и др.); передачи вращательного движения (ременные, зубчатые, червячные и др.); детали и узлы, обслуживающие передачи (валы, подшипники, муфты и др.).

*Машина* — это устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов, движения или для накопления и переработки информации с целью повышения производительности, замены или облегчения физического и умственного труда человека.

Машины делят на две большие группы: *машины-двигатели* и *рабочие машины*. Машины-двигатели — это машины, предназначенные для преобразования энергии любого вида в энергию движения исполнительных органов рабочих машин. К таким машинам относят электродвигатели, двигатели внутреннего сгорания, паровые машины и т.д.

Рабочие машины предназначены для облегчения и замены физического труда человека по изменению формы, состояния, размера, свойств обрабатываемых материалов или для перемещения различных грузов, а также для облегчения и замены его логической деятельности при выполнении расчетных операций и операций контроля. К таким машинам относят станки для обработки материалов, дорожные, транспортные и железнодорожные машины и агрегаты, подъемные краны, транспортеры, вычислительные ма-

шины, устройства робототехники: манипуляторы, автооператоры, промышленные роботы и др.

В зависимости от способа управления движением машин различают: *машины ручного управления, полуавтоматического и автоматического действия.*

К машинам с ручным управлением относятся те их разновидности, в которых оператор находится на соответствующем встроенном в машину рабочем месте (электровоз, тепловоз, автомобиль, трактор и т.п.) или в непосредственной близости от машины (токарный станок и т.п.).

В машинах полуавтоматического действия часть операций имеет ручное управление, а часть — автоматическое.

В машинах автоматического действия все операции осуществляются по заданной программе (без непосредственного участия человека) с помощью специальных устройств или электронных машин. В качестве примера таких машин укажем на металлорежущие станки с программным управлением, а также промышленные роботы.

## **25.2. Основные требования, предъявляемые к машинам**

Машина должна быть проста в обслуживании и не требовать частого и сложного ремонта. Удобство обслуживания существенно влияет на надежность машин, производительность и качество труда. Неудобное расположение органов управления, шум и вибрация, плохая освещенность, сложность управления приводят к быстрой утомляемости оператора с возможными аварийными ситуациями. Поэтому она должна удовлетворять основным требованиям: работоспособности; надежности; технологичности; экономичности; эстетичности.

*Работоспособностью* называют состояние деталей, при котором они способны выполнять заданные функции с параметрами, установленные нормативно-технической документацией.

Под *надежностью* понимают свойство изделия выполнять функции, сохраняя свои эксплуатационные показатели в заданных пределах в течение заданного промежутка времени или требуемой наработки. Для стационарных двигателей наработка выражается в часах, для локомотива — в километрах пробега, для трактора — в гектарах обработанной земли и т.п. Надежность можно определить для машины в целом или для отдельных ее узлов и деталей.

В результате неисправностей машин и их деталей возникают нарушения эксплуатационных показателей, вызывающие частичную или полную потерю их работоспособности. Событие, связанное с нарушением работоспособности машины (детали), называется *отказом* (как правило, невосстанавливаемым). Расчет надежности базируется на статистических данных об отказах машины (детали) при эксплуатации, проведении специальных испытаний и т.п.

Основным показателем надежности является вероятность безотказной работы  $P_{(t)}$  (или коэффициент надежности), т.е. вероятность того, что в заданном интервале времени или в пределах заданной наработки отказ машины (детали) не возникает. Вероятность безотказной работы машины (детали) до момента времени или конца наработки определяют по формуле

$$P_{(t)} = 1 - N_{(t)}/N, \quad (25.1)$$

где  $N_{(t)}$  — число машин (деталей), отказавших к моменту времени или концу наработки  $t$ ;

$N$  — число машин (деталей), подвергнутых испытанию.

Так, например, если  $N = 500$  и  $N_{(t)} = 50$ , то надежность безотказной работы  $P_{(t)} = 1 - 50/500 = 0,9$ .

Коэффициент надежности машины в целом равен произведению коэффициентов надежности составляющих элементов, входящих в состав машины:

$$P_{(t)} = P_{1(t)} \cdot P_{2(t)} \cdot P_{3(t)} \cdots P_{2n(t)}. \quad (25.2)$$

Из формулы (25.2) следует, что надежность машины всегда меньше надежности самого ненадежного элемента и падает с увеличением числа элементов. Так, при числе элементов  $n = 10$  и одинаковой вероятности безотказной работы, равной 0,97, имеем  $P_{(t)} = 0,97^{10} = 0,74$ . В технике есть высоконадежные устройства, например в высокоскоростном железнодорожном транспорте и др. Однако получить коэффициент надежности  $P_{(t)} = 1$  невозможно.

Интенсивность отказов  $\lambda$  — это число отказов, приходящихся на единицу времени. Например, при испытании 1000 деталей в течение 100 ч каждой, из них 10 деталей отказало. Находим  $\lambda = 10/(1000 \cdot 100) = 10^{-4}$  1/ч. Это значит, что в час отказывает 0,01 % деталей. С уменьшением  $\lambda$  увеличивается время эксплуатации деталей при достаточной надежности.

Надежность является одним из основных показателей качества машины. По надежности машины можно судить о качестве проектно-конструкторских работ, производства и эксплуатации.

Работоспособность и надежность деталей машин оцениваются определенными условиями и показателями (*критериями*). Важнейшими из них являются прочность, жесткость, устойчивость, износостойкость, теплостойкость, виброустойчивость и др.

*Технологичными* называют детали и узлы, требующие минимальных затрат средств, времени и труда в производстве, эксплуатации и ремонте. Технологичность деталей обеспечивается:

- очерчиванием их простейшими поверхностями (цилиндрическими, коническими и др.), удобными для обработки механическими и физическими методами;
- применением материалов, пригодных для безотходной обработки (литьем, прессованием, давлением и т.п.) и использованием ресурсосберегающих технологий;
- системой допусков и посадок и другими средствами и методами.

Детали и узлы машин должны быть конструктивно гибкими, т.е. приспособленными к гибкому автоматизированному производству (ГАП). Для этого их конструкции должны характеризоваться также высокой преемственностью и высоким уровнем стандартизации и унификации конструкционных элементов, материалов, расчетов и технологий, возможностью «сращивания» систем автоматизированного проектирования и производства и др.

*Экономичность* деталей и узлов достигается оптимизацией их формы и размеров из условия минимума материалоемкости, энергоемкости и трудоемкости производства, за счет максимального коэффициента полезного действия в эксплуатации при высокой надежности; высокой специализацией производства и т.д.

*Эстетичность*. Совершенство и красота внешних форм деталей, узлов и машины в целом существенно влияют на отношение к ней со стороны обслуживающего персонала. Красивый внешний вид деталям, узлам и машине в целом придают форма и внешняя отделка конструкции (декоративная полировка, окраска, нанесение гальванических покрытий и т.д.).

Установление обязательных норм, которым должны соответствовать типы, параметры, качественные характеристики изделий, называется *стандартизацией*.

Стандартизация имеет важное общегосударственное значение для обеспечения выпуска продукции требуемого качества и является основным и активным средством внедрения достижений в производство. Важнейшей предпосылкой стандартизации является широкое применение предпочтительных чисел. ГОСТ 6636-69 устанавливает линейные размеры (диаметры, длины, высоты и др.), которым отдается предпочтение.

#### Параметры нормальных линейных размеров

10	19***	36*	67**	125***
10,5**	20*	38**	71**	130***
11**	21***	40	75**	140**
11,5***	22**	42***	80*	150***
12*	24***	45**	85***	160
13***	25	48***	90**	170***
14**	26***	50*	95***	180***
15***	28**	53***	100	190**
16	30***	56***	105***	200*
17***	32*	60***	110**	
18***	34***	63	120***	

*Примечание.* Числа без звездочек следует предпочитать числам с одной звездочкой; числа с одной звездочкой — числам с двумя звездочками; числа с двумя звездочками — числам с тремя звездочками.

### 25.3. Методы оценки прочностной надежности деталей машин

*Прочность* — это способность детали сопротивляться разрушению. Она оценивается несколькими способами:

- а) с помощью допускаемых напряжений;
- б) запасами прочности;
- в) статистическими запасами прочности.

В курсе деталей машин наибольшее распространение получил *метод расчета по допускаемым напряжениям*, согласно которому наибольшее напряжение  $\sigma_{\max}$  в некоторой точке нагруженной детали не должно превышать определенную величину, свойственную данному материалу и типу детали.

Условие прочности детали по допускаемому напряжению имеет вид

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad (25.3)$$

где  $[\sigma]$  — допускаемое напряжение.

Однако такой оценке прочности присущи и недостатки:

- величина допускаемого напряжения носит условный характер, так как не отражает характера предполагаемого разрушения, а также режима нагружения и иных факторов, влияющих на надежность;

- допускаемое напряжение, особенно при переменной нагрузке, зависит от геометрии детали, материала, технологии изготовления, что затрудняет его использование в качестве нормативной характеристики;

- величина  $[\sigma]$  не дает представления о надежности детали в явном виде, так как в формуле (25.3) не показано соотношение действующих и предельных напряжений для материала детали (предела текучести  $\sigma_T$ , предела прочности  $\sigma_B$ , предела выносливости и т.д.).

В инженерных расчетах допускаемые напряжения используют, в основном, для предварительных расчетов, связанных с приближенным определением основных размеров деталей.

Широкое распространение получил также *расчет по запасам прочности*. Условие прочности имеет вид

$$n = \sigma_{\text{пред}} / \sigma_{\max}, \quad (25.4)$$

где  $n$  — запас прочности;

$\sigma_{\text{пред}}$  — предельное напряжение (предел прочности при постоянных нагрузках, предел выносливости при переменных нагрузках), полученное экспериментально или взятое из справочника;

$\sigma_{\max}$  — максимальное напряжение в опасной точке детали, вычисленное при наибольшей нагрузке.

Величина  $\sigma_{\text{пред}}$  отражает геометрию детали, технологию ее изготовления и условия нагружения, поэтому величина необходимого запаса прочности имеет стабильное значение.

Условие прочности по допускаемым напряжениям и запасам прочности связано соотношением

$$[\sigma] = \sigma_{\text{пред}} / n. \quad (25.5)$$

При действии статических нагрузок иногда используют запас прочности по несущей способности

$$n = F_{\text{разр}} / F. \quad (25.6)$$



Он показывает отношение нагрузок в момент разрушения и в рабочих условиях.

В представленных методах оценки прочности носят детерминированный характер и не учитывают неизбежное рассеяние разрушающих и максимальных напряжений.

*Статистические запасы прочности* являются более обоснованными характеристиками прочностной надежности, в особенности — для отказов конструкций с тяжелыми последствиями. Они, как и обычные запасы прочности, имеют условное значение. Их используют как критерии сравнения надежности вновь создаваемых изделий с изделиями, удовлетворительно эксплуатируемыми.

Основное преимущество статистических запасов прочности перед обычными запасами состоит в том, что сопоставление производится к одинаковым условиям по рассеянию значений  $\sigma_{\text{разр}}$  и  $\sigma_{\text{max}}$ .

## **25.4. Требования, предъявляемые к деталям машин на стадии конструирования**

Детали, узлы, машины изготавливают по чертежам, выполненным на основе проектов. Для особо ответственных конструкций проект дополняют макетом или действующей моделью.

Стадии разработки конструкторской документации и этапы работ установлены ГОСТ 2.103-08.

Первая стадия — *разработка технического задания* — документа, содержащего наименование, основное назначение, технические требования, показатели качества, экономические показатели и специальные требования заказчика к изделию.

Техническое задание разрабатывают на основе требований заказчика с учетом достижений и технического уровня отечественных и зарубежных конструкций, патентного поиска, а также результатов научно-исследовательских работ и научного прогноза.

Вторая стадия — *разработка технического предложения* в виде совокупности конструкторских документов, обосновывающих техническую и технико-экономическую целесообразность разработки изделия на основе предложений в техническом задании, рассмотрения вариантов возможных решений с учетом достижений науки и техники в стране и за рубежом, патентных материалов, возможностей машиностроительных заводов отрасли и смежных отраслей.

Техническое предложение утверждается заказчиком и генеральным подрядчиком.

Третья стадия — *разработка эскизного проекта* в виде совокупности конструкторских документов, содержащих принципиальные конструкторские решения и разработки общих видов чертежей, дающих представление об устройстве разрабатываемого изделия, принципе его действия, габаритах и основных параметрах. В эскизный проект входит пояснительная записка с необходимыми расчетами.

Четвертая стадия — *разработка технического проекта* в виде совокупности конструкторских документов, содержащих окончательное решение и дающих полное представление об устройстве изделия. Чертежи проекта состоят из общих видов и сборочных чертежей узлов, полученных с учетом достижений науки и техники на уровне работы узлов. На этой стадии рассматриваются вопросы надежности узлов, соответствие требованиям техники безопасности, условиям хранения и транспортирования и т.д.

Пятая стадия — *разработка рабочей документации* в виде совокупности документов, содержащих чертежи общих видов, узлов и деталей, оформленных так, чтобы по ним можно было изготавливать изделия и контролировать их производство и эксплуатацию. На этой стадии разрабатываются конструкции деталей, оптимальные по показателям надежности, технологичности и экономичности.

## **25.5. Материалы, используемые в транспортном машиностроении**

Выбор материала деталей машин железнодорожного транспорта определяется соображениями конструктивными (обеспечение надежности), технологическими (единичное, серийное, массовое производство), экономическими параметрами и является ответственным этапом проектирования.

Для изготовления деталей машин железнодорожного транспорта широко применяют стали и чугуны, а также алюминиевые, магниевые, титановые и медные сплавы.

Сталями называют железоуглеродистые сплавы с содержанием углерода до 2 %. По сравнению с другими материалами стали имеют высокую прочность, пластичность, хорошо обрабатываются.

Сталь углеродистая марок Ст0—Ст6 применяют для термически необработанных деталей и крепежа, а также неотчетственных деталей, работающих при малых нагрузках. В обозначении Ст — сталь, цифры от 0 до 6 — условный номер марки в зависимости от химического состава и механических свойств.

Сталь углеродистая качественная конструкционная марок 10, 20, 30, 45 и др. получила широкое распространение в транспортном машиностроении. Ее применяют для деталей машин, подвергаемых термообработке. В обозначении марок двузначное число показывает среднее содержание углерода в сотых долях процента. В зависимости от содержания углерода стали подразделяются на низкоуглеродистые ( $C \leq 0,25 \%$ ), среднеуглеродистые ( $C = 0,25...0,6 \%$ ) и высокоуглеродистые ( $C > 0,6 \%$ ).

*Сталь легированная конструкционная.* Ее применяют для особо ответственных деталей машин, где наряду с высокой прочностью требуется компактность или небольшая масса. В зависимости от химического состава и свойств сталь делится на категории: качественная, высококачественная и особо высококачественная. Например, хромомарганцевокремниевая сталь имеет обозначения 30ХГС, 30ХГСА, 30ХГСА-III. Здесь первые две цифры означают среднее содержание углерода в сотых долях процента, буквы за цифрами — обозначение легирующего элемента (Х — хром, Г — марганец, С — кремний). Отсутствие цифры после букв означает, что в марке стали содержится в среднем 1,0 % этого легирующего элемента. Наличие цифр после буквы указывает примерное содержание легирующего элемента в целых единицах.

Для повышения свойств сталей применяют термическую и химико-термическую обработки, механическое упрочнение и др.

*Термическая обработка* состоит из трех последовательных стадий: нагрев до требуемой температуры с определенной скоростью, выдержка при этой температуре в течение требуемого времени и охлаждение с заданной скоростью.

Наиболее распространены четыре процесса термической обработки: отжиг, нормализация, закалка и отпуск.

*Отжиг*, характеризуемый медленным охлаждением (вместе с печью или на воздухе) после нагрева и выдержки при некоторой температуре деталей и заготовок. Его проводят для снижения твердости и улучшения обрабатываемости резанием отливок, прока-

та и поковок из углеродистых легированных сталей, а также для снятия остаточных напряжений в конструкциях после сварки или предварительной (черновой) обработки резанием. Для углеродистых и углеродистых легированных сталей проводят полный отжиг — нагрев до температуры, превышающей на 30—50 °С температуру превращения объемно-центрированной решетки железа в гранецентрированную кубическую решетку (обычно 800—900 °С), выдержку при этой температуре, медленное охлаждение до 400—600 °С вместе с печью и далее на воздухе. Для низкоуглеродистых высоколегированных сталей 12Х2Н4А, 20Х2Н4А и др., используемых для изготовления зубчатых колес, применяют низкотемпературный (высокий) отжиг при температуре 650—670 °С и медленное охлаждение (чаще всего на воздухе). Используют и другие виды отжига, которые отличаются от высокого отжига температурой нагрева и скоростью охлаждения.

Нормализация отличается от полного отжига характером охлаждения, которое после выдержки производят на воздухе. Ее применяют для получения однородной структуры с более высокой твердостью и прочностью, чем после отжига, для исправления структуры сварных швов, выравнивания структурной неоднородности поковок и отливок, а также для улучшения обрабатываемости резанием сталей.

*Закалка* отличается от полного отжига и нормализации высокой скоростью охлаждения заготовок или деталей после нагрева до температуры превращения и выдержки при этой температуре. Высокая скорость охлаждения достигается в результате использования воды, масла, водных растворов солей NaOH, NaCl и др. в качестве охлаждающей среды. В итоге металл приобретает мелкозернистую однородную структуру с высокой твердостью, прочностью, износостойкостью, коррозионной стойкостью, но пониженной пластичностью и более трудной обрабатываемостью резанием.

Закалку широко используют для обработки отливок, поковок, штамповок и обработанных деталей из средне- и высокоуглеродистых и легированных сталей для получения высоких эксплуатационных характеристик.

Существует ряд разновидностей объемной закалки, отличающихся условиями и характером быстрого охлаждения.

Широко применяют поверхностную закалку — нагрев с большой скоростью поверхностного слоя стальной детали (токами высокой

частоты, электронным лучом и др.) выше температуры превращений и последующее быстрое охлаждение с получением мелкозернистой структуры в поверхностном слое определенной толщины. При поверхностной закалке коробление деталей меньше, чем при объемной.

Поверхностной закалке подвергают детали машин (зубья колес, кулачки, валы и др.), изготовленные из углеродистых и низколегированных сталей марок 40, 45, 50, 40X, 40ХН, 45X и др.

Высокая твердость и прочность поверхностных слоев деталей после поверхностной закалки обеспечивают им высокую износостойкость и контактную прочность.

*Отпуск* — нагрев до температуры ниже интервала превращений, выдержка и последующее охлаждение для повышения вязких свойств, уменьшения термических остаточных напряжений и улучшения обрабатываемости резанием. Обычно применяют после закалки стальных отливок, поковок, проката и механически обработанных деталей.

В зависимости от температуры нагрева различают высокий отпуск (температура нагрева 500—670 °С), средний отпуск (250—450 °С) и низкий отпуск (140—230 °С). С увеличением температуры нагрева повышается пластичность стали после отпуска.

*Химико-термическая обработка.* При химико-термической обработке изменяется химический состав поверхностных слоев деталей, что позволяет получить мелкозернистую структуру, высокую твердость, прочность и износостойкость деталей. Существует ряд способов такой обработки: цементация — насыщение поверхностных слоев стали углеродом; азотирование — насыщение азотом; цианирование — одновременное насыщение углеродом и азотом; борирование — насыщение бором и др. Глубина насыщения невелика, обычно 0,2...1 мм.

Цементации подвергают детали из низкоуглеродистых легированных сталей 15, 20X, 12X2H4A, 12ХН3А, 18X2H4MA и др. Для изготовления азотируемых деталей обычно используют стали 38X2MЮА, 38X2Ю и др., а для цианируемых деталей — стали марок 15, 20, 45, 35X, 40X и др.

*Чугуны.* Чугунами называют железоуглеродистые сплавы с содержанием углерода свыше двух процентов. Чугуны имеют высокие литейные и невысокие пластические свойства в сравнении со сталями.

В зависимости от структуры чугуны подразделяют на белые, ковкие и серые.

*Белый чугун*, обладающий высокой твердостью и хрупкостью, обрабатывают резанием твердосплавным инструментом.

Основные области применения:

— детали, работающие на износ (используют для изготовления тормозных колодок, дробилок, и других деталей, взаимодействующих с абразивом);

— детали, подверженные действию пламени и нагреву до высоких температур (колосники и т.д.);

— детали, подверженные химическим воздействиям (котлы, реторты и т.д.).

*Ковкий чугун* применяют для деталей, требующих по своей форме литой заготовки, но допускающих хотя бы случайную ударную нагрузку. Название «ковкий чугун» условное. Он имеет высокую прочность ( $\sigma = 300...630$  МПа), обозначается буквами КЧ.

*Серый чугун* является основным литейным материалом в транспортном машиностроении. Его используют для изготовления деталей сложной конфигурации при отсутствии жестких требований к габаритам и массе (зубчатые колеса, валы, детали корпусов, шкивы ременных передач и т.д.). Имеет высокие литейные свойства, среднюю прочность ( $\sigma \leq 400$  МПа), удовлетворительную износостойкость, высокую демпфирующую способность, хорошо обрабатывается резанием.

Серый чугун обозначается буквами СЧ и двухзначной цифрой, показывающей деленные приблизительно на 10 значений предела прочности при растяжении в мегапаскалях (например, СЧ15 означает серый чугун с пределом прочности при растяжении 150 МПа).

Наибольшее применение имеют чугуны СЧ15 и СЧ20, используемые для получения отливок средней прочности, их массовая плотность  $\rho = 7$  г/см<sup>3</sup>.

*Медные сплавы* разделяют на латуни и бронзы.

*Латуни* подразделяют, в свою очередь, на двойные (сплавы меди и цинка) и многокомпонентные (содержат дополнительно свинец, кремний, марганец и др.).

Латуни имеют хорошие технологические свойства (обрабатываются давлением, резанием, литьем), достаточную прочность ( $\sigma_B = 250...350$  МПа), хорошее сопротивление коррозии. Стоимость латуни в 5 раз и более превышает стоимость качественной стали.

Латунь в своем обозначении содержит букву Л, например, Л59, Л62, Л90 и др.

В транспортном машиностроении основное применение имеют сложные латуни ЛКС80-3-3, ЛМцС58-2-2 и др., используемые в узлах трения, а также для изготовления арматуры и т.д.

*Бронзы*, кроме основы — меди, содержат компоненты, определяющие их наименование. Различают бронзы оловянистые, свинцовистые, алюминиевые, бериллиевые и др.

Бронзы имеют высокие антифрикционные свойства, коррозионную стойкость и технологические свойства (имеются в виду литейные бронзы и бронзы, обрабатываемые давлением — алюминиевые, бериллиевые, кремнистые и др.).

Являясь важнейшим и дорогостоящим (примерно в 10 раз дороже стали) антифрикционным материалом, бронзы находят широкое применение в подшипниках скольжения, в червячных и винтовых колесах и др. Бронзы обозначают буквами Бр. Буквы, кроме того, показывают наличие основных компонентов, кроме меди (А — алюминий, Б — бериллий, Ж — железо, К — кремний, О — олово, Ц — цинк, Ф — фосфор и др.), и цифрами, показывающими среднее содержание в процентах соответствующих компонентов. Например, БрАЖ9-4 — это обозначение марки бронзы со средним содержанием алюминия 9 % и железа 4 %.

*Баббиты* — сплавы на основе олова, свинца и кальция являются высококачественными хорошо прирабатывающимися антифрикционными подшипниковыми материалами. Их обозначают буквой Б и цифрой, выражающей содержание в процентах олова, или буквой, показывающей дополнительный компонент (Н — никель, К — кальций, С — сурьма, Т — теллур).

Очень высокая стоимость баббитов (в 20 раз и более превышающая стоимость качественной стали) ограничивает области их использования.

*Легкие сплавы* — сплавы на основе алюминия и магния.

*Алюминиевые сплавы* (АЛ) имеют плотность  $\rho = 2,6...2,9 \text{ г/см}^3$  (почти в 3 раза меньшую, чем стали) и удельную прочность, приблизительно равную удельной прочности стали.

Основными литейными сплавами являются сплавы с кремнием — силумины (АЛ2, АЛ4, АЛ5, АЛ9 и др.), имеющие  $\sigma_B = 170...250 \text{ МПа}$ . Обладая высокими литейными свойствами и хо-

рошей обрабатываемостью резанием, они широко применяются для изготовления сложных деталей корпусов машин.

Деформируемые сплавы марок АМц, АМг и др. (термически неупрочняемые), а также термически упрочняемые сплавы алюминия с медью и магнием (дуралюмины Д1, Д16 и др.) имеют  $\sigma_B = 350...430$  МПа и используются для изготовления обработкой давлением и резанием корпусов, трубопроводов, заклепок, сепараторов подшипников и других деталей машин (в особенности транспортных).

*Магниеые сплавы.* Основное применение благодаря малой плотности ( $\rho = 1,8$  г/см<sup>3</sup>) и высоким литейным свойствам имеют литейные сплавы МЛ (МЛ3, МЛ4, МЛ5 и др.), которые после термообработки дают  $\sigma_B = 200...230$  МПа,  $\sigma_T = 150...180$  МПа.

Их применяют для изготовления деталей корпусов агрегатов.

*Титановые сплавы.* Сплавы титана с алюминием и медью и другими присадками (ВТ3-1, ВТ5, ВТ9, ВТ16, ВТ22 и др.) имеют после термообработки высокую прочность ( $\sigma_B = 900...1300$  МПа) и малую плотность ( $\rho = 4,5$  г/см<sup>3</sup>), высокую коррозионную стойкость. Их используют для изготовления корпусов, трубопроводов, крепежных деталей, заклепок и других деталей изделий транспорта, космической техники, судостроения, химической и пищевой промышленности.

*Пластмассы.* Это дешевый и легкий конструкционный материал, способный заменить черные и цветные металлы. Пластмассы — это материалы на основе высокомолекулярных смол, являющихся связующими. Они имеют 40—70 % компонентов (наполнителя) в виде волокон (текстильных, стеклянных, асбестовых), ткани, бумаги и др. Благодаря малой плотности ( $\rho = 1,1...2,3$  г/см<sup>3</sup>), высокой коррозионной стойкости и сравнительно высокой прочности ( $\sigma_B = 60...300$  МПа) пластмассы применяют для изготовления корпусов, гаек, шайб, винтов и т.д. Замена металла пластмассами значительно снижает трудоемкость и себестоимость изделий.

При замене черных металлов пластмассами трудоемкость изготовления деталей уменьшается в среднем в 5...6 раз, а себестоимость — в 2...6 раз.

При замене пластмассами цветных металлов себестоимость снижается в 4...10 раз.

Пластмассы — это весьма перспективный конструкционный материал, область применения которого практически не ограничена.



К числу наиболее распространенных материалов относятся:

а) термореактивные слоистые пластмассы — текстолит (наполнитель — хлопчатобумажная ткань), гетинакс (наполнитель — листы бумаги), асботекстолит, стеклопластики и деревопластики;

б) термореактивные пластмассы (волокнит, фенопласт и др.), используемые для изготовления прессованием рукояток, шкивов, ступиц колес и других деталей изделий бытовой техники;

в) термопластичные пластмассы (органическое стекло — плексиглас, винипласт, фторопласт и др.) используются для изготовления стекол, труб, защитных пленок и др.;

г) полиамиды (капрон, нейлон и др.) применяют для формовки деталей сложной конфигурации (ремни, зубчатые колеса и др.).

*Резина.* Материал на основе натурального или искусственного каучука имеет высокую упругую податливость (малую жесткость), хорошо гасит колебания, сопротивляется истиранию и т.д.

В зависимости от назначения резина изготавливается мягкой, пористой и жесткой (эбонит — для изготовления электротехнических изделий).

Для повышения несущей способности резинотехнических изделий их «армируют» текстильными или стальными элементами (тканью, шнурами, лентой). Такую резину используют для изготовления покрышек, ремней, рукавов и др.

Выбор материалов осуществляется в соответствии с требованиями к машинам и их деталям и является ответственным этапом проектирования. Правильно выбранный материал в значительной мере определяет качество детали и машины в целом, ее надежность и долговечность.

## 25.6. Точность изготовления деталей машин

**Взаимозаменяемость и стандартизация.** Детали машин не могут быть выполнены идеально точно, но вместе с тем основной предпосылкой массового их производства является *взаимозаменяемость*.

*Взаимозаменяемость* — это принцип конструирования и производства деталей, обеспечивающих правильную сборку и замену при ремонте независимо изготовленных деталей и узлов без дополнительной их обработки, с соблюдением требований качества и экономичности.

Взаимозаменяемость деталей и узлов может быть полной и неполной. В последнем случае правильное соединение деталей и узлов обеспечивается лишь для их части, изготовленной с высокой точностью. Другая часть деталей, изготовленных менее точно, собирают подбором, с использованием компенсаторов и различных технологических средств.

Взаимозаменяемость обеспечивается стандартизованными системами допусков и посадок на резьбовые, зубчатые, шлицевые, шпоночные соединения и др. Кроме того, для обеспечения взаимозаменяемости деталей, узлов и комплексов и упорядочения их производства в масштабах предприятия, отрасли, страны существуют *стандарты*: предприятия — СГП, отрасли — ОСТ и страны — ГОСТ. Их соблюдение является обязательным на всех этапах производства, сбыта и эксплуатации изделий. Стандартизация имеет важное общегосударственное значение для обеспечения продукции высокого качества.

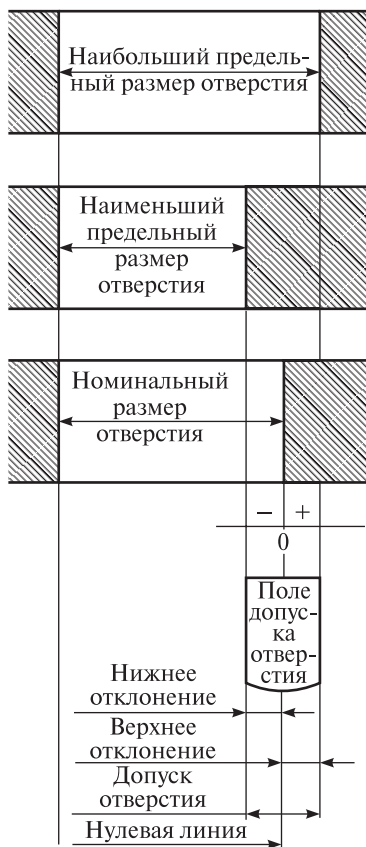
*Размеры.* Геометрические параметры деталей количественно оценивают размерами. Размеры, проставляемые на чертежах деталей или соединений, называют *номинальными*. Их получают из расчетов или принимают из конструктивных соображений и округляют до ближайшего из ряда по ГОСТ 6636-69 «Нормальные линейные размеры».

При изготовлении деталей действительный размер лишь случайно может совпасть с заданным, так как большое число факторов влияет на точность обработки и неизбежно приводит к появлению погрешностей (отклонения бывают в размерах и в форме деталей). При этом под *точностью* понимают близость результатов изготовления предписанным значениям. Количественные меры точности — *погрешности* — представляют собой разности полученных и предписанных значений того или иного размера.

Установлено, что для обеспечения правильной сборки и нормальной работы детали могут иметь некоторое рассеяние размеров относительно номинальных значений. Экономически целесообразные предельные отклонения размеров деталей определяются единой системой допусков и посадок, установленной ГОСТами, например ГОСТ 25346-82 и ГОСТ 25347-82.

**Допуски и посадки.** Разность между наибольшим и наименьшим предельными размерами называется *допуском*. На рис. 25.1 в ка-

а



б

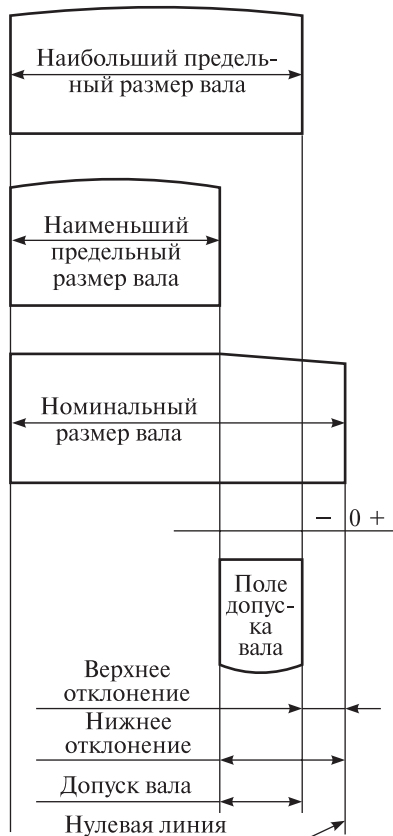


Рис. 25.1. Предельные размеры отверстия (а) и вала (б), определяющие поля допусков

честве примера показаны совмещенные по образующей цилиндрические отверстия (а) и валы (б) с номинальными и предельными величинами диаметров. ГОСТ 25346-82 установлены следующие обозначения: допуск размера  $IT = d_{\max} - d_{\min}$ ; верхнее отклонение вала  $es = d_{\max} - d$  (для отверстия  $ES$ ); нижнее отклонение вала  $ei = d_{\min} - d$  (для отверстия  $EI$ ).

При схематическом изображении *поля допуска* величины отклонений могут быть как положительными, так и отрицательными,

первые откладываются вверх, а вторые — вниз от нулевой линии. Расположение поля допуска относительно нулевой линии принято обозначать буквами латинского алфавита — прописной для отверстий и строчной — для вала.

При увеличении допуска на размер требования к точности снижаются, и деталь в изготовлении будет более простой и дешевой.

При одном и том же допуске деталь большего размера изготовить сложнее, чем деталь меньшего размера. Поэтому величину допуска  $IT$  назначают в зависимости от диаметра, вводя единицу допуска  $i = 0,45\sqrt{d} + 0,001d$ , мкм (здесь  $d$  — в мм), и  $IT = ai$ .

В зависимости от числа  $a$  единиц допуска  $i$  в допуске  $IT$  стандартом установлено 19 *квалитетов* (классов) точности: 01, 0, 1, 2, 3, ..., 17. Допуски в квалитетах 01, ..., 4 предназначены для концевых мер длины, калибров, измерительных инструментов и др.; квалитеты 5, ..., 13 дают допуски для сопрягаемых размеров деталей, а в квалитетах 14, ..., 17 даются допуски для несопрягаемых размеров.

Характер сопряжения (*посадки*) двух соосных цилиндрических деталей (охватываемой — вала и охватывающей — отверстия) зависит от их действительных размеров, т.е. посадка образуется сочетанием полей допусков вала и отверстия. Если диаметр отверстия больше диаметра вала, то в соединении между ними будет *зазор* (положительная разность диаметров), обеспечивающий свободное осевое и окружное перемещение одной детали относительно другой. Если размер отверстия меньше размера вала (отрицательная разность размеров), то в соединении образуется *натяг*.

Существуют две системы образования посадок: система отверстия и система вала.

В основе *системы отверстия* лежит независимость размера отверстия от вида посадки, т.е. предельные отклонения данного размера отверстия одинаковы для всех посадок. Различные посадки создаются путем изменения предельных отклонений размеров вала. Отверстие в этой системе называют основным, его поле допуска обозначают буквой *H*. Нижнее отклонение размера основного отверстия равно нулю, и поле допуска располагается «в теле» охватывающей детали (рис. 25.2, *a*).

В посадках могут сочетаться поля допусков отверстия и вала одинаковых или разных квалитетов (обычно больший допуск относят к отверстию).

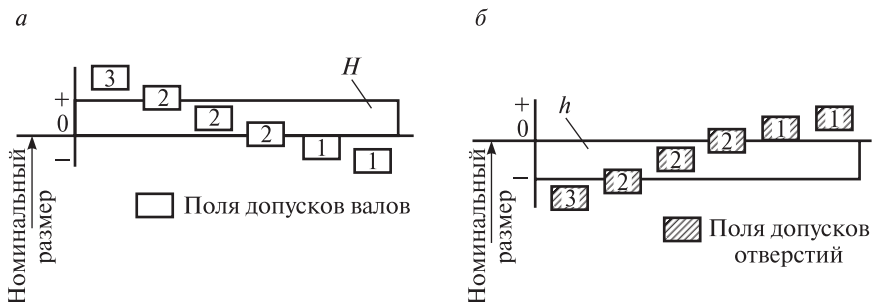


Рис. 25.2. Поля допусков в системах вала (а) и отверстия (б)

Посадки в системе отверстия задаются последовательным написанием номинального диаметра соединения и обозначений полей допусков сначала отверстия, а затем вала.

При образовании посадок в *системе вала* принимают, что размер вала не зависит от вида посадки, а различные посадки получают изменением предельных отклонений отверстий (рис. 25.2, б). Поле допуска вала — основной детали в этой системе — обозначается буквой *h*.

Все посадки в обеих системах разделяют на три группы: *подвижные*, *неподвижные* (прессовые или *с натягом*) и *переходные*.

*Подвижные посадки* (посадки с зазором, см. рис. 25.2, поля допусков 1) применяют в подвижных соединениях (подшипниках скольжения, а также в соединениях, подвергаемых частой разборке и сборке).

*Неподвижные посадки* (посадки с натягом или прессовые, см. рис. 25.2, поля допусков 3) применяют для неподвижного соединения деталей без дополнительного крепления.

*Переходные посадки* — это те, которые в зависимости от соотношения действительных размеров отверстия и вала могут быть как с зазором, так и с натягом (см. рис. 25.2, поля допусков 2). Их применяют для центрирования сопрягаемых деталей путем неподвижного соединения с дополнительным креплением шпонками, винтами, штифтами. Посадки назначают из расчета или накопленного опыта.

**Волнистость и шероховатость поверхностей.** Поверхности деталей машин после обработки не являются идеально гладкими, так как режущие кромки инструментов оставляют на поверхности следы в виде неровностей и гребешков, близко расположенных друг к другу.

Поверхности, заданные технической документацией без учета допускаемых отклонений, называются *номинальными поверхностями*. От них отклоняются *реальные поверхности*. Одной из причин этого является их *шероховатость* — совокупность неровностей, высота которых может изменяться примерно от 0,1 до 300 мкм соответственно для 14-го и 1-го классов шероховатостей.

Состояние поверхности после обработки оказывает большое влияние на эксплуатационные свойства деталей. Возникающие при механической обработке трещины и надрывы с возможными остаточными напряжениями растяжения способствуют развитию усталостных трещин и коррозии, снижающих контактную и объемную прочность деталей.

С увеличением шероховатости уменьшается площадь фактического контакта, увеличиваются местные давления, возрастают интенсивность изнашивания и опасность появления задира.

Сопутствующее росту шероховатости снижение жесткости в контакте ведет к ослаблению соединений деталей машин с натягом и снижению несущей способности болтов при циклической нагрузке. Таким образом, уменьшение шероховатости (повышение «гладкости» поверхности) способствует увеличению износостойкости, коррозионной стойкости, объемной прочности и позволяет повысить нагрузочную способность напряженных соединений и их герметичность.

Повышение износостойкости достигается при уменьшении шероховатости до определенного предела. Для удерживания масла в контакте и уменьшения изнашивания на сопряженных поверхностях создается в ряде случаев упорядоченная (оптимальная) шероховатость.

По ГОСТ 25142-82 основными параметрами для оценки шероховатости являются высота  $R_z$  неровностей профиля по десяти точкам и среднее арифметическое отклонение профиля  $R_a$  на базовой длине  $l$ :

$$R_z = \frac{1}{5} \left( \sum_{i=1}^5 |H_{i\max}| + \sum_{i=1}^5 |H_{i\min}| \right);$$

$$R_a = \frac{1}{l} \int_0^l |y(x)| dx,$$

где  $H_{i\max}$  и  $H_{i\min}$  — отклонения пяти наибольших максимумов и минимумов профиля.

Отсчет этих величин и значений  $y(x)$  ведется от базовой линии, имеющей форму номинального профиля поверхности и проведенной так, что среднее квадратическое отклонение профиля от этой линии в пределах базовой длины  $l$  минимальное.

Шероховатость поверхности существенно влияет на эксплуатационные свойства деталей. Часто принимают, что параметр  $R_z$  не должен превышать 0,1...0,2 допуска на размер. На работоспособность деталей влияют и другие характеристики (средний шаг по вершинам и по средней линии профиля, относительная опорная длина и др.).

Номинальные числовые значения параметров шероховатости указывают на чертежах знаками (рис. 25.3). Знак на рис. 25.3, *а* не регламентирует вид обработки поверхности. Знаком, показанным на рис. 25.3, *б*, обозначают поверхности, образуемые удалением слоя материала (точением, шлифованием и т.п.). На рис. 25.3, *в*, показаны поверхности, не обрабатываемые после литья, штамповки и других видов предварительной обработки. Сведения относительно параметров шероховатости приводятся на чертежах также с помощью знака, показанного на рис. 25.3, *г*. При этом на месте рамки 1 записывают параметры шероховатости по ГОСТ 2789-73 (для  $R_a$  без символа, рис. 25.3, *д*; для остальных параметров после соответствующего символа, рис. 25.3, *е*). На месте рамки 2 записывают вид обработки поверхности и другие дополнительные указания, а на месте рамок 3 и 4 соответственно — базовую длину по ГОСТ 2789-73 (рис. 25.3, *ж*) и условное обозначение направления неровностей.

В процессе приработки высота неровностей уменьшается до некоторого оптимального значения  $R_{\text{опт}}$ . Экспериментально установлено, что наименьший износ получается не при минимальной шероховатости трущихся поверхностей, а при шероховатости, имеющей оптимальное значение  $R_{\text{опт}}$ , отклонение от которой в боль-

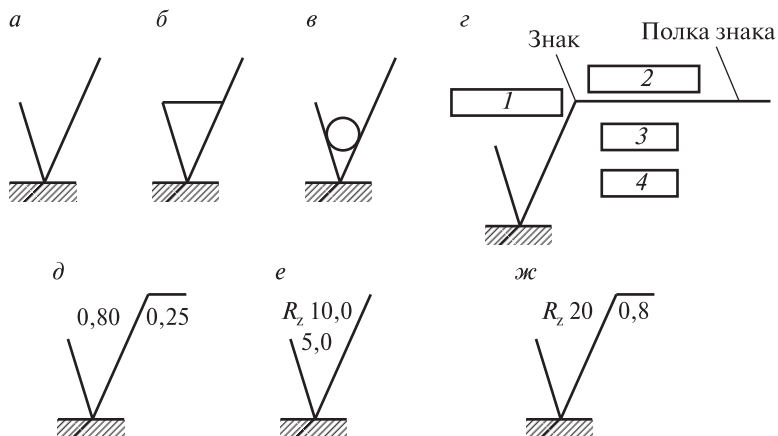


Рис. 25.3. Обозначение шероховатости поверхности:

*а* — регламентирует вид обработки поверхности; *б* — обозначает поверхности, образуемые удалением слоя материала; *в* — поверхности, не обрабатываемые после литья; *г* — знак, показывающий сведения относительно параметров шероховатости; *д* — параметры шероховатости без символа; *е* — то же с символом; *ж* — то же с символом и видом обработки поверхности

шую и меньшую сторону приводит к увеличению изнашивания. Диапазон  $R_{\text{опт}}$ , как правило, очень мал.

Увеличение высоты неровностей по сравнению с оптимальным значением повышает изнашивание за счет возрастания механического зацепления, скалывания и среза неровностей. Уменьшение высоты неровностей по сравнению с оптимальным значением резко увеличивает изнашивание за счет молекулярного сцепления и заедания трущихся поверхностей, чему способствует выдавливание смазочного материала и плохая смачиваемость зеркально-чистых поверхностей. Поэтому пришабренные поверхности лучше притертых, так как на них имеются углубления («карманы»), удерживающие смазочный материал. Хорошее удержание смазочного материала обеспечивается системой мелких маслоудерживающих каналов, полученных виброобкатыванием. Таким образом, деталь должна иметь не слишком грубую и не слишком гладкую поверхность, а именно такую, какая нужна для надежного выполнения своего функционального назначения. Параметры оптимальной шероховатости зависят от качества смазочного материала, условий работы трущихся поверхностей, их конструкции и материала.



## Глава 26. НЕРАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Любая машина получается в результате сборки деталей, осуществляемой с помощью *подвижных* и *неподвижных* соединений. Подвижные соединения обеспечивают движение одной детали относительно другой. Неподвижные соединения жестко скрепляют две или несколько деталей.

По признаку разъемности все виды соединений можно разделить на *неразъемные* (сварные, клеевые, заклепочные и др.) и *разъемные* (резьбовые, шпоночные и др.). Первые можно разбирать только после их полного или частичного разрушения, вторые допускают многократную разборку или сборку без повреждения деталей.

### 26.1. Сварные соединения

*Сварные соединения* — наиболее распространенный и наиболее прочный способ соединения неразъемных элементов железнодеревяжных конструкций. Сварку применяют не только как метод соединения деталей, но и как технологичный способ их изготовления.

В настоящее время освоена сварка практически всех конструкционных сталей, цветных материалов и пластмасс.

*Сварным соединением* называют неразъемное соединение деталей с помощью сварных швов.

**Виды сварки.** Сварные соединения образуются в результате местного нагрева до расплавленного или пластического состояния частей деталей. Детали могут быть как металлические, так и неметаллические. Различают следующие виды сварки: газовую, электродуговую, контактную, трением и т.п.

*Основные недостатки сварных соединений:* наличие остаточных напряжений из-за неоднородного нагрева и охлаждения и возможность коробления деталей при сваривании; возможность существования скрытых дефектов, снижающих прочность соединений.

*Достоинства сварных соединений:* герметичность и технологичность; малая трудоемкость процесса; простота конструкции сварного шва; возможность автоматизации процесса сварки и как следствие — невысокая стоимость; лучшее использование металла, так как нет отверстий при использовании заклепки и ослабления рабоче-

го сечение детали (масса сварных конструкций примерно на 25 % меньше массы клепаных, что достигается частичным или полным устранением дополнительных деталей (накладок, косынок и т.п.); отсутствием выступающих массивных головок заклепок).

При соединении деталей с помощью сварки к расплавляемой области подводят присадочный материал, который заполняет свариваемое место. Затвердевший после сварки материал, соединяющий свариваемые детали, называется *сварным швом*.

*Сварные швы* классифицируются по следующим признакам.

По назначению — *прочные* (обеспечивают передачу нагрузки с одного элемента на другой); *прочноплотные* (обеспечивают передачу нагрузки и герметичность соединения — непроницаемость для жидкости и газа).

По расположению сварного шва в пространстве — *нижние, горизонтальные, вертикальные, потолочные*. При прочих равных условиях самые прочные нижние швы, менее прочные — потолочные швы.

Наиболее широко распространена электрическая сварка. Различают два основных вида электросварки — *дуговую* и *контактную*.

При дуговой сварке сварной шов формируется не только за счет плавления материалов деталей, но, в некоторых случаях, и за счет плавления электрода. Для предохранения материалов от вредного влияния окружающего воздуха в зоне сварки создается защитная среда, образующаяся в результате плавления обмазки электродов, флюса или подачи инертных газов.

При автоматической дуговой сварке весь процесс сварки протекает под флюсом.

Для ручной дуговой сварки низко- и среднеуглеродистых, а также низколегированных сталей используются электроды марок Э34, Э42, Э42А, Э46,45 Э46А, Э50, Э50А и др. Число после буквы Э обозначает минимальный гарантированный предел прочности металла шва  $\sigma_B$ . Так, для электрода Э46А  $\sigma_B = 460 \text{ Н/мм}^2$ . Буква А указывает на гарантированное получение повышенных пластических свойств металлического шва. Электроды выбирают так, чтобы получить близкие характеристики металла шва и металла свариваемых деталей. Для высоколегированных сталей, чугунов и сплавов цветных металлов требуются специальные приемы сварки (включая предварительный нагрев, специальные электроды и защитные газы и прочее).

Ручную дуговую сварку применяют для конструкций с короткими и неудобно расположенными швами, а также в единичном производстве.

Автоматическая дуговая сварка — основной вид сварки железнодорожных деталей. Применяется она в крупносерийном и массовом производстве.

Сварка, при которой материал соединяемых деталей не расплавляется, а лишь размягчается, называется *контактной*.

Контактной сваркой выполняют соединения встык; соединения по боковой поверхности — точечные и линейные. Соединения встык выполняют, как правило, на контактных машинах.

Соединяются заготовки различных форм и сечений: круглые, квадратные, трубчатые, профильные, а также штампованные из тонкого листа металла.

*Точечную* сварку применяют для конструкций из листового металла и для соединения круглых стержней с пластинами и между собой, например, в арматуре железобетонных конструкций.

Точечную сварку широко используют для сварки кузовов и рам в локомотивостроении и в вагоностроении.

При контактной сварке присадочный материал не требуется. Сварку ведут с применением давления, под действием которого детали, предварительно нагретые в месте соединения (контакта) до пластического состояния или оплавления, образуют сварной шов.

*Недостатки таких соединений:* коробление деталей из-за неравномерного нагрева в процессе сварки и охлаждения; опасность появления трещин; изменение структуры металла вблизи сварочных швов, что понижает прочность; недостаточная прочность при переменных и особенно при вибрационных и ударных нагрузках; зависимость прочности сварного соединения от квалификации сварщика. Использование автоматической сварки устраняет этот недостаток.

Сварку широко применяют вместо литья иковки как технологический способ изготовления разнообразных по форме деталей. Так, сварными выполняют станины, рамы, корпуса редукторов, зубчатые колеса, шкивы, трубы, цистерны и многие другие детали железнодорожного транспорта.

Для выявления дефектов в транспортном машиностроении введен полный или выборочный контроль сварных соединений с помощью разрушающих и неразрушающих методов.

**Виды соединений.** В зависимости от расположения свариваемых деталей различают следующие виды соединений: стыковые (рис. 26.1), нахлесточные (рис. 26.2), тавровые и угловые (рис. 26.3).

Стыковые соединения имеют прочность, близкую к прочности основного металла, и применяются в ответственных конструкциях. В зависимости от толщины  $t$  деталей сварку выполняют односторонними (рис. 26.1, *а, б*) или двухсторонними (рис. 26.1, *в, г*) швами, предварительно производя подготовку кромок.

Нахлесточные соединения выполняют фланговыми (рис. 26.2, *а*) и лобовыми швами (рис. 26.2, *б*), а также комбинированными (фланговыми и лбовыми, рис. 26.2, *в*) или косыми швами (рис. 26.2, *г*).

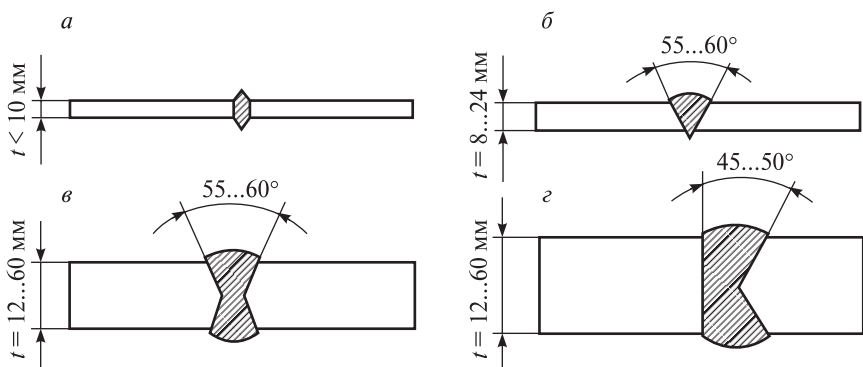


Рис. 26.1. Стыковые соединения:  
*а, б* — односторонние; *в, г* — двухсторонние

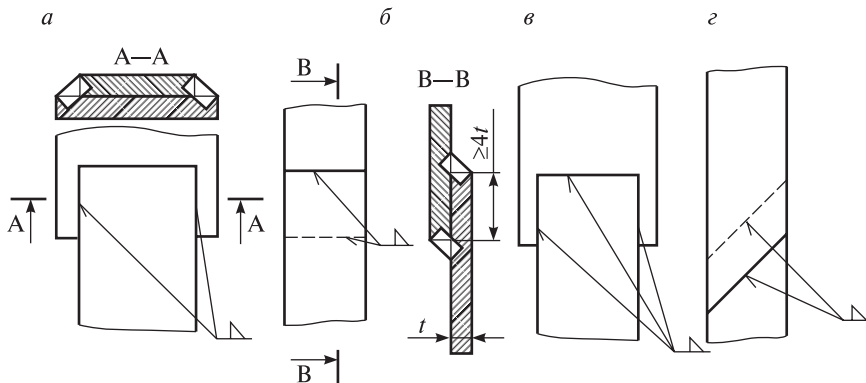


Рис. 26.2. Нахлесточное соединение:  
*а* — фланговый шов; *б* — лобовой шов; *в* — комбинированный; *г* — косой

Угловые и соединения в тавр (рис. 26.3) выполняют без подготовки кромок — при ручной и автоматической сварке, для малых толщин, а также для средних толщин листа (рис. 26.3, *а*); односторонние (рис. 26.3, *б*) и двусторонние (рис. 26.3, *в*), с подготовкой кромок — при средних и больших толщинах.

Нахлесточные, тавровые и угловые соединения выполняют угловыми швами. Форма угловых швов обычно бывает нормального сечения (рис. 26.4, *а*). Часто встречаются и вогнутые швы (рис. 26.4, *б*).

Нахлесточные соединения тонколистовых конструкций выполняют с помощью контактной сварки, наиболее часто — точечной или шовной.

Диаметр сварной точки устанавливают в зависимости от толщины  $t$  свариваемых деталей:  $d = 1,2t + 4$  мм.

Рекомендуемое расстояние между точками  $a = 3d$  при сварке двух элементов и  $a = 4d$  при сварке трех элементов.

Кроме этого, используют прорезные соединения (рис. 26.5) и пробочные (рис. 26.6).

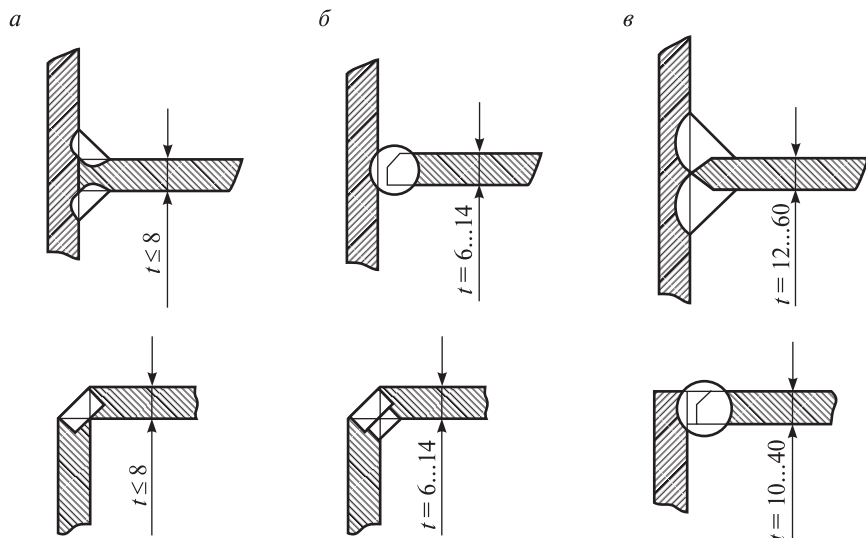


Рис. 26.3. Угловые соединения и соединения в тавр: односторонние (*а*, *б*); двусторонние (*в*)

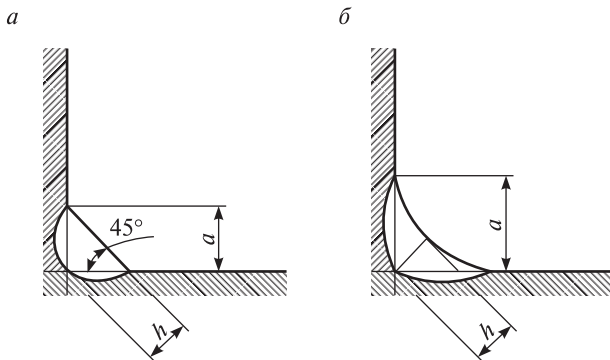


Рис. 26.4. Угловое соединение, выполненное вогнутым швом:  
*а* — нормальное сечение; *б* — специальным швом

Прорезные соединения представляют собой щель шириной  $(2-4)\delta$  и длиной до  $25\delta$ , вырезанную в одной из деталей с последующей сваркой угловым швом (см. рис. 26.5) по периметру прорези. Изготовление прорезей усложняет технологию, поэтому применение прорезных швов допускается только в особых случаях.

Пробочные соединения осуществляют заполнением наплавленным металлом отверстий (обычно круглой формы) в одном или обоих соединяемых элементах. Эти соединения применяют при незначительных действующих на шов нагрузках.

Прорезные соединения отличаются от пробочных тем, что сварка осуществляется только по периметру отверстия (прорези), выполненного только в одном из соединяемых элементов.

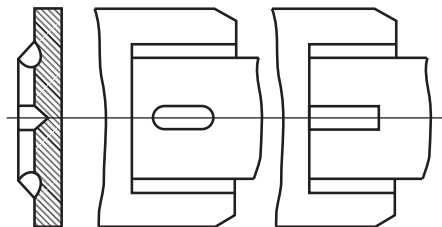


Рис. 26.5. Прорезное соединение

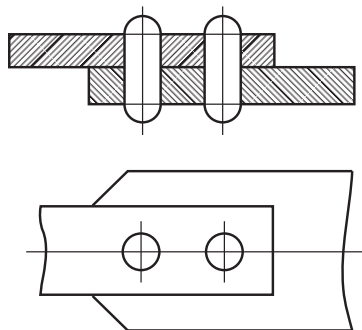


Рис. 26.6. Пробочное соединение

**Расчет сварных соединений на прочность.** Стыковые швы (см. рис. 26.1) рассчитывают на прочность по сечению соединяемых деталей как целые детали (без учета утолщения шва).

Условие прочности

$$\sigma = F / (lt) \leq [\sigma'_p], \quad (26.1)$$

где  $l$ ,  $t$  — соответственно длина шва и толщина соединяемых деталей;

$F$  — внешняя сила;

$[\sigma'_p]$  — допускаемое напряжение сварного шва при растяжении, как правило, равное 0,9...1,0  $[\sigma]$ .

Фланговые и лобовые (угловые) швы разрушаются по сечению, проходящему через биссектрису прямого угла (рис. рис. 26.7, а). Площадь расчетного сечения

$$A = Lk_p \cos 45^\circ = 0,7k_p L, \quad (26.2)$$

где  $L$  — общая длина (периметр) сварного шва;

$k_p$  — расчетный катет шва, обычно  $k_p = (0,9...1,2)t$ , где  $t$  — наименьшая толщина свариваемого элемента;  $k_p = 3$  мм при  $t \geq 3$  мм.

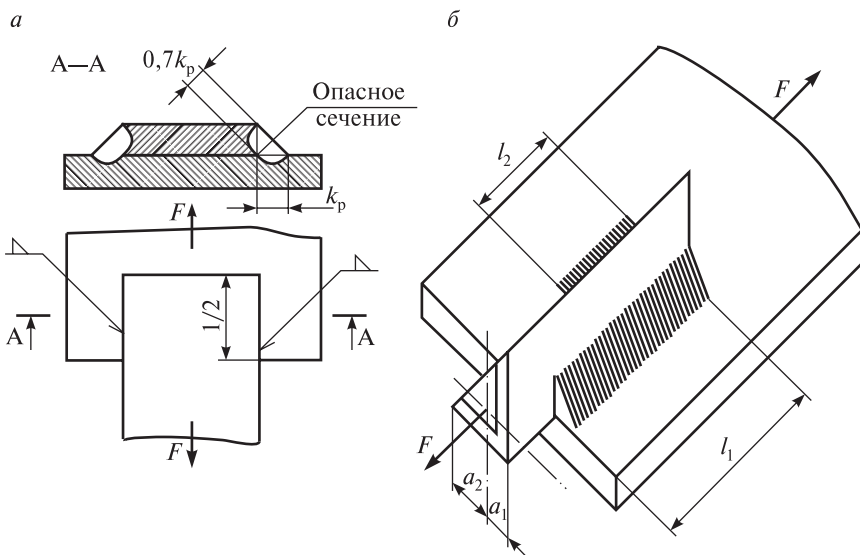


Рис. 26.7. Фланговые и лобовые швы:

а — при симметричном нагружении; б — при несимметричном нагружении

## Напряжение среза в расчетном сечении

$$\tau = \frac{F}{0,7k_p L} \leq [\tau_{\text{ш}}],$$

где  $[\tau_{\text{ш}}]$  — допускаемое напряжение в сварном шве при срезе.

Это соотношение выражает условие прочности шва по допускаемым напряжениям. Из выражения (26.2) можно определить требуемую длину шва. Наибольшая длина лобового шва не ограничивается, а длину флангового шва не следует выполнять больше  $60k_p$ . Минимальная длина флангового шва должна быть не менее 30 мм, так как при меньшей длине дефекты (непровары, шлаковые включения и др.) в начале и в конце шва существенно снижают его прочность.

Допускаемая растягивающая нагрузка

$$[F] = 0,7k_p L[\tau].$$

Швы целесообразно располагать так, чтобы они были нагружены равномерно. Если фланговые швы размещены несимметрично относительно нагрузки, например, в соединении с уголком (рис. 26.6, б), то полагая, что напряжения равномерны по длине шва, из уравнений равновесия получим соотношения для нагрузок на фланговые швы в виде

$$F_1 = (a_2 / (a_1 + a_2)) F; \quad F_2 = (a_1 / (a_1 + a_2)) F,$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — расстояния от центра тяжести сечения элемента до центров тяжести сечений швов.

Если длина шва задана или определена, то ее целесообразно разместить пропорционально нагрузкам  $F_1$  и  $F_2$ , чтобы выполнялось условие

$$l_1 = L(a_2 / (a_1 + a_2)); \quad l_2 = L(a_1 / (a_1 + a_2)).$$

Следовательно, для получения равномерного распределения нагрузки между швами необходимо длину каждого шва принимать обратно пропорциональной расстоянию между центрами тяжести шва и детали.

Угловые соединения не используют как силовые, их применяют, как правило, для образования профилей.



Точечное соединение, нагруженное в плоскости стыка, рассчитывают на срез, принимая равномерное распределение нагрузки между точками:

$$\tau = 4F_1 / (i\pi d^2) \leq [\tau_{\text{ш}}],$$

где  $F_1$  — усилие, приходящееся на одну точку;  
 $i$  — число плоскостей среза точек.

Напряжения в швах, полученных на роликовых машинах, рассчитываются по формуле

$$\tau = F / (al) \leq [\tau_{\text{ш}}],$$

где  $a$  — ширина шва;  
 $l$  — его длина.

Допускаемые напряжения в сварных швах, в долях от допускаемых напряжений основного металла  $[\sigma]$ , приведены в табл. 26.1.

Таблица 26.1

**Допускаемые напряжения для сварных швов при статической нагрузке**

Сварка	Допускаемые напряжения для сварных швов		
	при растяжении $[\sigma'_p]$	при сжатии $[\sigma'_{сж}]$	при сдвиге $[\tau_{\text{ш}}]$
Автоматическая, ручная электродами Э42А и Э50А, в среде защитного газа, контактная стыковая	$[\sigma_p]$	$[\sigma_p]$	$0,65 [\sigma_p]$
Ручная, электродами обычного качества	$0,9 [\sigma_p]$	$0,9 [\sigma_p]$	$0,6 [\sigma_p]$
Контактная точечная	—	—	$0,6 [\sigma_p]$

Допускаемые напряжения для основного металла в металлоконструкциях вычисляются по формуле

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_T m}{K},$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести материала;

$m$  — коэффициент, принимаемый в зависимости от типа соединения и условий его работы, обычно  $m = 0,8 \dots 0,9$ ;

$K$  — коэффициент перегрузки, обычно  $K = 1 \dots 1,2$ ; для резервуаров с внутренним давлением  $K = 1,2$ ; для подкрановых балок  $K = 1,3 \dots 1,5$ .

Исключительная простота расчетов обеспечила сварным соединениям широкое применение в практике. Кроме того, некоторые величины, используемые в расчетах, берутся на основании опытных данных. Это, в свою очередь, вносит соответствующие коррективы в расчеты и делает их достаточно надежными.

**Пример 26.1.** Определить длину лобового и фланговых швов для приварки равнополочного уголка  $100 \times 100 \times 12$  мм,  $z_0 = 2,91$  см, площадь сечения уголка  $22,8 \text{ см}^2$  (ГОСТ 8509-93), передающего растягивающую нагрузку к косынке (рис. 26.8). Допускаемые напряжения уголка и косынки  $[\sigma_p] = 160 \text{ МПа}$ . Сварка ручная дуговая электродом Э42А. Катет шва принять равным толщине полки уголка ( $k = 12$  мм).

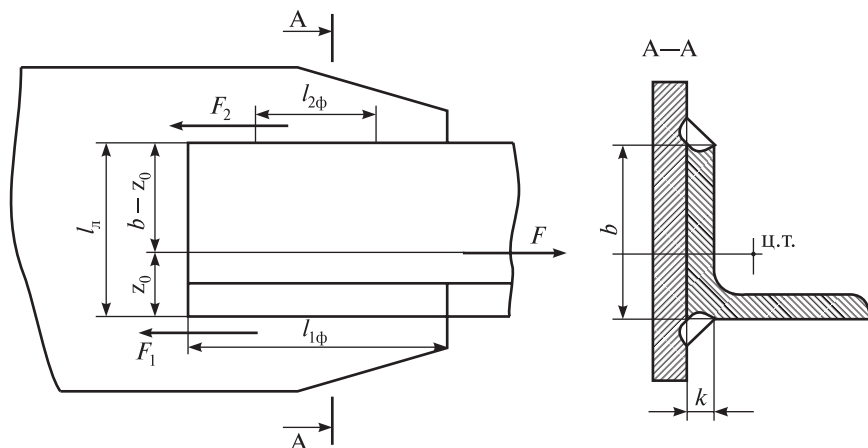


Рис. 26.8

*Решение.* Допускаемое усилие определим из условия прочности уголка на растяжение  $F = [\sigma_p] \cdot A = 160 \cdot 10^6 \cdot 22,8 \cdot 10^{-4} = 364,8 \text{ кН}$ .

Допускаемое напряжение среза для сварного соединения определим согласно табл. 26.1.

$$[\tau'_c] = 0,65[\sigma_p] = 0,65 \cdot 160 \cdot 10^6 = 104 \text{ МПа}.$$

Определим требуемую длину всех швов

$$l_{\text{ш}} = F / (0,7k[\tau'_c]) = 364,8 \cdot 10^3 / (0,7 \cdot 12 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^6) \approx 41,8 \text{ см}.$$

Тогда, принимая длину лобового шва равной ширине полки уголка  $l_n = b = 10 \text{ см}$ , получим длину флангового шва

$$l_{\text{ф}} = l_{\text{ш}} - l_n = 41,8 - 10 = 31,8 \text{ см}.$$

Исходя из условия равнопрочности длины швов в соединении, они должны быть пропорциональны силам, действующим на них, т.е.  $l_{1\phi}/l_{2\phi} = F_1/F_2$ , или обратно пропорциональны плечам  $z_0$  и  $(b - z_0)$ , тогда  $l_{1\phi}/l_{2\phi} = (b - z_0)/z_0$ , где  $l_{1\phi} + l_{2\phi} = l_{\phi}$ , откуда имеем:

$$l_{1\phi} = l_{\phi}(b - z_0)/b = 31,8(10 - 2,91)/10 \approx 22,5 \text{ см};$$

$$l_{2\phi} = l_{\phi} - l_{1\phi} = 31,8 - 22,54 \approx 9,3 \text{ см}.$$

## 26.2. Паяные соединения

Паяные соединения получили довольно широкое распространение в транспортном машиностроении и в ряде случаев вытесняют сварные соединения.

Пайка, в отличие от сварки, осуществляется без расплавления соединяемых деталей. Связь между элементами при пайке обеспечивается силами молекулярного взаимодействия поверхностей деталей с присадочным материалом, называемым припоем. Температура плавления припоя ниже температуры плавления соединяемых элементов. В расплавленном состоянии припой смачивает паяемые поверхности, заполняет капиллярные зазоры между деталями. При затверждении образует паяный сплав. Свойства сплава существенно отличаются от свойств используемого припоя. Причина в том, что расплавленный припой растворяет основной материал. Пайку используют для соединений как однородных, так и разнородных материалов, с помощью пайки соединяют черные и цветные металлы и сплавы, стекло, керамику, графит.

Пайкой изготовляют не только отдельные детали, но и сложные крупногабаритные узлы. Методами высокотемпературной пайки (капиллярной, диффузионной, контактно-реактивной, металлокерамической) получают неразъемные соединения со свойствами, близкими к свойствам основных материалов, и прочностью, превышающей прочность сварных соединений.

Кроме того, на железнодорожном транспорте пайкой удалось заменить малопрочные алюминиевые сплавы высокопрочными нержавеющими сталями.

Нагрев припоя и деталей при пайке выполняют паяльником, газовой горелкой, в печах. При пайке в печах припой укладывают в виде проволочных и ленточных контуров.

Для уменьшения вредного влияния окисления поверхностей деталей применяют специальные флюсы (на основе канифоли, буры,

хлористого цинка), паяют также в среде нейтральных газов или в вакууме. При конструировании паяных изделий наряду с выбором основного металла выбирают припой и способ пайки.

Главным условием при назначении основного металла является пайка его припоями, обеспечивающими заданную прочность. Необходимо учитывать также чувствительность основного металла к нагреву и склонность его к образованию трещин под действием расплавленных припоев, проникающих между кристаллами по границам зерен основного металла. В связи с этим, например, пайка сталей латунию применяется ограниченно. Припои должны хорошо смачивать обезжиренные поверхности деталей. В качестве припоев применяют чистые металлы, но преимущественно сплавы на основе олова, меди и серебра. Чаще всего используют оловянно-свинцовые (ПОС 30, ПОС 40, ПОС 50, ПОС 61) и серебряные (ПСр 40, ПСр 45, ПСр 72). Цифры в обозначениях соответствуют процентному содержанию соответственно олова и серебра.

В табл. 26.2 приведены механические характеристики и области применения некоторых припоев.

Таблица 26.2

**Механические характеристики и области применения распространенных припоев**

Припой	Основа	$\sigma_B$ , МПа	$\delta$ , %	Назначение
Л63 (проволока)	Медь	450	2	Для пайки стальных изделий неотвечественного назначения, а также для пайки сталей с нагартовкой, при неравномерном нагреве
ПСр 40 ПСр 45	Серебро	380...440 370...510	18...37 16...35	Для пайки трубопроводов, патрубков и других деталей и узлов из конструкционных и коррозионно-стойких сталей. Могут работать до температуры 350—450 °С
ПОС 40 ПОС 61 ПОС 90	Олово и свинец	38 43 49	32 34 25	Внутренние швы медицинской аппаратуры, детали изделий электротехнической и приборостроительной промышленности

При высокой температуре пайки ряда разнородных металлов (например, титана с медью и никелем, магния со сталью, алюминия с медью и др.) невозможно получить пластичные и прочные

соединения без нанесения на них барьерных покрытий, предохраняющих разнородные металлы от активного взаимодействия и, как следствие, возникновения в паяном шве хрупких интерметаллидов. В качестве барьерного покрытия наносят такой металл, который легко паяется и образует прочные связи с основным конструкционным материалом. Процесс пайки легко поддается механизации и автоматизации.

При пайке применяют, главным образом, стыковые и нахлесточные соединения. Нахлесточные соединения (рис. 26.9, *а*) наиболее распространены, так как позволяют изменением величины нахлестки обеспечивать равнопрочность паяного соединения. Соединения ступенчатые, гребенчатые и косостыковые (рис. 26.9, *б*) обеспечивают высокую прочность, но требуют сложной подготовки кромок. Эти соединения применяют только в ответственных конструкциях. Косой стык следует выполнять под углом не более  $30^\circ$ , иначе прочность соединения будет мала. Стыковые соединения (рис. 26.9, *в*) в паяных изделиях применяют редко из-за невысокой их прочности.

Соединения стержней и труб между собой и с плоскими деталями показаны на рис. 26.9, *г—е*. Стыковые соединения стержней и труб для повышения прочности дополняются охватывающей или охватываемой втулкой.

Соединения криволинейных поверхностей с плоскими находят применение при изготовлении сотовых конструкций (рис. 26.9, *ж, з*), достаточно широко используемых в транспортном машиностроении.

Помимо указанных соединений, в паяных конструкциях транспортного машиностроения часто встречаются следующие виды соединений: телескопические (рис. 26.10, *а*), нахлесточные с заклепкой (рис. 26.10, *б*) или штифтом (рис. 26.10, *в*), нахлесточные со шпонкой (рис. 26.10, *г*), с фальцевым замком (рис. 26.10, *д*).

Для проникновения припоя между соединяемыми деталями необходимо оставлять зазоры, величина которых в зависимости от вида припоя колеблется от нескольких сотых до десятых долей миллиметра. Для уменьшения вредного влияния окисления поверхностей при пайке применяют различные флюсы. Наиболее производительна пайка погружением в металлическую (с расплавленным припоем) или соляную ванну. Расплавленные соли выполняют роль источника

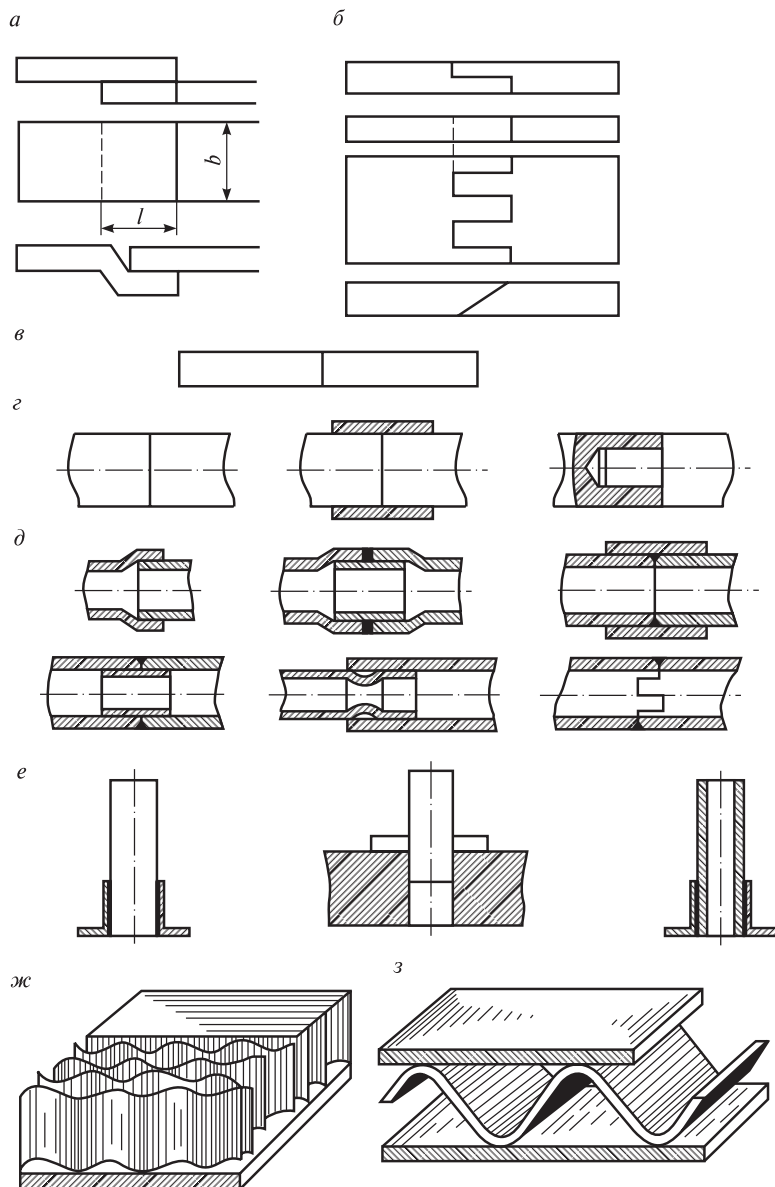


Рис. 26.9. Примеры паянных соединений:

*a* — нахлесточное; *б* — ступенчатое; ребенчатое и косостыковое; *в* — стыковое; *г* — соединение стержней; *д* — соединение труб; *е* — соединение труб с плоскими деталями; *ж, з* — сотовые конструкции

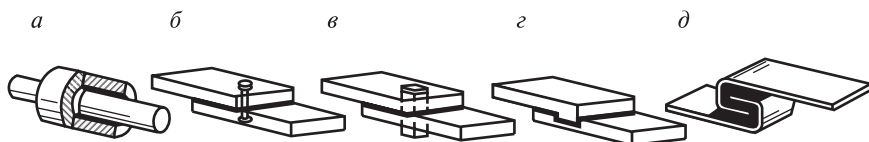


Рис. 26.10. Виды паяных соединений:

*a* — телескопические; *б* — нахлесточные с заклепкой; *в* — нахлесточные со штифтом; *г* — нахлесточные со шпонкой; *д* — с фальцевым замком

тепла и флюса, из которого образуется припой. Высокой производительностью обладает пайка в печах с восстановительной газовой атмосферой, с токами высокой частоты и с газовых пламенем.

Расчет прочности паяных стыковых соединений аналогичен расчету сварных соединений. При расчете нахлесточных соединений следует иметь в виду, что площадь припоя, передающего нагрузку с одной детали на другую, равна площади стыка. В качестве примера, для соединения, показанного на рис. 26.9, *a*, площадь опасного сечения паяного стыка равна  $bl$ .

При проектировании герметичных узлов также применяют нахлесточные соединения, конструктивный вид которых показан на рис. 26.11.

При пайке фланцев к трубам следует предусматривать посадочный пояс и упор на трубе или на фланце.

Прочность паяных соединений существенно зависит от прочности припоя и от активности взаимодействия расплавленного припоя и основного металла. При активном растворении припоя в металле прочность соединений на 30—60 % выше прочности припоя. На ка-

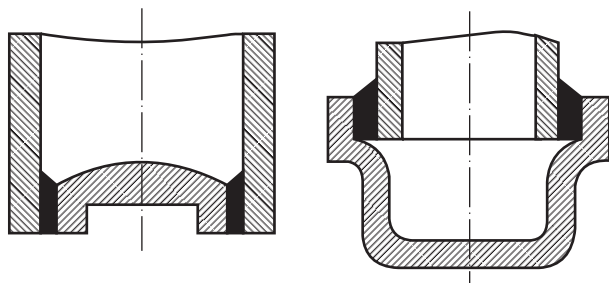


Рис. 26.11. Герметичные соединения

чество соединений существенно влияют величина соединительного зазора и условия течения припоя в нем. При пайке углеродистых сталей припоями из меди, латуни и серебра зазор устанавливается в пределах 0,05...0,15 мм.

При расчетах на прочность можно ориентироваться на данные табл. 26.3.

Таблица 26.3

**Временное сопротивление паяных соединений**

Припой	Материал	$\tau_b$ , МПа	$\sigma_b$ , МПа
ПОС 30	Сталь 20	36	—
	Сталь Х18Н9Т	32	—
	Медь М3	25	—
	Латунь Л62	23	—
ПОС 40	Сталь 20	28	—
	Сталь Х18Н9Т	32	—
	Медь М3	27	—
	Латунь Л62	22	—
ПСр 40	Сталь 30	350...460	490...600
	Сталь Х18Н9Т	240...290	520...600
	Сталь 40ХНМА	330...460	510...570
ПСр 45	Сталь Ст3	350...400	—
	Сталь 45	450...500	—
	Сталь 30ХГСА	350...410	490...580
	Сталь Х18Н9Т	180...260	430...570

### 26.3. Клеевые соединения

Клеевые соединения получили на железнодорожном транспорте широкое распространение. Они позволили расширить диапазон применения в конструкциях транспортных машин сочетаний различных неоднородных материалов — стали, чугуна, меди, латуни, алюминия, стекла, пластмасс, резины, кожи и т.д.

Конструкции соединений склеиванием подобны паяным соединениям (см. рис. 26.9). Вместо припоя наносится слой клея. При затвердевании клея проявляются силы адгезии, за счет которых осуществляется передача нагрузки соединением.

Клеевые швы не ослабляют металл, как при сварке, они не подвержены коррозии и часто герметичны без дополнительного уплотнения.



Достоинствами клеевых соединений являются:

- а) простота получения неразъемного соединения и низкая стоимость работ по склеиванию;
- б) возможность получения неразъемного соединения разнородных материалов любых толщин;
- в) отсутствие коробления получаемых деталей;
- г) герметичность и коррозионная стойкость соединения;
- д) значительно меньшая, чем при сварке, концентрация напряжений.

Основные недостатки соединений:

- а) старение со временем, вызывающее существенное снижение прочности;
- б) невысокая теплостойкость (рабочая температура обычно не выше 300 °С);
- в) необходимость сложной оснастки для изготовления конструкций сложного профиля.

Прочность клеевого соединения зависит от толщины клеевого слоя. Обычно толщина слоя клея составляет 0,05...0,15 мм. Перед склеиванием соединяемые поверхности подвергают обработке абразивной шкуркой или пескоструйной очисткой, так как шероховатость увеличивает поверхность склеивания. Кроме этого, прочность зависит от вязкости клея и от давления при склеивании.

Существует большое разнообразие клеев. Основное применение находят клеи на основе органических смол (эпоксидные, полиэфирные, фенольные, полиуретановые и др.) и на основе кремнийорганических соединений и неорганических полимеров. В настоящее время созданы некоторые марки клеев, удовлетворительно работающие при температуре до 1000 °С.

Контроль качества соединений осуществляется разрушающими и неразрушающими методами (например, рентгеновским методом, инфракрасными лучами и т.д.)

Прочность при сдвиге нахлесточных соединений с различными клеями дана в табл. 26.4.

Клеевые соединения рассчитываются на прочность аналогично паяным соединениям.

Таблица 26.4

**Прочность при сдвиге соединений алюминиевого сплава различными клеями  
в условиях повышенной влажности**

Клей	Прочность при сдвиге $\tau$ , МПа	
	в исходном состоянии	после выдержки в течение 60 сут
Эпоксидный	21	19,6
Поливинилацетальфеновый	28	25,2
Фенолонитрилкаучуковый	38,5	33,6
Полиуретановый	16,1	10,2
Эпоксинайлоновый	42	16,1

Условие прочности при срезе нахлесточного клеевого соединения имеет вид

$$\tau = F/(bl) \leq [\tau_c], \quad (26.3)$$

где  $F$  — нагрузка, действующая на соединение;

$[\tau]$  — допускаемое напряжение на сдвиг (срез);

$b$  и  $l$  — ширина и длина нахлестки.

Для повышения нагрузочной способности клеевые соединения на железнодорожном транспорте часто применяют в сочетании с резьбовыми, заклепочными и сварными соединениями.

## 26.4. Заклепочные соединения

*Заклепочным* называют неразъемное соединение деталей (обычно листовых) с помощью заклепки — сплошного или полого цилиндрического стержня с закладной головкой.

Соединение собирают путем установки заклепок в предварительно подготовленные отверстия в деталях (пакете листов) и последующей клепки специальным инструментом второй замыкающей головки. В процессе клепки происходит стяжка пакета и за счет поперечной деформации стержня заполняется зазор между стержнем и стенками отверстия, что приводит к образованию натяга. Форма и размеры заклепок регламентированы стандартом. Заклепки поставляются как готовые изделия.

По конструкции заклепочные соединения разделяют на соединения внахлестку (рис. 26.12, *а*), соединения с одной накладкой (рис. 26.12, *б*) и соединения с двумя накладками (рис. 26.12, *в*).

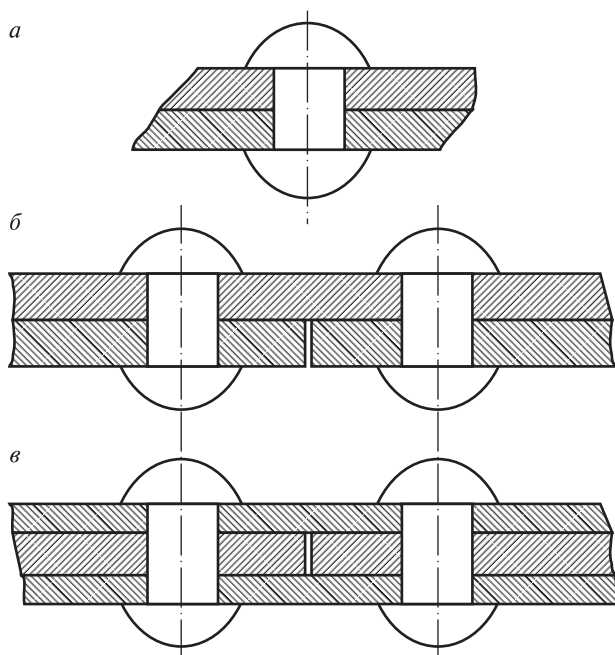


Рис. 26.12. Основные типы заклепочных соединений:  
*а* — соединение в нахлестку; *б* — соединение с одной накладкой; *в* — соединение с двумя накладками

В настоящее время заклепочные соединения имеют ограниченное применение. Их применяют в конструкциях самолетостроения, летательных аппаратов, в мостостроении, в подъемно-транспортных машинах и в других изделиях, где внешние нагрузки действуют параллельно плоскости стыка, а применение сварки, пайки и склеивания оказывается невозможным по конструктивным или технологическим соображениям.

Заклепки изготавливают на посадочных автоматах холодным или горячим способами. В качестве склепываемых материалов могут быть углеродистые и легированные стали, цветные металлы и их сплавы, неметаллические материалы. Заклепки изготавливают из сталей Ст15, Ст20, Ст3кп, из легированной стали 12Х18Н9Т, из меди М3, латуни Л63, алюминиевых сплавов АД1, АМг5, титановых сплавов.

*Заклепочным швом* называют соединение, осуществляемое группой заклепок. Отверстия под заклепки для получения заклепочного шва просверливают или продавливают.

Выбор формы закладной головки зависит от назначения заклепочного шва. В швах, требующих большой прочности и плотности, применяют заклепки с полукруглой головкой. Заклепки с потайной или полупотайной головкой используют в том случае, когда выступающие закладные головки заклепок мешают перемещению каких-либо деталей или в случае больших гидродинамических и аэродинамических сопротивлений (в судостроении и локомотивостроении). Заклепки с бочкообразной головкой применяют там, где они омываются горячими газами, в топках паровых котлов и т.п.; в процессе эксплуатации головки обгорают и приобретают полукруглую форму, сохраняя необходимую прочность. Заклепки с широкой головкой применяют для соединения тонколистовых (до 1,5 мм) материалов, трубчатые заклепки — в слабонагруженных металлических соединениях, а также в соединениях неметаллических материалов (фибра и т.д.)

*Достоинствами* заклепочных соединений по сравнению с другими видами неразъемных соединений являются высокая надежность соединения; удобство контроля качества клепки; повышенная сопротивляемость ударным и вибрационным нагрузкам; возможность соединения деталей из трудносвариваемых металлов.

*Недостатки* заклепочных соединений: сравнительно высокая стоимость получения заклепочного соединения; повышенный расход материала для этого соединения (из-за ослабления соединяемых деталей отверстиями под заклепки требуется увеличение их толщины, применение накладок и т.п.); невозможность соединения деталей сложной конфигурации.

**Расчет заклепочного соединения.** Заклепку рассчитывают *на срез и на смятие*. При этом допускаемые нормальные и касательные напряжения условны, так как в таком соединении нагрузка, в основном, передается за счет сил трения.

Деформация среза возникает при действии двух равных, близко расположенных друг к другу сил, которые направлены в противоположные стороны перпендикулярно продольной оси стержня (рис. 26.13).

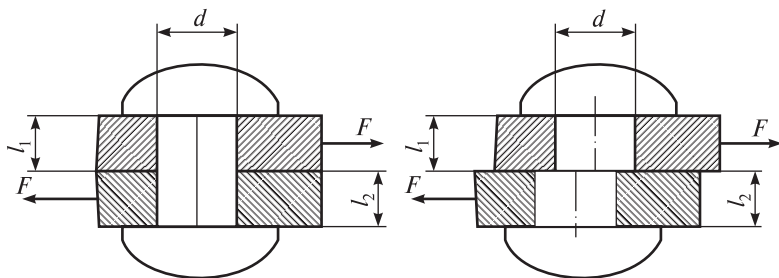


Рис. 26.13. Схема к расчету заклепочного соединения

### Условие прочности

$$\tau_{\text{ср}} = Q/A_{\text{ср}} \leq [\tau_{\text{ср}}], \quad (26.4)$$

где  $\tau_{\text{ср}}$  — расчетное напряжение среза, возникающее в поперечном сечении рассчитываемого соединения;

$Q$  — поперечная сила, при нескольких одинаковых соединительных деталях  $Q = F/i$  ( $F$  — общая нагрузка соединения,  $i$  — число заклепок);

$A_{\text{ср}}$  — площадь среза одной заклепки;

$[\tau_{\text{ср}}]$  — допускаемое напряжение на срез, зависящее от материала соединяемых элементов и условий работы конструкции.

При расчете принимают  $[\tau_{\text{ср}}] = (0,25 - 0,35)\sigma_T$ , где  $\sigma_T$  — предел текучести материала заклепки.

Деформация сдвига часто сопровождается *смятием* — местным сжатием материала в зоне контакта соприкасающихся листов, вызванным действием значительного давления в зоне контакта. Из двух соприкасающихся деталей вероятность местного сжатия больше для мягкого материала.

*Расчет на смятие* носит условный характер и ведется в предположении, что силы взаимодействия между деталями равномерно распределены по поверхности контакта и во всех точках нормальны к этой поверхности.

$$\sigma_{\text{см}} = F/(iA_{\text{см}}) \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (26.5)$$

где  $F/i$  — нагрузка на одну соединительную деталь;

$A_{\text{см}}$  — расчетная площадь смятия;

$[\sigma_{\text{см}}]$  — допускаемое напряжение на смятие.

Число заклепок, располагаемых вдоль линии действия силы, не должно превышать шести. При большем числе заклепок крайние из них оказываются перегруженными по сравнению с находящимися в середине. Диаметр заклепок при минимальной толщине  $\delta$  детали в соединении принимается равным:

при  $\delta \leq 5$  мм  $d \approx 2\delta$ ; при  $\delta = 6 \dots 20$  мм  $d \approx (1,1 \dots 1,6) \delta$ .

**Пример 26.2.** Для заклепочного соединения (рис. 26.14, а), состоящего из двух листов стали толщиной 6 и 12 мм, определить напряжения среза в заклепках и смятия в листах, если допускаемые напряжения для стали:  $[\tau] = 100$  МПа;  $[\sigma] = 160$  МПа.

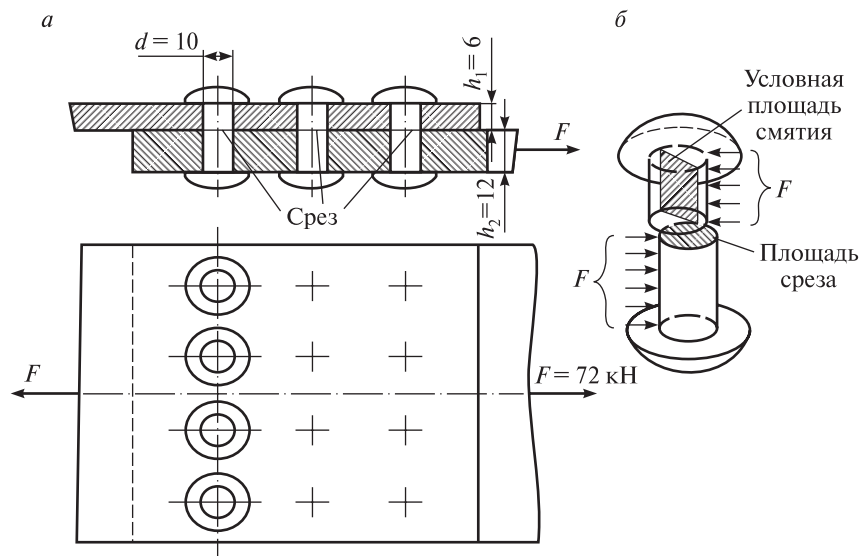


Рис. 26.14:

а — заклепочное соединение; б — нагрузка, действующая на заклепку

**Решение.** Будем предполагать, что все заклепки нагружены одинаково, т.е. каждая заклепка несет часть общей нагрузки. На рис. 26.14, б показаны часть общей нагрузки, действующая на заклепку, а также площади смятия и среза. Определим нагрузку, приходящуюся на одну заклепку:

$$F_1 = F/n = 72 \cdot 10^3 / 12 = 6 \cdot 10^3 \text{ Н} = 6 \text{ кН.}$$

Тогда касательные напряжения среза, действующие на одну заклёпку, будут  $\tau = F_1/A_{\text{ср}} = 6 \cdot 10^3 \cdot 4/3,14 \cdot 0,01^2 = 76,43 \cdot 10^6 \text{ Па} = 76,43 \text{ МПа.}$

Напряжения смятия определим для более тонкого листа, так как тонкий лист будет более напряженным:

$$\tau_{\text{см}} = F_1 / A_{\text{см}} = 6 \cdot 10^3 / 0,01 \cdot 0,006 = 100 \text{ МПа.}$$

На основании проведенных расчетов и условий задачи устанавливаем, что прочность соединения обеспечена.

## 26.5. Соединения с натягом

Соединения деталей машин могут осуществляться за счет посадки одной детали на другую. В таких посадках существует зазор в соединении. Детали легко перемещаются друг относительно друга. Соединения можно разбирать без разрушения деталей, однако повторная их сборка не обеспечивает той же надежности, что первичная сборка. Наибольшее распространение получили цилиндрические соединения, в которых одна деталь охватывает другую по цилиндрической поверхности.

Необходимый натяг получают изготовлением насаживаемых одна на другую соединяемых деталей с требуемой разностью их посадочных размеров, например, диаметра вала —  $B$  и диаметра отверстия  $A$  (рис. 26.15).

*Натяг  $N$*  — это разность диаметров вала и отверстия до сборки. Если диаметр вала больше диаметра отверстия, то  $N = B - A > 0$ . После сборки вследствие упругих и пластических деформаций диаметр  $d$  посадочных поверхностей становится общим. При этом на посадочной поверхности возникают контактное давление  $p$  и соответствующие ему силы трения, которые обеспечивают полную неподвижность соединения при действии внешних сил и моментов на детали соединения.

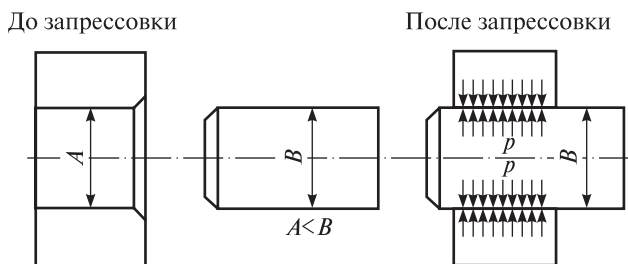


Рис. 26.15. Изготовление натяга насаживанием одной детали на другую

По способу сборки цилиндрические соединения с натягом разделяют на собираемые *запрессовкой* и собираемые с предварительным *нагревом* охватывающей детали (ступицы) или с *охлаждением* охватываемой детали (вала).

*Запрессовка* — наиболее простой и распространенный способ сборки, однако при запрессовке происходит смятие и частичное срезание (шабровка) шероховатостей посадочных поверхностей, что снижает прочность соединения. Соединение деталей нагревом или охлаждением не имеет этого недостатка, поэтому прочность таких соединений примерно в 1,5 раза выше, чем соединений, собранных запрессовкой.

*Достоинства соединений с натягом*: простота и технологичность (нет шпонки и пазов для шлицев, а также деталей для осевой фиксации), что обеспечивает низкую стоимость соединения и возможность его применения в массовом производстве; хорошее центрирование деталей и распределение нагрузки по всей посадочной поверхности, позволяющие использовать соединение с натягом для скрепления деталей современных высокоскоростных машин; передача больших знакопеременных нагрузок, в том числе вибрационных и ударных.

*Недостатки соединений с натягом*: сложность сборки и особенно разборки (требуется мощные прессы и специальные печи); рассеивание нагрузочной способности соединения, связанное с колебаниями действительных посадочных размеров в пределах допусков; повышенная точность изготовления деталей соединения; повышенная концентрация напряжений в соединяемых поверхностях.

Соединения с натягом применяют для изготовления составных зубчатых, червячных (рис. 26.16, *а*) и локомотивных колес (рис. 26.16, *б*); коленчатых валов, соединения зубчатых колес с валами (рис. 26.16, *в*); для посадки подшипников качения на вал (рис. 26.16, *г*) и т.д. Такие соединения постепенно вытесняют шпоночные, особенно при отсутствии необходимости в частой сборке—разборке.

**Расчет на прочность соединений с натягом.** Основной задачей расчета соединения с гарантированным натягом является выбор посадки, обеспечивающей передачу заданной нагрузки. Давле-



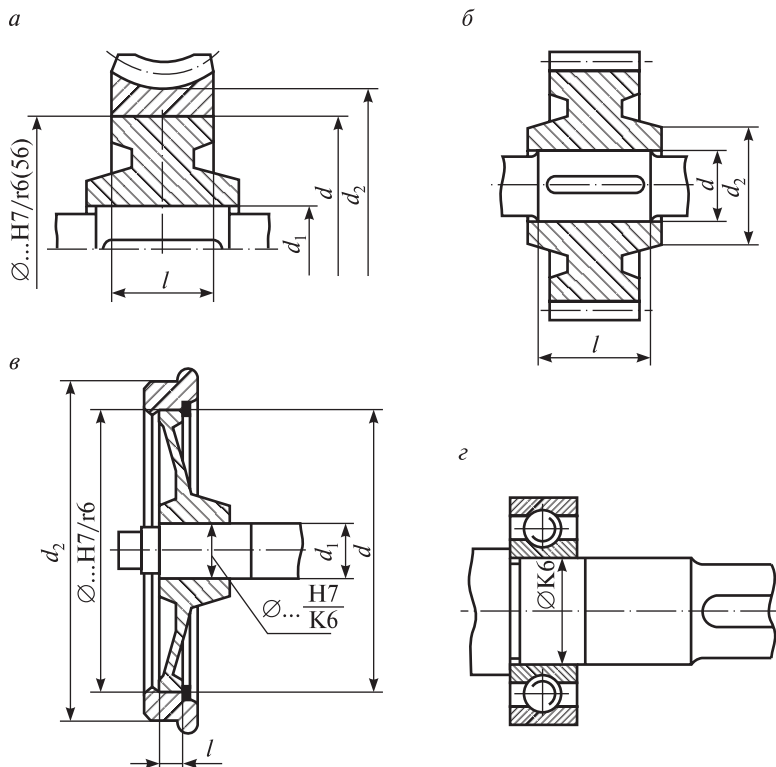


Рис. 26.16. Примеры соединений деталей с натягом:

*а* — для изготовления зубчатых и червячных колес; *б* — для локомотивных колес; *в* — для коленчатых валов, соединения зубчатых колес с валом; *г* — для посадки подшипников качения на вал

ние  $p$  на сопрягаемые поверхности должно быть таким, чтобы силы трения оказались больше внешних нагрузок:

$$p = R_f / (\pi d l f), \quad (26.6)$$

где  $R_f$  — сила трения, определяемая по формуле  $R_f \geq K \sqrt{(10^3 \cdot 2M/d)^2 + F_a^2}$ , Н;

$d$  — диаметр посадочной поверхности, мм;

$l$  — длина посадочной поверхности, мм;

$F_a$  — осевая сила, Н;

$f = 0,06...0,22$  — коэффициент трения при запрессовке и  $f = 0,08...0,19$  при сборке с нагревом и охлаждением.

Расчетный минимальный натяг  $\delta_{\min}$  — это минимальная деформация соединяемых деталей, определяемая по формуле Ламе

$$\delta_{\min} = pd(C_B/E_B + C_A/E_A), \quad (26.7)$$

где  $p$  — давление, возникающее на рабочих поверхностях, МПа, и определяемое по формуле (26.6);

$E_B$  и  $E_A$  — модули продольной упругости соответственно охватываемой (вал) и охватывающей (ступицы) деталей, МПа;

коэффициенты

$$C_B = \frac{d^2 + d_1^2}{d^2 - d_1^2} - \mu_B, \quad C_A = \frac{d_2^2 + d^2}{d_2^2 - d^2} + \mu_A,$$

определяемые с учетом диаметров отверстия  $d_1$  пустотелого вала и условного наружного диаметра ступицы  $d_2$ ;

$\mu_B$  и  $\mu_A$  — коэффициенты поперечной деформации.

Потребный наименьший натяг посадки  $N_{T\min}$  с учетом поправки на обмятие микронеровностей определяют по формулам:

$$\begin{aligned} N_{T\min(\max)} &= \delta_{\min(\max)} + 5,5(Ra_B + Ra_A) \cdot 10^{-3}; \\ N_{T\min(\max)} &= \delta_{\min(\max)} + 1,37(Rz_B + Rz_A) \cdot 10^{-3}, \end{aligned} \quad (26.8)$$

где  $\delta_{\min}$  — расчетный минимальный натяг, мм;

$Ra_B$  и  $Rz_B$  — высота микронеровностей вала, мкм;

$Ra_A$  и  $Rz_A$  — высота микронеровностей отверстия, мкм.

Поправки на обмятие микронеровностей принимаются по чертежам деталей или по табл. 26.5.

Таблица 26.5

Значения  $Ra$ , мкм, для некоторых минимальных диаметров

Точность изготовления (квалитет)	Среднее арифметическое отклонение профиля поверхности	Диаметр вала, мм		
		До 50	50...120	120...150
5	$Ra_B$	0,1...0,2	0,4	0,4
	$Ra_A$	0,2...0,4	0,8	0,8
6—7	$Ra_B$	0,4	0,8	1,6
	$Ra_A$	0,8	1,6	1,6
8	$Ra_B$	0,8	0,8	1,6...3,2
	$Ra_A$	1,6	1,6	1,6...3,2

Для обеспечения гарантированного натяга вал и ступицу проверяют на прочность. Максимально допустимый натяг, при котором будет отсутствовать пластическая деформация охватываемой детали:

$$\delta_{\max} = p_{\max} \delta_{\min} / p, \quad (26.9)$$

где  $p_{\max} = 0,5\sigma_{\text{ТА}}[1 - (d/d_2)^2]$  ( $\sigma_{\text{ТА}}$  — предел текучести ступицы);

$\delta_{\min}$  — расчетный минимальный натяг, мм;

$p$  — давление на рабочих поверхностях, МПа).

Потребный максимально допустимый натяг  $N_{T_{\max}}$  с учетом поправки на обмятие микронеровностей соединяемых деталей следует определять по формуле (26.8), учитывая расчетный натяг  $\delta_{\max}$ . Силу запрессовки определяют из выражения

$$F_3 = \pi p_{\max} d \ell f, \quad (26.10)$$

линейные размеры в формулу подставляются в миллиметрах, а силу получают в Ньютонах.

## Глава 27. РЕЗЬБОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

### 27.1. Виды резьбовых соединений

*Резьбовые соединения* — самый распространенный вид разъемных соединений. Они осуществляются с помощью крепежных деталей (болтов, винтов, шпилек, гаек и т.п.), основным элементом которых является резьба.

По форме поверхности, на которой образована резьба, различают резьбу *цилиндрическую* и *коническую*.

Цилиндрическая резьба имеет наибольшее распространение.

Коническая резьба применяется реже, например, для плотных соединений труб, вентилях и баллонов для газа (там, где требуется обеспечить герметичность).

Детали, образующие резьбовое соединение, имеют, соответственно, *наружную* (болт, винт, шпилька и т.п.) и *внутреннюю* (гайка) резьбу.

Если на поверхности детали выполняется один винтовой выступ, резьбу называют *однозаходной*. Используют также двух-, трех- и многозаходные резьбы. Число заходов больше трех применяется очень редко.

По направлению винтовой линии различают *правую* (используется в абсолютном большинстве конструкций) и *левую* резьбы.

Резьба может быть изготовлена нарезанием слесарным инструментом (метчиками, плашками) как вручную, так и на токарно-винторезных и резбобфрезерных станках или накаткой на специальных резбонакатных станках, а также отливкой чугунных, стальных, пластмассовых деталей или из цветных сплавов. Для тонкостенных деталей используется метод выдавливания, например из латуни.

По назначению резьбы делятся на *крепежные*, *крепежно-уплотняющие* и резьбы *для передачи движения* (ходовые).

К *крепежным* относят резьбы метрическую (рис. 27.1, *а*) или дюймовую (рис. 27.1, *б*) и специальную (часовую).

*Крепежно-уплотняющие* резьбы, используют в соединениях, требующих герметизации (соединения труб). К ним относятся резьбы: трубная цилиндрическая (рис. 27.1, *в*), трубная коническая (рис. 27.1, *г*), коническая дюймовая (рис. 27.1, *д*), круглая (рис. 27.1, *е*). Резьбы *для передачи движения* (ходовые) применяют в винтовых механизмах. Они, как правило, прямоугольные, трапецеидальные, упорные (рис. 27.1, *ж—и*).

*Основные параметры резьбы* (рис. 27.1, *а*) — наружный диаметр  $d$ , средний  $d_2$  и внутренний  $d_1$  диаметры, шаг резьбы  $P$ , высота теоретического профиля  $H$ , рабочая высота профиля  $h$ , угол профиля  $\alpha$  и число заходов  $n$ .

Наибольшее распространение на железнодорожном транспорте имеет метрическая резьба (рис. 27.1, *а*) с крупным и мелким шагом (табл. 27.1).

В условное обозначение однозаходной резьбы должны входить: буква М (метрическая), далее — номинальный диаметр резьбы, значение шага (только для резьбы с мелким шагом), буквы ЛН для левой резьбы.

Пример обозначения резьбы с номинальным диаметром 16 мм с крупным шагом: М16. То же с мелким шагом 2 мм: М16 × 2. То же, левой резьбы с крупным шагом: М16 ЛН.

Резьба с крупным шагом ( $P = 1...6$  мм) применяется при наружном диаметре  $d = 1...68$  мм. В обозначениях на чертежах наружный диаметр указывается в миллиметрах.

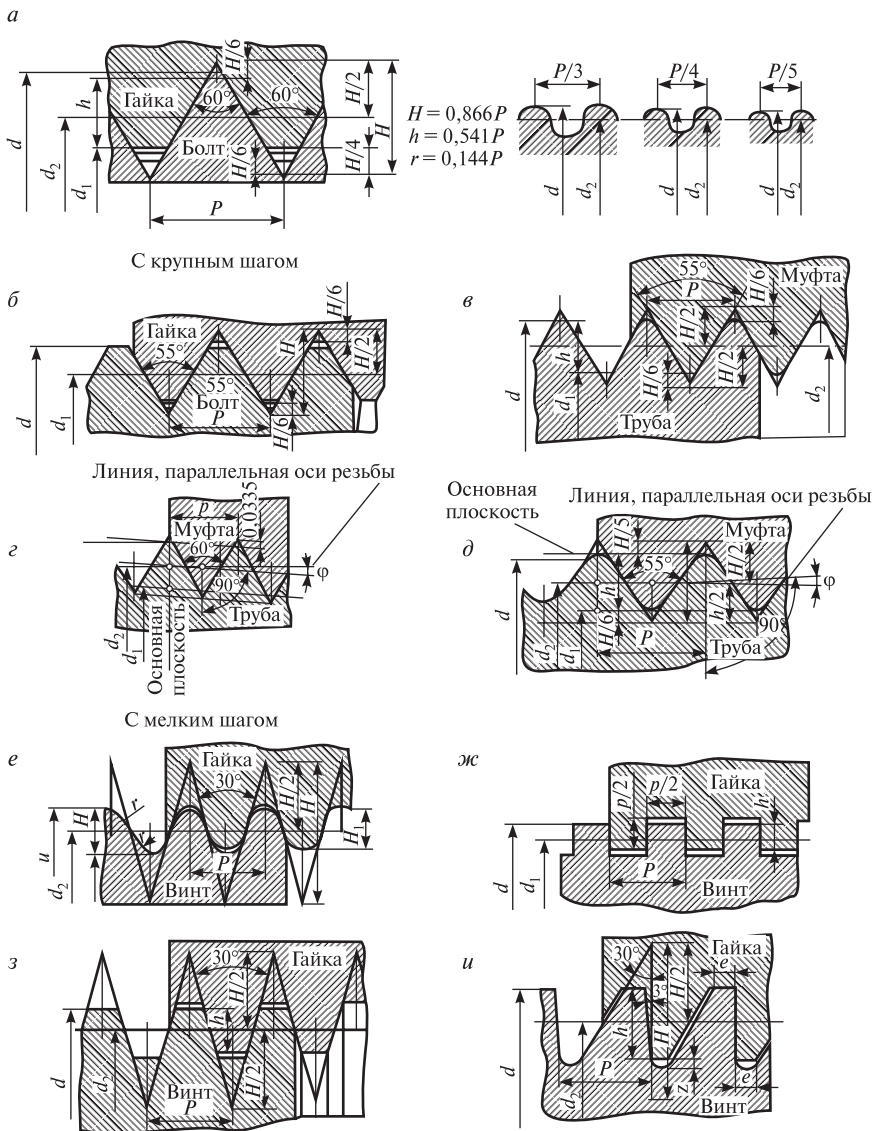


Рис. 27.1. Основные типы резьбы:

*a* — метрическая; *б* — дюймовая; *в* — трубная цилиндрическая; *г* — трубная коническая; *д* — коническая дюймовая; *е* — круглая; *ж* — прямоугольная; *з* — трапецидальная; *и* — упорная

Таблица 27.1

## Метрическая резьба, размеры, в мм

Наружный диаметр резьбы (в скобках — болта) $d$	Резьба с крупным шагом			С мелким шагом		
	Шаг резьбы $P$	Диаметр наружной резьбы		Шаг резьбы $P$	Диаметр наружной резьбы	
		внутренний $d_1$	средний $d_2$		внутренний $d_1$	средний $d_2$
6	1	4,918	5,350	0,75	5,188	5,513
8	1,25	6,647	7,188	1	6,918	7,350
10	1,5	8,376	9,026	1,25	8,647	9,188
12	1,75	10,106	10,863	1,25	10,647	11,188
(14)	2	11,835	12,701	1,5	12,376	13,026
16	2	13,835	14,701	1,5	14,376	17,026
(18)	2,5	15,294	16,376	1,5	16,376	17,026
20	2,5	17,294	18,376	1,5	18,376	19,026
(22)	2,5	19,294	20,376	1,5	20,376	21,026
24	3	20,752	22,051	2	21,835	22,701
(27)	3	23,752	25,051	2	27,835	28,701
30	3,5	26,211	27,727	2	27,835	28,701
(33)	3,5	29,211	30,727	2	30,835	31,701
36	4	31,670	33,402	3	32,752	34,051
(39)	4	34,670	36,402	3	35,752	37,051
42	4,5	37,129	39,077	3	38,752	40,051
(45)	4,5	40,129	42,077	3	41,752	43,051
(48)	5	42,587	44,752	3	44,752	46,051
(52)	5	46,587	48,752	3	48,752	50,051
56	5,5	50,046	52,428	3	52,752	54,051
(60)	5,5	50,046	56,428	4	55,670	57,402
64	6	57,505	60,103	4	59,670	61,402
(68)	6	61,505	64,103	4	63,670	65,402

Резьба с мелким шагом прочнее (увеличивается внутренний диаметр резьбы) и надежнее в отношении предупреждения ослабления затяжки в связи с уменьшением шага. Ее применяют при переменных нагрузках, тонкостенных деталях и для регулировки.

Дюймовая резьба (рис. 27.1, б) и специальная (часовая) относятся к крепежным резьбам. Дюймовая резьба характеризуется тем, что имеет треугольный профиль с углом  $\alpha = 55^\circ$ , а диаметр измеряется в дюймах

(1" = 25,4 мм), шаг — числом ниток резьбы на длине в 1". Применяется она при ремонте для замены резьбовых деталей старых и импортных машин, ввозимых из стран, в которых используется дюймовая система мер.

*Часовая резьба* является разновидностью метрической резьбы. Она нарезается на изделиях с наружным диаметром 0,25...0,9 мм и шагом 0,075...0,225 мм. В обозначениях указывается наружный диаметр, например, для  $d = 0,5$  мм обозначение резьбы — М0,5.

Резьбы *трубная цилиндрическая* (рис. 27.1, в) и *трубная коническая* (рис. 27.1, г), а также *коническая дюймовая резьба* (рис. 27.1, д) представляют собой мелкую треугольную резьбу с углом  $\alpha = 55^\circ$ . Отсутствие радиальных зазоров делает резьбовое соединение герметичным. Применяют такие резьбы, в основном, для соединения труб и арматуры трубопроводов. Условное обозначение резьбы дается по внутреннему диаметру (в дюймах) трубы, на которой она нарезана.

Применение конической дюймовой резьбы позволяет резко сократить время завинчивания и отвинчивания, что часто имеет решающее значение для быстроразборных соединений. При нарезании на диаметре 1" обозначение резьбы — K1".

*Круглая резьба* (рис. 27.1, е) имеет угол профиля  $\alpha = 30^\circ$ . Эту резьбу применяют для резьбовых соединений, воспринимающих большие динамические нагрузки (сцепки локомотивов, вагонов и т.п.), для соединений, работающих в загрязненной среде с частым отвинчиванием или завинчиванием (пожарная и гидравлическая арматура и др.), а также в тонкостенных изделиях (цоколи и патроны электрических ламп, части противопогазов и т.п.). Эту резьбу удобно изготавливать отливкой (из чугуна, стекла, пластмассы), а также методом выдавливания в тонкостенных деталях.

В настоящее время в мировой практике все большее распространение получает *метрическая коническая резьба*, одним из преимуществ которой является возможность получения соединения наружной конической с внутренней цилиндрической метрической резьбой.

Прямоугольная резьба (рис. 27.1, ж) относится к резьбам для передачи движения под нагрузкой. Она имеет прямоугольный или квадратный профиль, используется в токарно-винторезных станках, обладает пониженной прочностью. При изнашивании образуют-

ся трудно устранимые осевые зазоры. Резьба не стандартизована. Применяется сравнительно редко в малонагруженных передачах винт—гайка.

Резьба *трапецеидальная* (рис. 27.1, з) одно- и многозаходная, имеет профиль симметричной трапеции с углом  $\alpha = 30^\circ$ . Для червячных передач угол профиля составляет  $\alpha = 40^\circ$ .

Эта резьба применяется для передачи реверсивного движения под нагрузкой (винтовые механизмы, ходовые винты в станках и т.п.). Имея повышенную прочность и технологичность, эта резьба в передачах винт—гайка почти полностью вытеснила прямоугольную резьбу.

В условное обозначение трапецеидальной однозаходной резьбы должны входить буквы Тг — номинальный диаметр резьбы и значение шага. Например, обозначение резьбы номинальным диаметром 32 мм и шагом 6 мм: Тг 32×6.

Размеры некоторых трапецеидальных резьб приведены в табл. 27.2.

Таблица 27.2

Трапецеидальная резьба (размеры, мм)

Наружный диаметр резьбы (в скобках — болта) $d$	Шаг резьбы $P$	Диаметр наружной резьбы		Наружный диаметр резьбы (в скобках — болта) $d$	Шаг резьбы $P$	Диаметр наружной резьбы	
		средний $d_2$	внутренний $d_1$			средний $d_2$	внутренний $d_1$
1	2	3	4	5	6	7	8
16	2	15	13,5	50	3	48,5	46,5
	4	14	11,5		8	46	41
					12	44	37
20	2	19	17,5	(55)	3	53,5	51,5
	4	18	15,5		8	51	46
					12	49	42
26	3	25	23,5	60	3	58,3	56,5
	5	23,5	20		8	56	51
	8	22	17		12	54	47
32	3	30,5	28,5	(70)	4	68	65,5
	6	29	25		10	65	59
	10	27	21		16	62	53
36	3	34,5	32,5	80	4	78	75,5
	6	33	29		10	75	69
	10	29	25		16	72	62



1	2	3	4	5	6	7	8
40	3	38,5	36,5	(90)	5	87,5	84
	6	37	33		12	84	77
	10	35	29		20	80	68
(44)	3	42,5	40,5	100	5	97,5	94
	8	40	35		12	94	87
	12	38	31		20	90	78

Резьба *упорная* (рис. 27.1, *и*) имеет профиль несимметричной трапеции. Наклон рабочей части профиля имеет угол  $3^\circ$ , нерабочей стороны профиля  $30^\circ$ . Применяется для передачи движения при больших нагрузках, направленных в одну сторону (грузовые винты домкратов, винтовых прессов, нажимных устройств и т.п.). В условное обозначение упорной резьбы должны входить буквы УП(С), номинальный диаметр и шаг, например УП(С)50×12. Для левой резьбы УП(С)50×12ЛН, т.е. аналогично обозначению трапецидальной резьбы.

## 27.2. Крепежные детали, типы соединений и применяемые материалы

*Крепежные детали и типы соединений.* Форма резьбового соединения определяется типом применяемых крепежных деталей. Наибольшее распространение имеют *болты, винты, шпильки, гайки и вставки*.

*Болты* (винты) представляют собой стержень с головкой и резьбовым концом.

*Шпилька* имеет два резьбовых конца.

*Вставка* представляет собой винтовую пружину из проволоки ромбического сечения, заворачиваемую с натягом в резьбовое отверстие, или втулку с наружной и внутренней резьбой.

Использование тех или иных крепежных деталей определяется прочностью материала соединяемых деталей, частотой сборки и разборки соединения в эксплуатации.

Болтами или винтами скрепляют детали не очень большой толщины, а также при многократной разборке и сборке соединений.

При большой толщине соединяемых деталей предпочтительны соединения с помощью шпилек и вставок.

Отверстия в соединяемых деталях выполняют несколько большего диаметра, чтобы можно было легко вставить болт, не повредив резьбу.

Болты изготавливают, как правило, из фасонного прутка. Резьбу накатывают или нарезают на заготовках, полученных горячей высадкой из прутка. По форме головки болтов изготавливают шестигранные (рис. 27.2, *а*), квадратные (рис. 27.2, *б*), цилиндрические (рис. 27.2, *в*), полукруглые (рис. 27.2, *г*), с потайной головкой (рис. 27.2, *д*), с углублением под шестигранный ключ (рис. 27.2, *е*) или под специальную отвертку (рис. 27.2, *ж*).

Шпильки (рис. 27.2, *в*) используют, когда по конструктивным особенностям соединений установить болт или винт нельзя. Диа-

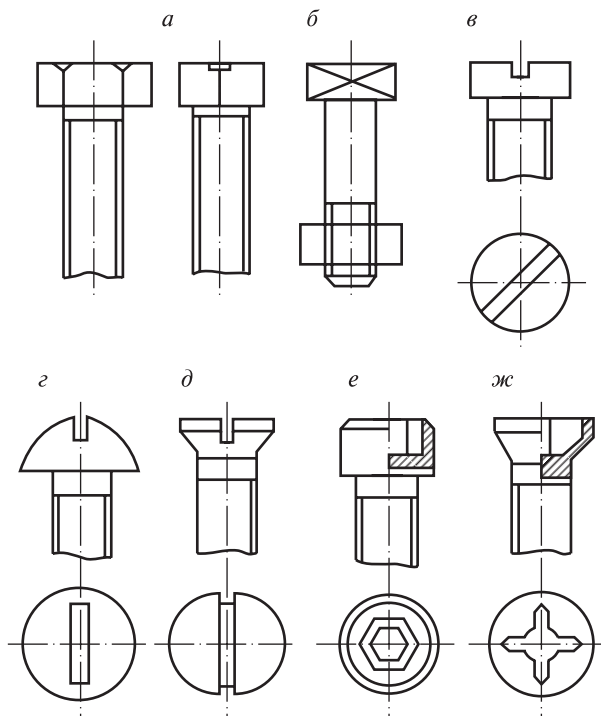


Рис. 27.2. Конструктивные формы головок болтов:

*а* — шестигранная; *б* — квадратная; *в* — цилиндрическая; *г* — полукруглая; *д* — потайная; *е* — с углублением под шестигранный ключ; *ж* — с углублением под специальную отвертку

метр резьбы на обоих концах шпильки одинаковый, глубина ввинчивания зависит от материала соединяемых деталей. Шпильки изготавливают, как правило, двух типов: с проточкой и без проточки со сбегом резьбы на посадочном конце. Шпильку ввинчивают в деталь с помощью шпильковерта.

При необходимости болты изготавливают с подголовком, препятствующим повороту их в детали (рис. 27.3); такие болты называются *закладными*.

С торца головку болта обтачивают на конус (снимают фаску). На железнодорожном транспорте используют и иные конструктивные формы головок.

Болты, винты и шпильки снабжены гайками. Конструктивная форма гаек разнообразна (рис. 27.4). Это гайки с одной фаской (рис. 27.4, а), с одной фаской и проточкой (рис. 27.4, б), прорезные (рис. 27.4, в), корончатые (рис. 27.4, г), со шлицами (рис. 27.4, д), гайки-барашки (рис. 27.4, е, ж).

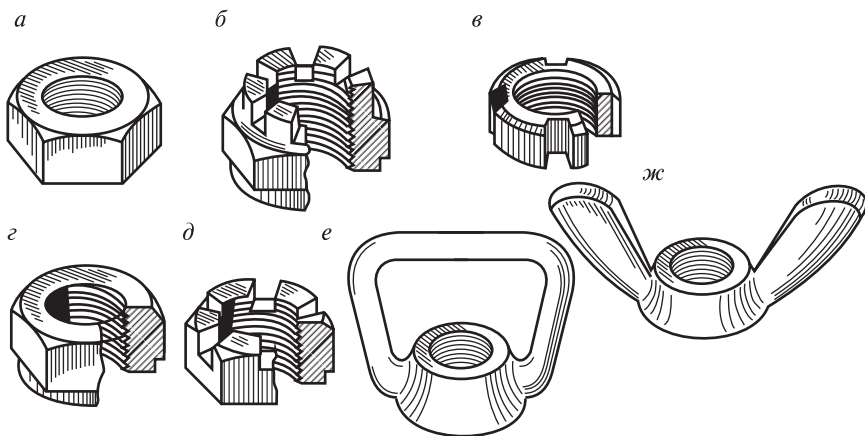


Рис. 27.4. Типы гаек:

а — с одной фаской; б — с одной фаской и проточкой; в — прорезные; г — корончатые; д — со шлицами; е, ж — гайки-барашки

(рис. 27.4, в), корончатые (рис. 27.4, г), гайки со шлицами (рис. 27.4, д) и гайки-барашки (рис. 27.4, е, ж).

Гайки-барашки используются в конструкциях, где нет необходимости в значительной силе затяжки соединения или при частых отвинчивании или завинчивании вручную.

В зависимости от высоты гайки бывают: нормальные (высота  $H \approx 0,8d$ ), высокие ( $H \approx 1,2d$ ) и низкие ( $H \approx 0,5d$ ).

*Высокие* гайки применяют при частых завинчивании и отвинчивании для уменьшения износа резьбы, при больших нагрузках, а *низкие* — при малых осевых силах.

Чтобы исключить повреждение поверхностей соединяемых деталей, при завинчивании гаек под них подкладывают шайбы. Толщина шайбы и наружный ее диаметр зависят от диаметра резьбового соединения. Назначение шайб — увеличение опорной поверхности и предохранение деталей от задиров. Наибольшее распространение получили шайбы круглые (рис. 27.5, а). Толщина шайбы и наружный диаметр зависят от диаметра резьбового изделия. Для предупреждения самоотвинчивания используют стопорные устройства, которые основаны на следующих принципах:

а) *стопорение дополнительным трением* с помощью контргаяк, пружинных шайб, самотормозящих гаек или обжатой на эллипс тонкостенной части самоконтрящейся гайки, стопорного кольца или пробки из полиамида (рис. 27.5, б—ж);

б) *стопорение специальными деталями* (рис. 27.5, е—з), например, фиксация болта относительно гайки с помощью шплинта или специальной стопорной гайки или проволоки;

в) *стопорение созданием местных пластических деформаций*, например, кернением гаек или головок винтов, использование специальных удерживающих накладок, деформируемых шайб (рис. 27.5, и, к).

В зависимости от конфигурации гаек, головок болтов (винтов) для их завинчивания используют различные ключи. Для шестигранных и квадратных головок болтов (винтов) и гаек применяют ключи, показанные на рис. 27.6, а—в; для круглых гаек со шлицами используется серпообразный ключ (рис. 27.6, г). Гайки с отверстиями завинчивают и отвинчивают рожковым ключом (рис. 27.6, д). Если требуется создать строго определенную силу затяжки гайки или болта (винта), используют специальные динамометрические

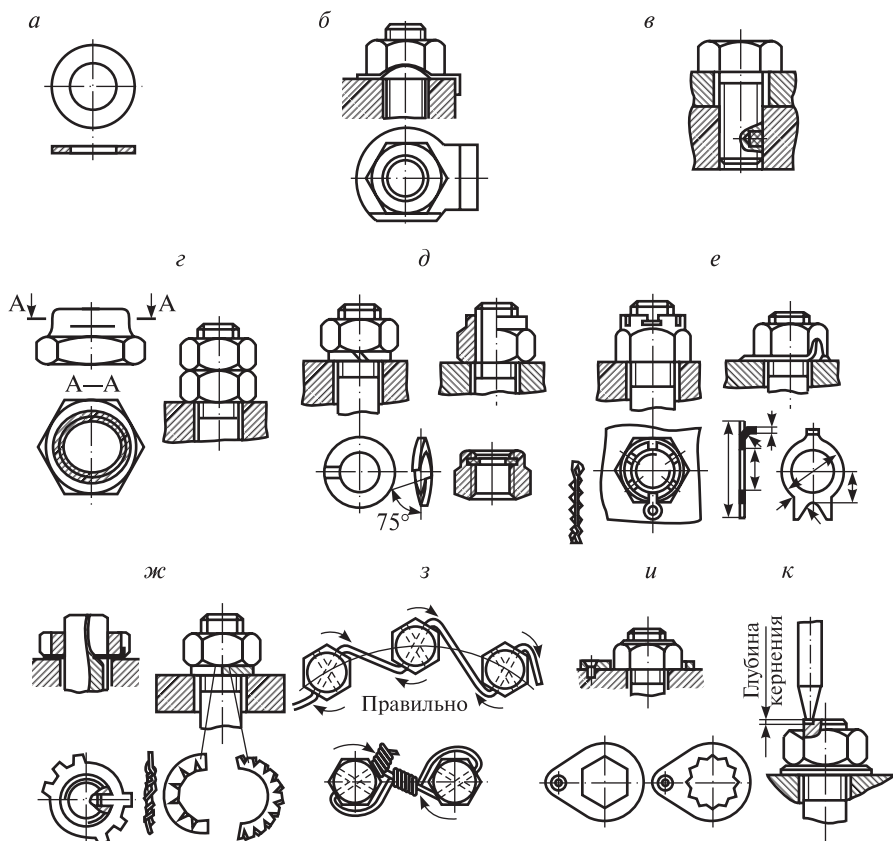


Рис. 27.5. Стопорные устройства:

*а* — шайба круглая; *б—ж* — стопорение дополнительным трением; *е—з* — стопорение специальными деталями; *и, к* — стопорение созданием местных пластических деформаций

ключи (рис. 27.6, *е*). В массовом производстве на заводах и в депо используют пневматические и электрические ключи.

**Материалы крепежных деталей.** Основные механические характеристики материалов болтов (винтов), шпилек и гаек нормированы ГОСТ 1759-87.

Для болтов, винтов, и шпилек из углеродистых и легированных сталей установлены 12 классов прочности и соответствующие им рекомендуемые марки сталей. Для гаек, изготавливаемых из тех же сталей, установлены 7 классов прочности (табл. 27.3). Выбор

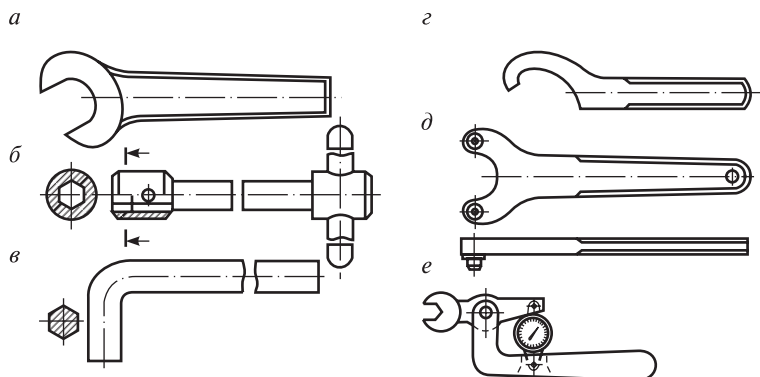


Рис. 27.6. Конструкции ключей:  
*а—в* — гаечные; *г* — серпообразный; *д* — рожковый;  
*е* — динамометрический

материала деталей определяется условиями работы и технологией изготовления крепежных соединений.

Таблица 27.3

**Механические характеристики материалов резьбовых деталей**

Класс прочности болтов	$\sigma_B$ , МПа		$\sigma_T$ , МПа	Марки стали	
	min	max		Болт	Гайка
3,6	300	490	200	Ст3; 10	Ст3
4,6	400	550	240	20	Ст3
5,6	500	700	300	30; 35	10
6,6	600	800	360	35; 45; 40Г	15
8,8	800	1000	640	35Х; 38ХА	20; 35; 45
10,9	1000	1200	900	40Г2; 40Х; 30ХГСА	35Х; 38ХА

*Примечание.* Первое число в обозначении класса прочности, умноженное на 100, определяет минимальное значение  $\sigma_B$  (МПа), второе, деленное на 10, соответствует приблизительно отношению  $\sigma_T/\sigma_B$ .

Повышение прочности крепежных деталей добиваются термообработкой или упрочнением.

Для защиты крепежных деталей из углеродистых сталей от коррозии на них наносят окисные пленки или гальванические покрытия (цинковое, хромовое, медное, кадмиевое и др.) толщиной 6—12 мкм.

## 27.3. Особенности работы резьбовых соединений и их расчет

Надежность резьбового соединения оценивается легкостью сборки (затяжки гайки или болта) и сохранностью затяжки, т.е. самоторможением винтовой пары. Рассмотрим, как выполняются эти условия.

*Затяжка соединений.* Резьбовые соединения при сборке обычно затягивают с помощью гаечных ключей. Усилие  $F_{\text{кл}}$ , прикладываемое к рукоятке ключа, создает момент затяжки

$$M_{\text{кл}} = F_{\text{кл}} L_{\text{р}}, \quad (27.1)$$

где  $F_{\text{кл}}$  — усилие на конце ключа;

$L_{\text{р}}$  — расчетная клина ручки ключа.

Этот момент затрачивается на преодоление трения торца гайки о неподвижную опорную поверхность соединяемых деталей и сопротивление в резьбе

$$M_{\text{кл}} = M_{\text{р}} + M_{\text{т}}, \quad (27.2)$$

где  $M_{\text{р}}$  — момент в резьбе;

$M_{\text{т}}$  — момент сил трения на опорном торце гайки.

Момент в резьбе

$$M_{\text{р}} = F_3 (d_2 / 2) \text{tg} (\Psi + \phi'), \quad (27.3)$$

где  $F_3$  — сила затяжки болта;

$\Psi$  — угол подъема винтовой линии;

$d_2$  — средний диаметр резьбы;

$\phi'$  — приведенный угол трения.

Момент сил трения на опорной поверхности

$$M_{\text{т}} = 1/3 F_3 f_{\text{т}} (D^3 - d_0^3) / (D^2 - d_0^2), \quad (27.4)$$

где  $f_{\text{т}}$  — коэффициент трения между поверхностью гайки (головки) и детали;

$D$  — диаметр захвата гаечного ключа;

$d_0 = d_1 + (1 \dots 1,5)$  — диаметр отверстия под болт, мм.

Подставляя полученные выражения  $M_{\text{р}}$  и  $M_{\text{т}}$  в формулы (27.1) и (27.2) для момента завинчивания, получим момент на ключе:

$$M_{\text{кл}} = F_{\text{кл}} L_{\text{р}} = M_{\text{р}} + M_{\text{т}} = F_3 [(d_2 / 2) \text{tg} (\Psi + \phi') + 1/3 F_3 f_{\text{т}} (D^3 - d_0^3) / (D^2 - d_0^2)]. \quad (27.5)$$

Этот момент на практике измеряют и задают с помощью *динамометрического ключа* (рис. 27.6, е). По значению  $M_{\text{кл}}$  и известной силе  $F_{\text{кл}}$ , приложенной к ключу, можно определить требуемую длину рукоятки ключа.

*Условие прочности на растяжение ненапряженного болтового соединения* имеет вид

$$\sigma_p = 4F/(\pi d_1^2) \leq [\sigma_p], \quad (27.6)$$

где  $\sigma_p$  и  $[\sigma_p]$  — соответственно расчетное и допускаемое напряжение растяжения в поперечном сечении нарезанной части болта;

$F$  — растягивающая сила;

$d_1$  — внутренний диаметр резьбы болта.

*Проектный расчет* ненапряженного болтового соединения сводится к определению внутреннего диаметра резьбы  $d_1$  из условия прочности (27.6).

При этом *допускаемое напряжение* на растяжение принимается равным

$$[\sigma_p] = \sigma_T / [n_p], \quad (27.7)$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести материала болта;

$[n_p]$  — допускаемый коэффициент запаса прочности, принимается 1,5...3,0.

Если болт испытывает растяжение и кручение только от затяжки, требуемую силу затяжки болта определяют в зависимости от характера нагружения резьбового соединения. На железнодорожном транспорте такие болтовые соединения встречаются в клеммовых соединениях, в креплениях люков, крышек и т.п. В таких соединениях стержень болта растягивается силой затяжки  $F_z$  и закручивается моментом в резьбе.

Проверочный расчет выполняют по приведенному напряжению для опасной точки:

$$\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma_p]. \quad (27.8)$$

Эквивалентное напряжение, в свою очередь, определяется из выражения

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_p^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} \cong (1,1...1,3) \sigma_p, \quad (27.9)$$

где  $\sigma_p$  — напряжение растяжения в опасном сечении болта;

$\tau_{\text{кр}}$  — наибольшее напряжение кручению.



Уже отмечалось, что все крепежные резьбы удовлетворяют условию самоторможения. Но самоторможение надежно реализуется только при статических нагрузках. При переменных нагрузках и, особенно, при вибрациях, что довольно-таки часто бывает на железнодорожном транспорте, вследствие взаимных микросмещений поверхностей трения коэффициент трения в резьбе существенно снижается. Условие самоторможения нарушается и происходит самоотвинчивание гаек и винтов, которое может привести к разрушению резьбового соединения и даже вызвать аварию.

При расчете эквивалентного напряжения  $\sigma_{\text{экв}}$  момент в резьбе  $M$  определяют по формуле (27.3). Сила затяжки для разрезной ступицы (рис. 27.7) составит

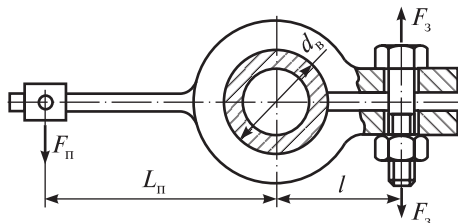


Рис. 27.7. Клеммовые соединения

$$F_3 = kM_y d_b / (zf (d_b + 2l)), \quad (27.10)$$

где  $k$  — коэффициент запаса смещения (сдвига) клеммы  $k = 1, 2 \dots 1, 5$ ;

$M_y = F_п L_п$  — уравновешивающий момент от противовеса (см. рис. 27.7);

$z$  — число стягиваемых болтов;

$f$  — коэффициент трения;

$d_b$  — диаметр валика;

$l$  — плечо от оси валика до оси затяжки.

Для клеммы с разъемной ступицей

$$F_3 = kM_y / (zfd_b). \quad (27.11)$$

Проектный расчет внутреннего диаметра резьбы болта с учетом формул (27.10) и (27.11) будет:

$$\sqrt{4k_3 F_3 / (\pi [\sigma_p] l)} = 1,3 \sqrt{F_3 / [l \sigma_p]}, \quad (27.12)$$

где  $k_3 = 1,3$  — коэффициент затяжки (учитывает работу болта на кручение при затяжке).

*Расчет болта, затянутого с дополнительной осевой нагрузкой.* Это болты (рис. 27.8) крепления крышек цистерн для жидкостей (продуктов нефтепереработки) и газа, нагруженных давлением выше

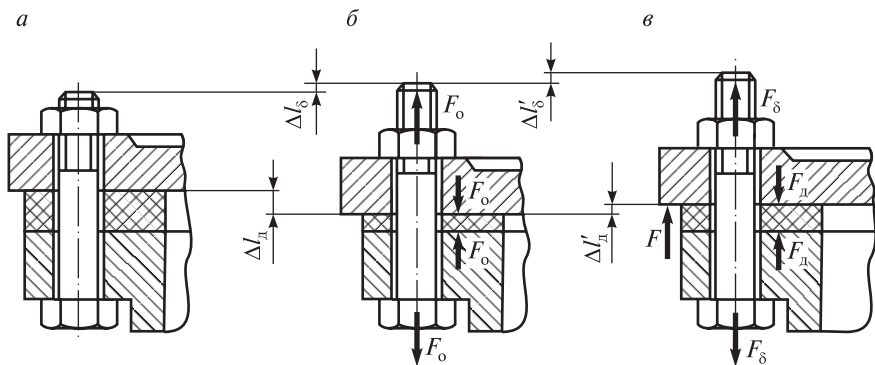


Рис. 27.8. Схема деформаций деталей соединения:  
*a* — исходное состояние; *б* — после затяжки; *в* — при действии внешней нагрузки

атмосферного, и болты подшипниковых узлов. Соединение имеет исходное положение, рис. 27.8, *a*, дадим соединению предварительную затяжку силой  $F_0$  (рис. 27.8, *б*), в результате упругой деформации болт растягивается на величину  $\Delta l'_б$ , а детали стягиваются на величину  $\Delta l_д$ .

Появление внешней растягивающей нагрузки  $F$  (рис. 27.8, *в*) приводит к тому, что болт дополнительно удлиняется на величину  $\Delta l'_б$  (действует растягивающая сила  $F_б$ ), а сжатие деталей уменьшит прижатие на  $\Delta l'_д$  (действует сжимающая сила  $F_д$ ). Суммарная нагрузка на затянутый болт

$$F_б = F_0 + \chi F, \quad (27.13)$$

на деталь

$$F_д = F_0 - (1 - \chi)F, \quad (27.14)$$

где  $\chi$  — коэффициент внешней нагрузки, показывающий, какая часть внешней нагрузки  $F$  воспринимается болтом. Для соединений стальных и чугунных деталей без упругих прокладок  $\chi = 0,2...0,3$ ; для соединений тех же деталей, но с упругими прокладками (полиэтилен, резина)  $\chi = 0,4...0,5$ .

Соблюдая условия сохранения плотности стыка соединяемых деталей (невозможность образования зазора), принимают

$$F_0 = k_3 (1 - \chi)F, \quad (27.15)$$

где  $k_3$  — коэффициент запаса предварительной затяжки, в соединениях без прокладок при постоянной нагрузке,  $k_3 = 1,25 \dots 2,0$ ; при переменных  $k_3 = 2,0 \dots 5,0$ .

Заменив в выражении (27.13) значение  $F_0$  полученным в (27.15), имеем:

$$F_6 = k_3 (1 - \chi)F + \chi F. \quad (27.16)$$

В расчете на прочность влияние крутящего момента при затяжке учитывается коэффициентом 1,3, который вводится в формулу (27.16). Значение крутящего момента пропорционально  $F_0$ , если болт затягивается только предварительно, и коэффициент 1,3 необходимо отнести к первому слагаемому формулы (27.16), тогда расчетная сила затяжки болта будет

$$F_p = (1,3 k_3 (1 - \chi) + \chi)F. \quad (27.17)$$

Порочность болта оценивается эквивалентным напряжением, при выполнении проектного расчета диаметр болта определяется из выражения

$$d_p \geq 1,13 \sqrt{F_p / [\sigma_p]}. \quad (27.18)$$

*Расчет болта, нагруженного поперечной силой  $F_r$ , при установке его с зазором (рис. 27.9, а). Для обеспечения неподвижности соединяемых листов 1, 2, 3 болт затягивают силой  $F_3$ . Во избежание*

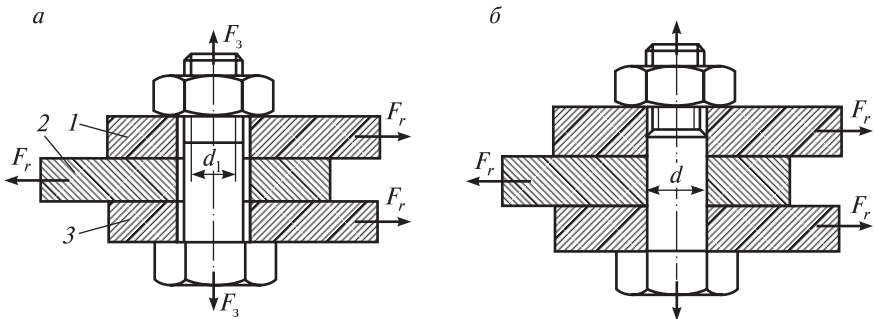


Рис. 27.9. К расчету болта:

*а* — нагруженного поперечной силой при установке с зазором; *б* — нагруженного поперечной силой при установке без зазора

работы болта на изгиб его следует затягивать так сильно, чтобы силы трения на стыках деталей были больше сдвигающих сил  $F_r$ . Обычно силу трения принимают с запасом:  $R_f = 1,2 F_r$ .

Определим требуемую затяжку болта. Сила затяжки болта может создавать нормальное давление на  $i$  трущихся поверхностях; для рассматриваемого случая,  $i = 2$ .

$$F_{r3} = R_f / (if) = 1,2 F_r / (if) = 1,2 F_r / 2f.$$

По найденной силе затяжки болт рассчитывают как испытывающий растяжение и кручение.

*Расчет болта, нагруженного поперечной силой, с установкой его без зазора* (рис. 27.9, б). Такое соединение рассчитывают на срез болта:

$$\tau_{cp} \leq F_r / [(\pi d^2 / 4) i] \leq [\tau_{cp}], \quad (27.19)$$

где  $F_r$  — поперечная сила;

$d$  — диаметр стержня в опасном сечении;

$[\tau_{cp}]$  — допускаемое напряжение на срез болта;

$i$  — число плоскостей среза.

Допускаемое напряжение на срез болта принимается равным  $[\tau_{cp}] = (0,2 \dots 0,3) \sigma_T$ .

В проектном расчете диаметр болта определяют из выражения

$$d = \sqrt{4 F_p / (\pi [\tau_{cp}] i)} = 1,13 \sqrt{F_r / ([\tau_{cp}] i)}. \quad (27.20)$$

*Расчет групповых болтов.* В этом случае определяют силу, действующую на один болт:

$$F = \sum F / n, \quad (27.21)$$

где  $\sum F$  — внешняя сила, действующая на группу болтов;

$n$  — число болтов в группе.

Проверочный и проектный расчеты выполняют для одного болта. Все болты принимают одного размера.

*Расчет резьбы на прочность.* При расчете резьбы на прочность используется следующее допущение: все витки резьбы нагружены равномерно.

*Расчет резьбы по направлению смятия.* Условие прочности при расчете резьбы по направлению смятия (рис. 27.10) имеет вид

$$\sigma_{\text{см}} \leq F/(\pi d_2 h n) \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (27.22)$$

где  $F$  — осевая сила;

$d_2$  — средний диаметр резьбы;

$h$  — высота профиля;

$n$  — число витков резьбы в гайке.

Допускаемое напряжение смятия  $[\sigma_{\text{см}}]$  в резьбе принимается для углеродистой стали  $(0,8...1,0)\sigma_T$ ; для легированной стали  $(0,6...0,8)\sigma_T$ ; для чугуна  $(0,6...0,8)\sigma_B$ .

В проектном расчете при выбранном профиле резьбы требуемое число витков резьбы в гайке

$$n = F/(\pi d_2 h [\sigma_{\text{см}}]). \quad (27.23)$$

*Расчет резьбы по направлению среза.* Условие прочности резьбы имеет вид:

$$\text{для винта } \tau_{\text{ср}} \leq F/(\pi d_1 k H) \leq [\tau_{\text{ср}}]; \quad (27.24)$$

$$\text{для гайки } \tau_{\text{ср}} \leq F/(\pi d k H) \leq [\tau_{\text{ср}}], \quad (27.25)$$

где  $F$  — сила, действующая на болт;

$d_1$  — внутренний диаметр резьбы;

$d$  — наружный диаметр резьбы;

$k$  — коэффициент учитывающий тип резьбы; для треугольной резьбы  $k = 0,8$ ; для прямоугольной  $k = 0,5$ ; для трапецидальной резьбы  $k = 0,65$ ;

$H$  — высота гайки.

*Проектный расчет* (материал гайки и винта считается одинаковым).

Тип резьбы выбирает конструктор. Определив диаметр  $d_1$ , в этом виде расчета можно вычислить высоту гайки:

$$H = F/(\pi d_1 k [\tau_{\text{ср}}]). \quad (27.26)$$

Стандартные резьбовые крепежные изделия на прочность не рассчитывают.

**Пример 27.1.** Рассчитать болты, соединяющие крышку с цилиндрическим сосудом для сжатого воздуха, при следующих данных: давление сжатого воздуха в цилиндре  $p = 0,4$  н/мм<sup>2</sup>; внутренний диаметр цилиндра  $D = 400$  мм; число

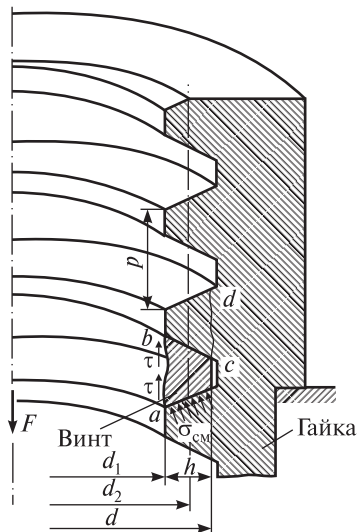


Рис. 27.10. К расчету резьбы по направлению смятия

болтов  $n = 12$ ; материал болтов — сталь 20; класс прочности 4.6; затяжка контролируемая.

*Решение.* В рассчитываемом соединении болты поставлены с предварительной затяжкой. Дополнительная затяжка их под нагрузкой отсутствует. Внешняя сила  $F_B$ , действующая на болтовое соединение, представляет собой силу внутреннего давления сжатого воздуха на крышку цилиндра:

$$F_B = (\pi D^2/4)p = (3,14 \cdot 400^2/4) \cdot 0,4 = 50\,240 \text{ Н.}$$

Внешняя сила, приходящаяся на один болт,

$$F = F_B/n = 50\,240/12 = 4186,66 \text{ Н.}$$

Примем коэффициент внешней нагрузки  $\chi = 0,5$  (поскольку для герметизации соединения между крышкой и фланцем цилиндра поставлена полиэтиленовая прокладка), а коэффициент запаса предварительной затяжки  $k_3 = 3$ . Тогда расчетная осевая сила  $F_p$ , действующая на болт, с учетом крутящего момента предварительной затяжки и приложения внешней силы  $F$ , будет

$$F_p = (1,3k_3(1 - \chi) + \chi)F = (1,3 \cdot 3(1 - 0,5) + 0,5) \cdot 4186,66 = 10\,257,30 \text{ Н.}$$

Для заданного класса прочности предел текучести материала болтов  $\sigma_T = 240 \text{ Н/мм}^2$ . При контролируемой затяжке болтов назначаем коэффициент запаса прочности  $[K_T] = 2,2$ . Тогда допускаемое напряжение на растяжение

$$[\sigma_T] = \sigma_T/[K_T] = 240/2,2 = 109 \text{ Н/мм}^2.$$

Расчетный диаметр резьбы болтов

$$d_p = 1,13 \sqrt{F_p/[\sigma_p]} = 1,13 \sqrt{10257,30/109} \cong 11 \text{ мм.}$$

По табл. 27.1 принимаем резьбу М12 с шагом  $p = 1,75 \text{ мм}$ , для которой средний наружный диаметр резьбы равен 10,863 мм.

## Глава 28. ШПОНОЧНЫЕ, ШТИФТОВЫЕ, ШЛИЦЕВЫЕ И ПРОФИЛЬНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ

### 28.1. Шпоночное соединение

Соединения двух соосных цилиндрических деталей (вала и ступицы) для передачи вращения между ними осуществляется с помощью специальной детали — *шпонки*, устанавливаемой в пазы соединяемых деталей (рис. 28.1).

Шпоночные пазы на валах получают фрезерованием, а в ступицах — протягиванием или станках (фрезерном или долбежном).

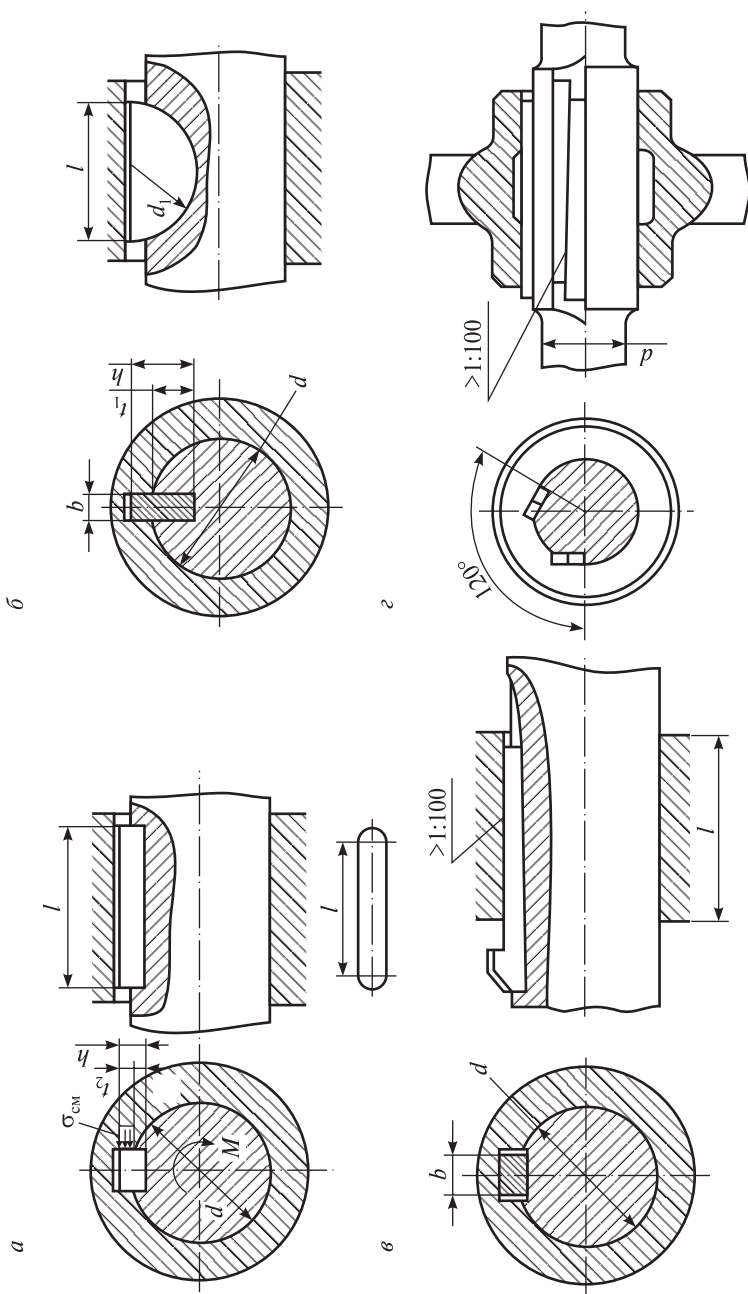


Рис. 28.1. Соединения шпонками:

*a* — призматическими; *б* — сегментными; *в* — клиновыми; *г* — тангенциальными

Шпоночные соединения делятся на две группы: *ненапряженные и напряженные*.

*Ненапряженные соединения* осуществляются призматическими и сегментными шпонками (рис. 28.1, а, б), которые не вызывают деформации ступицы и вала при сборке. Шпоночные пазы на валах выполняют дисковыми или торцовыми фрезами.

*Напряженные соединения* осуществляется клиновыми и тангенциальными шпонками (рис. 28.1, в, г), которые вызывают деформацию вала и ступицы при сборке.

Тангенсальные шпонки (рис. 28.1, г) представляют собой брусок, составленный из двух односкосных клиньев, установленных в паз вала таким образом, что одна из граней клина оказывается касательной к цилиндрической поверхности вала. Внешние грани двух клиньев, образующих тангенсальную шпонку, параллельны. Эти шпонки применяют при больших динамических нагрузках. По сравнению с врезанными тангенсальные шпонки могут передавать большой вращающий момент.

Шпонки всех типов стандартизованы, их размеры выбирают по ГОСТам. Простота конструкции, компактность, невысокая стоимость изготовления, надежность в эксплуатации, удобства сборки и разборки обеспечивают широкое использование *шпоночных соединений* в транспортном машиностроении.

К *недостаткам шпоночных соединений* следует отнести: ослабление прочности вала и ступицы шпоночными пазами; наличие значительной концентрации напряжений в зоне паза, что снижает сопротивление усталости вала; необходимость удлинения ступиц колес при передаче больших моментов; высокие требования к точности выполнения шпоночных пазов; трудность обеспечения взаимозаменяемости, т.е. необходимость ручной пригонки или подбора шпонки по пазу.

*Соединения призматическими шпонками* (рис. 28.1, а) имеют наибольшее распространение.

*Соединения сегментными шпонками* (пластинами в виде сегмента, см. рис. 28.1, б) имеют более глубокую посадку и не перекашиваются под нагрузкой, они взаимозаменяемые. Однако глубокий паз существенно ослабляет вал, поэтому сегментные шпонки используют преимущественно для закрепления деталей на мало нагруженных



участках вала (например, на входных или выходных хвостовиках валов).

*Соединения клиновыми шпонками* (см. рис. 28.1, в). Клиновые шпонки представляют собой односкосные самотормозящие клинья с уклоном 1:100, которые ударами молотка забивают в пазы вала и ступицы. Рабочими поверхностями клиновых шпонок являются верхняя и нижняя широкие грани. По боковым граням имеется зазор. Применение клиновых шпонок ограничено. Их, в основном, применяют в тихоходных передачах.

*Соединения тангенциальными шпонками* (см. рис. 28.1, г). Тангенциальные шпонки отличаются от клиновых тем, что натяг между валом и ступицей создается ими не в радиальном, а в тангенциальном (касательном) направлении. Одна из широких граней такой шпонки направлена по касательной к сечению вала, а одна из узких граней — по радиусу вала. Такое расположение шпонок вызывает необходимость постановки в соединение двух пар шпонок под углом 120°. Тангенциальная шпонка выполняется из двух односкосных клиньев с уклоном 1:100 каждый. Используют такие шпонки в деталях при больших динамических нагрузках, а также для передачи реверсивных движений.

*Расчет шпоночных соединений.* Рассчитывают шпонку как наиболее слабую деталь соединения. Размеры стандартных шпонок подбирают из условия прочности на смятие.

Рассмотрим последовательность расчета призматической шпонки (см. рис. 28.1, а).

Размеры сечений шпонки (ширину  $b$  и высоту  $h$ ), глубину паза вала  $t_1$  выбирают в зависимости от диаметра  $d$  вала по ГОСТ 23360. Длину шпонки  $l$  принимают на 5—10 мм меньше длины ступицы, округляя до ближайшего большего размера по стандарту, и проверяют на смятие. Некоторые стандартные значения  $l$  приведены в табл. 28.1.

Напряжения смятия определяют в предположении их равномерного распределения по поверхности контакта:

$$\sigma_{\text{см}} = F_t / A_{\text{см}} \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (28.1)$$

где  $F_t = 2M/d$  — окружная сила, передаваемая шпонкой;

$A_{\text{см}} = (0,95h - t)l_p$  — площадь смятия.

Таблица 28.1

## Стандартные размеры, мм, шпонок по ГОСТ 23360-78

Диаметр вала $d$	Размеры сечений шпонок		Глубина паза		Радиус закругления пазов $R$		Предельные размеры длин $l$ шпонок	
	$b$	$h$	вала $t$	втулки $t_1$	min	max	min	max
Св. 12 до 17	5	5	3	2,3	0,16	0,25	10	56
Св. 17 до 22	6	6	3,5	2,8			14	70
Св. 22 до 30	8	7	4	3,3			0,25	0,4
Св. 30 до 38	10	8	5		22	110		
Св. 38 до 44	12	8			28	140		
Св. 44 до 50	14	9	5,5	3,8	0,25	0,4	36	160
Св. 50 до 58	16	10	6	4,3			45	180
Св. 58 до 65	18	11	7	4,4			50	200
Св. 65 до 75	20	12	7,5	4,9	0,4	0,6	56	220
Св. 75 до 85	22	14	9	5,4			63	250
Св. 85 до 95	25	14					70	280
Св. 95 до 110	28	16	10	6,4	0,4	0,6	80	320
Св. 110 до 130	32	18	11	7,4			90	360
Св. 130 до 150	36	20	12	8,4	0,7	1,0	100	400
Св. 150 до 170	40	22	13	9,4			100	400
Св. 170 до 200	45	25	15	10,4			110	450
Св. 200 до 230	50	28	17	11,4			125	500
Св. 230 до 260	56	32	20	12,4	1,2	1,6	140	500
Св. 260 до 290	63	32					160	500
Св. 290 до 330	70	36					180	500
Св. 330 до 380	80	40	25	15,4	2,0	2,5	200	500
Св. 380 до 440	95	45	28	17,4			220	500
Св. 440 до 500	100	50	31	19,5			250	500

*Примечание.* Длины шпонок  $l$  выбирают из ряда: 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 28, 32, 36, 40, 45, 50, 56, 63, 70, 80, 90, 100, ..., 500.

Следовательно,

$$\sigma_{\text{см}} = 2M/(d(0,95h - t)l_p) \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (28.2)$$

где  $M$  — передаваемый вращающий момент, Н·мм;

$d$  — диаметр вала, мм;

$l_p$  — рабочая длина шпонки, мм (для шпонок с плоским торцом  $l_p = l$ , со скругленными торцами  $l_p = l - b$ );

$[\sigma_{\text{см}}]$  — допускаемое напряжение смятия (для стальных ступиц  $[\sigma_{\text{см}}] = 100 \dots 150$  МПа; для чугунных  $[\sigma_{\text{см}}] = 60 \dots 80$  МПа).

Расчетную длину шпонки округляют до ближайшего большего размера (по табл. 28.1); в тех случаях, когда длина шпонки получается больше длины ступицы детали, устанавливают две или три шпонки под углом 180 или 120°.

*Сегментные шпонки* (рис. 28.1, б). Размеры сечений шпонки (ширину  $b$  и высоту  $h$ ), длину шпонки  $l$  и глубину паза  $t_1$  выбирают в зависимости от диаметра вала по ГОСТ 24071-80.

Сегментные шпонки, так же как и призматические, проверяют на смятие:

$$\sigma_{\text{см}} = 2M/(d(h - t_1)l) \leq [\sigma_{\text{см}}]. \quad (28.3)$$

Сегментные шпонки узкие, поэтому, в отличие от призматических, их проверяют на срез:

$$\tau_{\text{ср}} = 2M/(dbl) \leq [\tau_{\text{ср}}], \quad (28.4)$$

где  $l$  — рабочая длина шпонки, мм;

$[\tau_{\text{ср}}]$  — допускаемое напряжение на срез, для сталей с  $\sigma_b \geq 500$  МПа в случае неравномерной (нижний предел) и спокойной нагрузок (верхний предел) принимают  $[\tau_{\text{ср}}] = 60 \dots 90$  МПа.

Если расчетное напряжение превышает допускаемое более чем на 5 %, то применяют две шпонки. Призматические шпонки устанавливают под углом 180°, сегментные — вдоль вала в одном пазу ступицы. Постановка нескольких шпонок сильно ослабляет вал и ступицу.

**Пример 28.1.** Для соединения стального зубчатого колеса с валом подобрать размеры и проверить прочность призматической шпонки. Диаметр вала  $d = 60$  мм, длина стальной ступицы колеса  $l_{\text{ст}} = 80$  мм. Момент, передаваемый шпоночным соединением,  $M = 500$  Нм, нагрузка спокойная, без ударов и рывков.

*Решение.* Для диаметра вала  $d = 60$  мм по табл. 28.1 принимаем размеры сечения шпонки  $b = 18$  мм,  $h = 11$  мм. Глубина паза вала  $t_1 = 7$  мм.

Выберем длину шпонки, воспользовавшись примечанием к табл. 28.1. При длине ступицы  $l_{\text{ст}} = 80$  мм принимаем длину шпонки  $l = 70$  мм. Тогда рабочая длина шпонки будет  $l_p = l - b = 70 - 18 = 52$  мм.

Допускаемое напряжение смятия  $[\sigma_{\text{см}}] = 90$  МПа. Напряжение смятия шпонки

$$\sigma_{\text{см}} = 2M/(d(h - t_1)l_p) = 2 \cdot 500 \cdot 10^3 / 60(11 - 7) \cdot 52 = 80,12 \text{ МПа},$$

что удовлетворяет условию прочности. Условное обозначение шпонки: *шпонка* 18×11×70 ГОСТ 23360-78.

## 28.2. Штифтовые соединения

Штифтовые соединения служат для соединения осей и валов с установленными на них деталями при передаче небольших моментов. По назначению их разделяют на *силовые* и *установочные*.

Во избежание выпадения в процессе работы используют специальные штифты с насеченными канавками (рис. 28.2, *а*), с резьбовым концом (рис. 28.2, *б*) и разводные конические (рис. 28.2, *в*). Часто для этих же целей выполняют разведение или раскернивание концов штифтов.

Основные типы штифтов стандартизованы. Как правило, их изготавливают из углеродистых сталей.

По характеру работы штифтовое соединение подобно заклепчному (работает на срез и смятие), а для его расчета используют аналогичные зависимости.

Условие прочности при срезе штифта:

$$\tau = ((4F_t)/(i A_c)) \leq [\tau_c], \quad (28.5)$$

а условие прочности по смятию:

$$\sigma_{\text{см}} = F_t / A_{\text{см}} \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (28.6)$$

где  $F_t$  — срезающее усилие (осевое или окружное);

$i$  — число поверхностей среза;

$A_c$  — площадь штифта на срез;

$A_{\text{см}}$  — площадь поверхности смятия (сжатия);

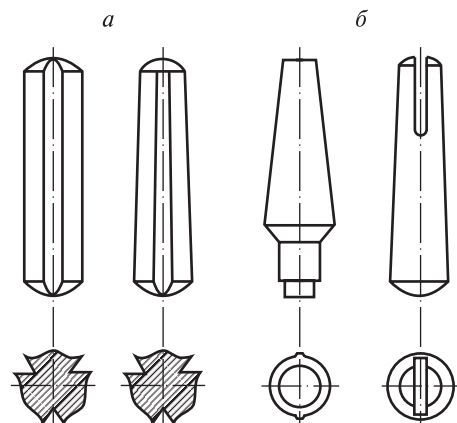


Рис. 28.2. Штифты:

*а* — со специальными канавками; *б* — с резьбовым концом; *в* — с разводными коническими канавками

$[\tau_c]$  — допускаемое напряжение на срез, обычно 70...80 МПа;

$[\sigma_{см}]$  — допускаемое напряжение при смятии, равное 200...300 МПа.

**Пример 28.2.** Подобрать сегментные шпонки для втулочной муфты, соединяющей два вала. Материал муфты и валов — сталь 45, шпонки — Ст6. Передающий момент при среднем режиме исполнения  $M = 120 \text{ Н}\cdot\text{м}$  (диаметр вала 40 мм).

*Решение.* По ГОСТ 24071-97 для вала  $d = 40 \text{ мм}$  выбираем сегментную шпонку размерами:  $b = 8 \text{ мм}$ ,  $h = 11 \text{ мм}$ ,  $d_1 = 28 \text{ мм}$ ,  $l = 27,5 \text{ мм}$  (шпонка сегментная 8×11×28), глубина вала  $t_1 = 8 \text{ мм}$ .

Определим напряжение смятия:

$$\sigma = 2M/(dl t_2) = 2 \cdot 120000 / (40 \cdot 27,5 \cdot (11 - 8)) = 72,7 \text{ МПа}.$$

Как видим, условие прочности выполняется, так как  $[\sigma_{см}] = 200...300 \text{ МПа}$ .

**Пример 28.3.** Определить наибольший вращающий момент, который может передавать колесо без среза штифта (рис. 28.3), при  $d = 12 \text{ мм}$ ,  $l = 60 \text{ мм}$ ,  $d_b = 50 \text{ мм}$ ,  $[\tau_c] = 80 \text{ МПа}$ .

*Решение.* Допускаемый вращающий момент

$$M = [\tau_c] A_c (d_b/2) = 80 \cdot 0,06 \cdot 0,012 \cdot (0,05/2) = 1440 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

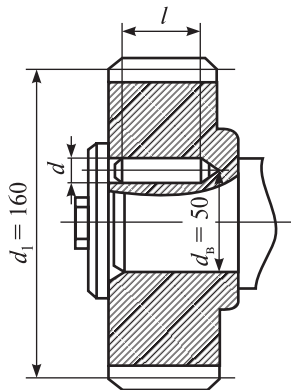


Рис. 28.3

## 28.3. Шлицевое соединение

Шлицевое соединение (рис. 28.4) применяют для неподвижного и подвижного соединения валов со ступицами деталей (колес, шкивов, дисков и т.п.). По сравнению со шпоночными соединениями они имеют меньшие радиальные габариты, высокую несущую способность, взаимозаменяемы и обеспечивают хорошее центрирование деталей. Эти преимущества позволяют использовать рассматриваемые соединения в условиях массового производства конструкций и при большой частоте вращения валов (транспорт, станкостроение, автотракторная промышленность). Недостатком по сравнению со шпоночными является более сложная технология изготовления, а следовательно, и более высокая стоимость.

По форме поперечного сечения различают три типа соединений: прямоугольные, эвольвентные и треугольные (изготавливаются по отраслевым стандартам). Профили сечения соединений показаны на рис. 28.4 и 28.5.

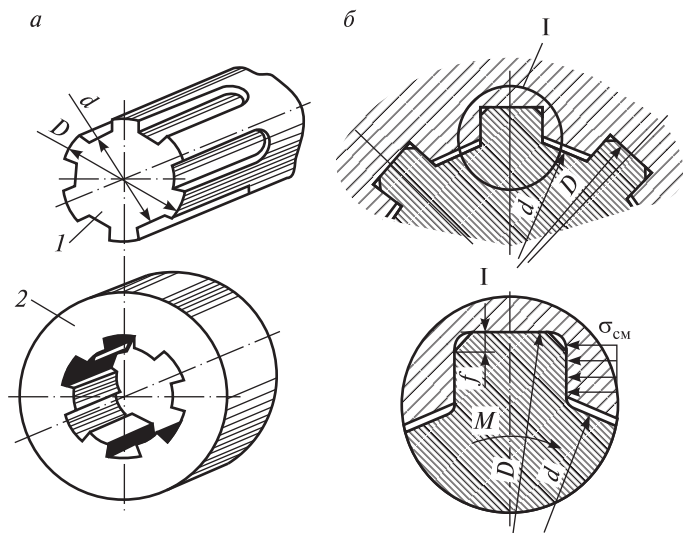


Рис. 28.4. Соединение прямобочными шлицами:  
 а — детали соединения: 1 — вал; 2 — втулка; б — соединение

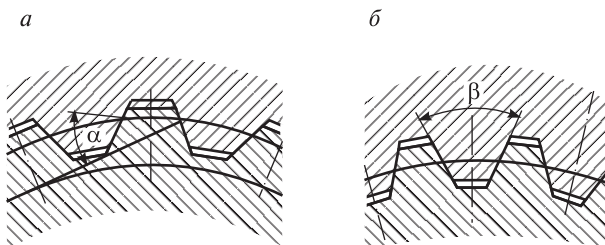


Рис. 28.5. Шлицевые соединения:  
 а — эвольвентное (1 — вал; 2 — втулка); б — треугольное

Соединения с прямобочными зубьями наиболее распространены в транспортном машиностроении. В зависимости от числа зубьев (6...20) и их высоты стандартом предусмотрены три серии соединений для валов с диаметром от  $d = 23$  мм до  $d = 125$  мм (легкая, средняя и тяжелая, табл. 28.2). Легкая серия рекомендуется для неподвижных соединений, средняя — для подвижных, тяжелая — для неподвижных и подвижных при передаче больших моментов.

*Соединения с эвольвентными зубьями* более технологичны, чем соединения прямобочные, имеют более высокую точность и прочность (благодаря большему числу зубьев и скруглению впадин, снижающих концентрацию напряжений).

Таблица 28.2

**Размеры, мм, для шлицевых соединений в зависимости от серии, рекомендуемые ГОСТ 21425-75**

Серия	Номинальный размер $z \times d \times D$	$b$	$S_F$ , мм <sup>3</sup> /мм
Легкая	8×36×40	7	182
	8×42×46	8	211
	8×46×50	9	230
	8×52×58	10	440
Средняя	8×36×42	7	343
	8×42×48	8	396
	8×46×54	9	600
Тяжелая	10×42×52	6	978
	10×46×56	7	1020

*Соединения с треугольными зубьями* применяют преимущественно при малых радиальных габаритах и при передаче небольших моментов. Центрирование осуществляется только по боковым сторонам шлицев. Рекомендуется такое соединение для тонкостенных ступиц и пустотелых валов.

*Проектирование и расчет соединений.* Основные размеры шлицевого соединения задают при конструировании вала. Длину соединения принимают  $l \leq 1,5D$ , при большей длине существенно возрастают неравномерность распределения нагрузки вдоль зубьев и трудоемкость изготовления.

Учитывая, что соединения в машинах выходят из строя преимущественно из-за повреждения рабочих поверхностей зубьев (смятие, износ) и усталостного разрушения шлицевых валов, после проектирования выполняют проверочный расчет зубьев.

Условие прочности по допускаемым напряжениям смятия имеет вид

$$\sigma_{\text{см}} = 2M/(d_m z h l \Psi) \leq [\sigma_{\text{см}}], \quad (28.7)$$

где  $d_m$  — средний диаметр соединения;

$z$  — число зубьев;

$h$  и  $l$  — соответственно высота и длина поверхности контакта зубьев;

$\Psi = 0,7 \dots 0,8$  — коэффициент, учитывающий концентрацию контактных давлений на края соединения;

$[\sigma_{см}]$  — допускаемое напряжение смятия на боковых поверхностях.

Высота и длина поверхности контакта:

а) для прямобоочных зубьев

$$h = (D - d)/2 - 2f; \quad d_m = (D + d)/2;$$

б) для эвольвентных зубьев

$$h = m; \quad d_m = mz;$$

где  $m$  — модуль зубьев.

Число зубьев и диаметры заданы в ГОСТе в зависимости от диаметра вала. Длину соединения (как и для шпоночных соединений) принимают по ступице, охватывающей детали (например, колеса).

*Изнашивание зубьев* обусловлено неизбежными взаимными циклическими (от вращения) смещениями деталей соединения при действии радиальной нагрузки вследствие несовпадения или наклона осей. Оно проходит более интенсивно при развитии контактной коррозии на рабочих гранях.

Условный расчет износостойкости часто ведут в форме определения допускаемого угла перекоса (вследствие деформации или неправильного монтажа).

Эффективными средствами повышения износостойкости соединений являются уменьшение углов перекоса геометрических осей сопрягаемых деталей при монтаже и в рабочих условиях; увеличение твердости контактируемых поверхностей азотированием, цементированием и др.; уменьшение зазоров в соединении применением более плотных посадок; центрирование по вспомогательным поверхностям; затягивание соединений, обеспечивающих фиксацию в осевом направлении.

**Пример 28.4.** Подобрать неподвижное шлицевое соединение зубчатого колеса с валом и проверить прочность шлицев по следующим данным: расчетный диаметр вала  $d = 50$  мм; рабочая длина шлицев  $l = 60$  мм; передаваемый момент  $M = 500$  Н·м; рабочие поверхности шлицев термообработке не подвергались.

*Решение.* Воспользуемся табл. 28.2 и примем размеры соединения легкой серии, которая рекомендуется для неподвижных соединений. Для диаметра



вала  $d = 50$  мм  $z \times d \times D = 8 \times 46 \times 50$ . Применительно к выбранному соединению принимаем удельный суммарный статический момент площади рабочих поверхностей  $S_F = 230$  мм<sup>3</sup> (см. табл. 28.2).

Прочность неподвижного соединения проверим по напряжениям смятия. Для соединений с незакаленными поверхностями при спокойной нагрузке примем допускаемое напряжение на смятие  $[\sigma_{см}] = 80$  Н/мм<sup>2</sup>. Тогда расчетное напряжение смятия шлицев будет  $\sigma_{см} = M/(S_F l) = 500 \cdot 10^3 / (230 \cdot 60) = 36,23$  Н/мм<sup>2</sup> <  $[\sigma_{см}] = 80$  Н/мм<sup>2</sup>. Условия прочности соединения удовлетворяются.

## 28.4. Профильные соединения

*Профильными* называются соединения, в которых ступица (втулка) насаживается на фасонную поверхность вала и таким образом обеспечивается передача вращения. На рис. 28.6 в качестве примера показано соединение на квадрате со скругленными углами. Применяют также соединения эллиптического и треугольного сечений.

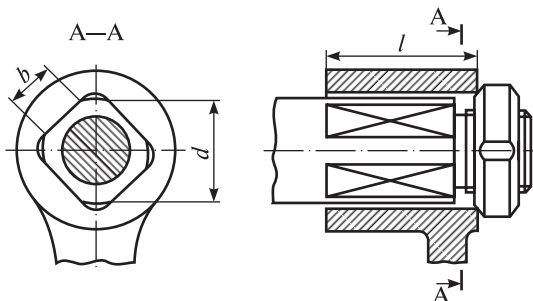


Рис. 28.6. Профильное соединение

По сравнению со шпоночными и шлицевыми эти соединения имеют небольшую концентрацию напряжений и более высокую точность центрирования. Однако сложность изготовления ограничивает области применения соединений.

*Расчет профильных соединений.* Такие соединения рассчитывают на смятие. Условие прочности по допускаемым напряжениям для соединения, показанного на рис. 28.6, имеет обычный вид:

$$\sigma = 3M/(b^2 l) \leq [\sigma_{см}], \quad (28.8)$$

где  $l$  — длина соединения, обычно  $l = (1 \dots 2)d$ ;

$b$  — ширина прямолинейной части грани;

$[\sigma_{см}]$  — допускаемое напряжение смятия, для термообработанных поверхностей  $[\sigma_{см}] = 100 \dots 140$  МПа.

## Глава 29. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕДАЧАХ

### 29.1. Назначение и роль передач

Большинство современных машин создается по схеме *двигатель — передача — исполнительный орган машины*. Все двигатели для уменьшения массы, габаритов и стоимости выполняют быстроходными, с узким диапазоном регулирования скоростей. Непосредственное соединение двигателя с рабочим органом машины хотя и возможно, но применяется крайне редко (это гидравлические насосы и вентиляторы). Как правило, между двигателем и исполнительным органом машины устанавливают промежуточный механизм — передачу.

*Передачами* называют механизмы, служащие для передачи механической энергии на расстояние. При этом функции передачи энергии, как правило, совмещают с решением следующих основных задач: согласование угловых скоростей исполнительных органов машин и двигателей, которое обеспечивается преобразованием угловой скорости  $\omega$  и вращающего момента  $M$  при постоянной мощности двигателя  $P$  (двигатели имеют большие скорости, исполнительные же органы машины для выполнения своих функций часто требуют больших моментов при относительно малых скоростях); регулирование и реверсирование (изменение направления) скорости исполнительного органа машины при постоянной угловой скорости двигателя; преобразование вращательного движения двигателя в поступательное или другое движение исполнительного органа машины; приведение в движение нескольких исполнительных органов (с различными скоростями движения) от данного двигателя.

Наиболее распространены *механические передачи вращательного движения*. Это связано с таким преимуществом вращательного движения, как возможность обеспечения его непрерывности и равномерности при малых потерях на трение. Кроме того, вращательное движение позволяет получить простую и надежную конструкцию передачи малых габаритов.

### 29.2. Классификация механических передач

Механические передачи, применяемые на железнодорожном транспорте, классифицируются:

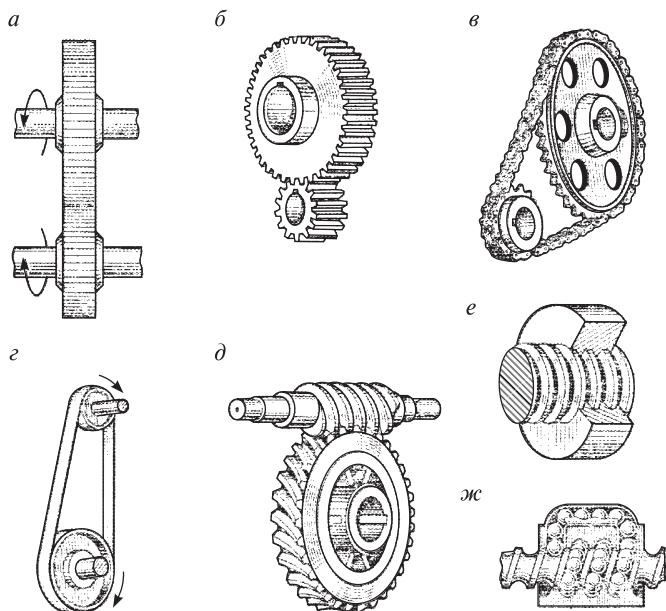


Рис. 29.1. Механические передачи по принципу передачи движения:  
а, б — трением; в, г — зацеплением; д — цепные; е, ж — винт—гайка

по принципу передачи движения — трением (фрикционная — рис. 29.1, а, ременная — рис. 29.1, б); зацеплением (зубчатые — рис. 29.1, в, червячные — рис. 29.1, г; цепные — рис. 29.1, д; передачи винт—гайка — рис. 29.1, е, ж);

по способу соединения деталей — передачи с непосредственным контактом тел вращения (фрикционные, зубчатые, червячные, передачи винт—гайка); передачи с гибкой связью (ременная, цепная).

Передачи гибкими связями используют в транспортном машиностроении в качестве силовых, а также в приборах и аппаратах — в качестве кинематических.

Основные, достоинства передач гибкими связями — плавность работы; простота конструкции и возможность работы при значительных межосевых расстояниях жестких звеньев.

Ременные передачи обеспечивают плавный пуск установок, поэтому широко используются для привода различных станков и транспортирующих установок от электродвигателей.

Недостатками передач с гибкой связью являются непостоянство и колебание передаточного отношения из-за проскальзывания ремня и неравномерность движения цепи и зубчатого ремня; малая долговечность гибкого звена.

### 29.3. Основные кинематические и силовые отношения в передачах

В каждой передаче различают два основных вала (рис. 29.2, а): ведущий 1 (входной) и ведомый 2 (выходной).

Звенья, передающие вращающий момент, называются *ведущими*, а звенья, приводимые в движение от ведущих, — *ведомыми*.

Передача, состоящая только из ведущего и ведомого звеньев, называется *одноступенчатой*. Параметры одноступенчатой передачи, относящиеся к ведущему звену, снабжают индексом «1», а к ведомому — «2».

Основными характеристиками передачи являются: *мощность*  $P_1$  на ведущем и  $P_2$  — на ведомом валах, кВт; *угловая скорость*  $\omega_1$  ведущего и  $\omega_2$  ведомого валов, рад/с, или *частота вращения*  $n_1$  ведущего и  $n_2$  ведомого валов, об/мин ( $\text{мин}^{-1}$ ). Эти характеристики минимально необходимы и достаточны для выполнения проектного расчета любой передачи.

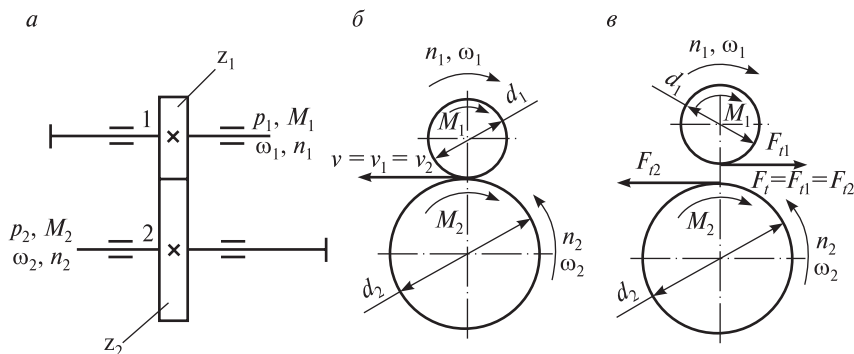


Рис. 29.2. Схемы передачи:

а — для основных валов; б — условие равенства окружных скоростей; в — условие равенства окружных сил

Кроме основных, различают производные характеристики:  
*коэффициент полезного действия* (КПД) передачи

$$\eta = P_2/P_1; \quad (29.1)$$

*окружная скорость* ведущего или ведомого звена, м/с,

$$v = \omega d/2 = \pi n d/60, \quad (29.2)$$

где  $d$  — диаметр колеса, шкива, м.

При отсутствии скольжения окружные скорости обоих звеньев равны, т.е.  $v_1 = v_2$  (рис. 29.2, б);

*окружная сила передачи*, в которых, рис. 29.2, в,

$$F_t = P/v = 2M/d, \quad (29.3)$$

где  $P$  — мощность, Вт;

$v$  — окружная скорость, м/с.

На ведомом колесе направление силы  $F_t$  совпадает с направлением вращения, а на ведущем противоположно ему;

*вращающий момент*, Н·м

$$M = P/\omega = F_t d/2. \quad (29.4)$$

Вращающий момент на ведущем валу  $M_1 = P_1/\omega_1$  — это момент движущих сил, и его направление совпадает с направлением вращения вала; момент на ведомом валу  $M_2 = P_2/\omega_2$  — это момент сил сопротивления, поэтому его направление противоположно направлению вращения вала.

При расчете передач часто пользуются зависимостью между вращающими моментами на валах. Эту зависимость получим, разделив выражение момента  $M_2$  на  $M_1$ :

$$M_2/M_1 = (P_2/P_1) \omega_1/\omega_2 = \eta u, \quad (29.5)$$

где  $u$  — передаточное число.

*Передаточное отношение* определяется в направлении потока мощности:

$$i = \omega_1/\omega_2 = n_1/n_2. \quad (29.6)$$

*Передаточным отношением* называется отношение угловых скоростей или частот вращения ведущего и ведомого звеньев. В дальнейшем передаточное отношение для всех типов передач будем

условно называть *передаточным числом* и обозначать через  $u$ . При  $v_1=v_2$  или  $\omega_1 d_1/2 = \omega_2 d_2/2$  получим передаточное число

$$u = \omega_1/\omega_2 = d_2/d_1, \text{ или } u = n_1/n_2. \quad (29.7)$$

Для зубчатой передачи, понижающей угловую скорость, передаточное число

$$u = z_2/z_1, \quad (29.8)$$

где  $z_1$  — число зубьев шестерни (зубчатое колесо с меньшим числом зубьев);

$z_2$  — число зубьев колеса (зубчатое колесо с большим числом зубьев).

Передачи для повышения угловой скорости ( $u < 1$ ) называют *мультипликаторами*, или *ускорителями*. Примерами подобных передач являются передачи в приводе центрифуг, исполнительные органы которых имеют угловую скорость выше угловой скорости двигателя ( $\omega_2 > \omega_1$ ). Передачи для понижения угловой скорости исполнительного органа ( $u > 1$ ) называют *редукторами*. Наибольшее распространение имеют понижающие передачи, так как угловая скорость исполнительного механизма, как правило, меньше угловой скорости двигателя ( $\omega_2 < \omega_1$ ).

В зависимости от устройства передачи передаточное число может быть постоянным или переменным — регулируемым в определенных пределах по ступенчатому (коробки скоростей с зубчатыми колесами и т.п.) или плавному бесступенчатому (вариаторы) закону. Передачи ступенчатого регулирования с зубчатыми колесами обладают высокой работоспособностью и поэтому широко применяются в транспортном машиностроении. Передачи бесступенчатого регулирования обладают меньшей нагрузочной способностью и имеют ограниченное распространение.

Если одной парой зубчатых колес нельзя обеспечить требуемое передаточное число, то применяют ряд последовательно соединенных одноступенчатых передач — так называемую *многоступенчатую передачу*. На рис. 29.3 показана *двухступенчатая* зубчатая передача (двухступенчатый редуктор). Ее общее передаточное число  $u_{\text{общ}} = (z_2/z_1) (z_4/z_3) = u_1 u_2$ , или

$$u_{\text{общ}} = u_1 u_2 u_3 \dots u_n, \quad (29.9)$$

где  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  — передаточные числа каждой ступени.

Общий КПД многоступенчатой передачи

$$\eta_{\text{общ}} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n, \quad (29.10)$$

где  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$  — КПД каждой кинематической пары (зубчатой, червячной, ременной и др.), а также других звеньев привода, где имеются потери мощности (подшипники, муфты).

Задача конструктора состоит в выборе оптимального по технико-экономическим показателям типа передачи и ее конструкции.

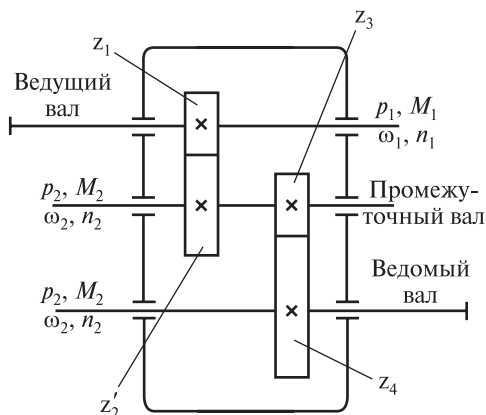


Рис. 29.3. Двухступенчатый редуктор

## Глава 30. ФРИКЦИОННЫЕ ПЕРЕДАЧИ И ВАРИАТОРЫ

### 30.1. Виды механизмов и их назначение

*Фрикционными передачами* называют передачи трением. Они состоят (рис. 30.1, а) из двух катков: ведущего 1 и ведомого 2, несмещаемой стойки 3 и ползуна 4 (сдвигающийся под действием силы  $F_r$  опору).

Ведущий и ведомые катки могут быть прижаты предварительно натянутыми пружинами (передачи, предназначенные для работы при небольших нагрузках); гидроцилиндрами (передачи больших нагрузок); собственной массой машины или узла; через систему рычагов с помощью перечисленных выше средств; центробежной силой (в случае сложного движения катков в планетарных системах).

Рабочие поверхности катков могут быть не только цилиндрическими, а коническими (рис. 30.1, б), сферическими и т.д. Кроме внешнего контакта катков, нередко используют передачи с внутренним контактом катков (рис. 30.1, в). В лентопротягивающих устройствах, довольно-таки широко используемых на железнодорожном транспорте, находят применение механизмы (рис. 30.1, г),

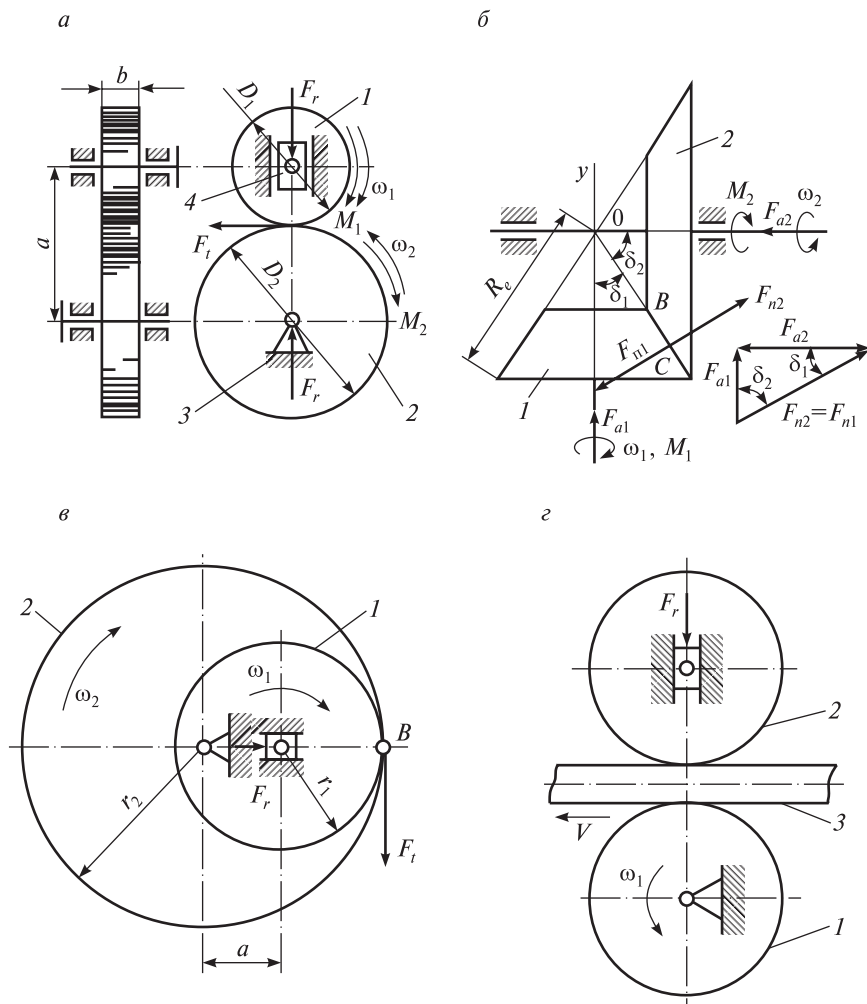


Рис. 30.1. Фрикционные механизмы:

*a* — передача; *б* — поверхность конические катки; *в* — передача с внутренним контактом поверхностей; *г* — лентопотягивающее устройство

преобразующие вращательное движение ведущего звена — катка *1* в поступательное движение ведомого звена *3*. Ведущее звено к ведомому может прижиматься силой тяжести последнего или, например, с помощью свободно вращающегося катка *2*.



Достоинствами фрикционных передач является:

- а) простота конструкции и обслуживания;
- б) плавность передачи движения и бесшумность работы;
- в) большие кинематические возможности (преобразование вращательного движения в поступательное, бесступенчатое изменение скорости, возможность реверсирования на ходу, включение и выключение передачи на ходу без остановки);

г) за счет возможностей пробуксовки передача обладает предохранительными свойствами. Однако после пробуксовки передача, как правило, резко ухудшает свои качества — появляются лыски на катках, неравномерно срабатываются фрикционные поверхности и т.д. Поэтому использовать пробуксовку как предохранительное средство не рекомендуется.

Недостатками фрикционных передач является:

- а) непостоянство передаточного числа из-за проскальзывания;
- б) незначительная передаваемая мощность (открытые передачи — до 10—20 кВт, закрытые — до 200—300 кВт;
- в) для открытых передач сравнительно низкий КПД;
- г) большое и неравномерное изнашивание катков при буксовании;
- д) необходимость применения опор валов специальной конструкции с прижимными устройствами (это делает передачу громоздкой);
- е) для силовых открытых передач незначительная окружная скорость ( $v \leq 7 \dots 10$  м/с).

К материалам трущихся поверхностей катков предъявляют следующие требования: высокие износостойкость, коэффициент трения  $f$ , модуль упругости  $E$  и влагостойкость. Катки фрикционных передач изготовляют из однородных или разнородных материалов. При этом целесообразно ведомый каток выполнять из более износостойкого материала. Применяют следующие сочетания материалов:

- для быстроходных закрытых силовых передач — закаленная сталь по закаленной стали (стали ШХ15, 40ХН, 18ХГТ и др.). Такое сочетание обеспечивает наибольшую компактность передачи, но требует более точного изготовления и малых параметров шероховатости поверхностей;
- для открытых тихоходных силовых передач — чугун по чугуну (СЧ 15; СЧ 20; СЧ 25 и др.) или чугун по стали; чаще применяют

чугун по стали, что обеспечивает меньший шум при работе передачи;

- для малонагруженных открытых передач, не требующих большой долговечности, — текстолит, гетинакс или фибра по стали или по чугуну. Такое сочетание материалов позволяет уменьшить требования к качеству обработки контактирующих поверхностей, так как они хорошо прирабатываются.

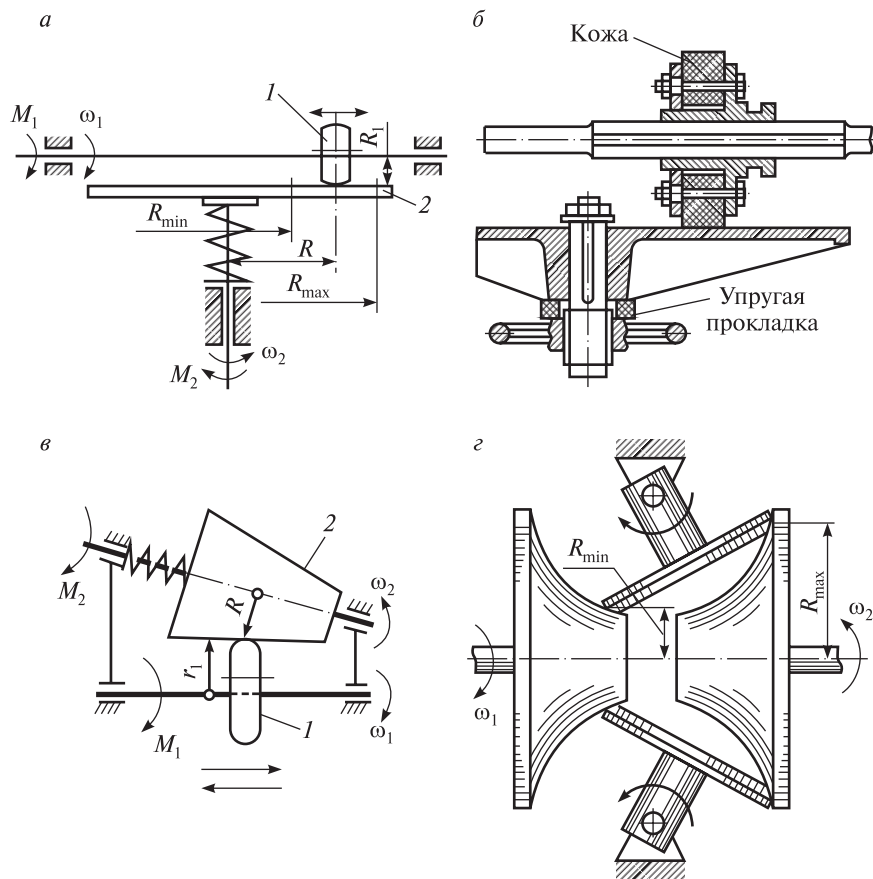


Рис. 30.2. Вариатор:

*а* — лобовой; *б* — конструктивное исполнение лобового вариатора; *в* — коническая форма катков; *г* — торовый вариатор

Для передачи незначительных вращательных моментов служат кожа, резина, прорезиненная ткань, пластмассы по стали или чугуну: один из катков изготавливают из стали или чугуна (чаще ведомый), а другой покрывают одним из перечисленных неметаллических материалов.

Механизмы описанных видов имеют постоянное передаточное отношение. Однако с помощью катков несложно образуется механизм с регулируемым передаточным отношением, называемый *вариатором*. На рис 30.2, *а* показан лобовой вариатор, в котором ведущий вал 1 может перемещаться по своему валу (вдоль оси) в осевом направлении. При этом передаточное отношение плавно изменяется по мере изменения радиуса  $R$ . Если каток 1 будет на «оси» катка 2, то последний не будет вращаться. При переводе катка 1 в левую часть катка 2 изменится направление вращения ведомого вала (реверсивное вращение). Конструктивное исполнение лобового вариатора дано на рис. 30.2, *б*.

В вариаторе, изображенном на рис. 30.2, *в*, изменение радиуса контакта ведомого звена с ведущим достигается за счет конической формы катка. На практике используют и другие виды вариаторов — торовые (рис. 30.2, *г*), клиноременные и т.д.

Фрикционные передачи применяют в кинематических цепях приборов для обеспечения плавности движения, бесшумности, безударного включения. Фрикционные вариаторы служат для обеспечения бесступенчатого регулирования скорости не только на транспорте, но и в станкостроении. Передаваемые мощности обычно составляют до 10 кВт. При больших мощностях трудно обеспечить необходимое усилие прижатия катков.

Основные недостатки таких передач: высокие нагрузки на валы от прижатия катков; износ катков и неизбежное проскальзывание.

## 30.2. Кинематика передач

Если к ведомому валу (см. рис. 30.1, *а*) приложена внешняя нагрузка  $M_2$ , то для его преодоления требуется окружная сила

$$F_t = M_2/r_2 = F_{\text{тр}}, \quad (30.1)$$

где  $r_2$  — радиус второго катка;

$F_{\text{тр}}$  — сила трения, возникающая между контактирующими катками.

Сила трения

$$F_{\text{тр}} = F_r f,$$

где  $f$  — коэффициент трения качения, для пары роликов из стали или чугуна, при работе в масле он равен 0,05, для пары сталь—текстолит или фибра без смазывания 0,1...0,15.

Для предотвращения проскальзывания в процессе работы обычно создают запас сцепления.

$$K = (F_{\text{тр}} / F_t) > 1.$$

В силовых передачах, как правило, он принимает значения  $K = 1,25...1,5$ ; в приборах  $K = 3$ .

Тогда необходимое усилие прижатия катков

$$F_r = (F_{\text{тр}} / F_t) / f = KM_2 / (fr_2). \quad (30.2)$$

Из этого выражения видно, что усилие  $F_r$  оказывается существенно большим, чем сила  $F_t$ ; например, при  $K = 1,25$  и  $f = 0,05$   $F_r = 25F_t$ . Это требует применения специальных нажимных устройств, увеличенных габаритов подшипников, жестких валов.

Для конических рабочих поверхностей (см. рис. 30.1, б), кроме внешнего контакта катков, нередко используют передачи с внутренним их контактом (см. рис. 30.1, в). Необходимое усилие в конической передаче

$$F_{a1} = ((F_{\text{тр}} / F_t) / f) \sin \delta_1,$$

где  $\delta_1$  — угол наклона образующей к оси катка.

В нерегулируемой фрикционной передаче окружная скорость ведомого катка несколько меньше скорости ведущего катка из-за их взаимного проскальзывания, обусловленного упругими смещениями контактирующих точек катков и, как следствие, различием скоростей в точках площадки контакта. Обычно равенство скоростей имеет место лишь для точек катков, лежащих на линии начального контакта (контакта при  $F_r = 0$ , см. рис. 30.1, а).

Влияние проскальзывания учитывают с помощью коэффициента  $\xi$ , определяемого опытным путем:

$$v_2 = (1 - \xi) v_1.$$

Если ввести в рассмотрение угловые скорости  $\omega_1$  и  $\omega_2$  катков, то передаточное отношение

$$u = \omega_1/\omega_2 = D_2 / ((1 - \xi)D_1),$$

где  $\xi \approx 0,01...0,05$  — коэффициент скольжения.

Аналогично в передаче с коническими катками (см. рис. 30.1, б)

$$u = \sin \delta_2 / (1 - \xi) \sin \delta_1,$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — углы наклона к оси конусов образующих.

Для лобового вариатора (рис. 30.2, а, б) эта зависимость остается справедливой, и если пренебречь проскальзыванием, то

$$u_{\max} = \omega_1/\omega_{2\min} = R_{\max}/R_1; u_{\min} = \omega_1/\omega_{2\max} = R_{\min}/R_1.$$

Диапазон регулирования

$$D = \omega_{\max}/\omega_{2\min} = R_{\max}/R_{\min} = u_{\max}/u_{\min}$$

является одной из основных характеристик вариатора. Теоретически возможен случай  $R_{\min} = 0$  и  $D \rightarrow \infty$ . Однако при малых  $R$  существенно возрастают скольжение и износ катков, снижается КПД, а потому практически диапазон регулирования ограничивают значением  $D \leq 3$ .

Величина КПД передач и вариаторов зависит от потерь на скольжение и потерь в опорах валов, обычно  $\eta = 0,9...0,95$ .

### 30.3. Виды повреждений катков и расчет передач

Рабочие поверхности металлических катков, работающих в масле при жидкостном трении, разрушаются из-за усталостного действия переменных радиальных напряжений сжатия  $\sigma_k$  в контактирующих точках (рис. 30.3). Существенно, что усилие прижатия вызывает неоднородную деформацию контактирующих точек по ширине площадки контакта и, как следствие, концентрацию контактных напряжений на линии центров катков. При действии вращающего момента  $M_1$  максимальное контактное напряжение

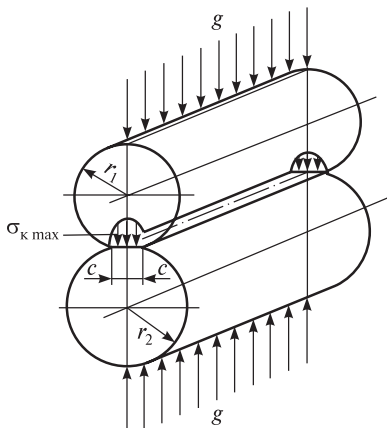


Рис. 30.3. Контактные напряжения на рабочей поверхности катков

$\sigma_{\text{к max}}$  смещается от оси центров на величину коэффициента трения  $f$ . Экспериментально установлено, что долговечность катков пропорциональна максимальному напряжению  $\sigma_{\text{к max}}$ .

В передачах, работающих без смазывания или при очень очень малом смазывании, не обеспечивающем режима жидкостного трения, наблюдается изнашивание катков, также пропорциональное величине  $\sigma_{\text{к max}}$  и коэффициенту трения  $f$ .

Значения коэффициента трения приведены в табл. 30.1.

Таблица 30.1

**Значения коэффициента трения  $f$  для различных материалов**

Материалы контактирующей пары	$f$
Сталь по стали или по чугуну (со смазочным материалом)	0,04...0,05
Чугун (всухую) по:	
стали или чугуну	0,1...0,18
текстолиту	0,15...0,25
фибре	0,15...0,3
коже	0,20...0,50
прессованной бумаге	0,40...0,50
резине	0,35...0,70

Катки из неметаллических материалов разрушаются вследствие отслаивания рабочих поверхностей.

Расчет распределения напряжений в зоне контакта цилиндров впервые выполнен в конце XIX в. немецким ученым Г. Герцем (здесь и далее в качестве индекса для максимальных напряжений в контакте используется латинская буква Н — первая буква в немецкой записи фамилии Герца). Он установил, что при коэффициентах Пуассона материалов цилиндров  $\nu_1$  и  $\nu_2$  максимальное напряжение в зоне контакта

$$\sigma_{\text{к max}} = \sigma_H = \sqrt{\frac{E_1 E_2 g}{E_1 (1 - \nu_2^2) + E_2 (1 - \nu_1^2) \pi \rho_\pi}}. \quad (30.3)$$

$$\text{Если } \nu_1 = \nu_2 = 0,3, \text{ то } \sigma_H = 0,418 \sqrt{\frac{E_\pi g}{\rho_\pi}}.$$

Здесь  $g = F_r/b$  — распределенная нагрузка на цилиндры от усилия прижатия ( $F_r$  — радиальное усилие прижатия катков;  $b$  —

длина катков);  $E_H$  и  $\rho_H$  — соответственно приведенные модуль упругости и радиус кривизны:

$$1/E_H = 0,5(1/E_1 + 1/E_2); \quad 1/\rho_H = 1/r_1 \pm 1/r_2.$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — модули упругости катков 1 и 2;

$r_1$  и  $r_2$  — радиусы соответствующих катков.

Знак плюс в последней формуле используется при внешнем контакте катков, а знак минус — при внутреннем.

Поскольку контактная усталость передач существенно зависит от взаимного скольжения катков, а критерии контактной прочности не разработаны, расчет передач ведут из условия прочности по допускаемым контактным напряжениям  $[\sigma_H]$ , обобщающим предшествующий опыт эксплуатации фрикционных передач. В табл. 30.2 приведены значения допускаемых напряжений и модуль упругости для катков из различных материалов.

Таблица 30.2

**Допускаемые контактные напряжения и модуль упругости для катков из различных материалов, МПа**

Материал	$[\sigma_H]$	$E$
Закаленная сталь (при хорошем смазывании)	600...800	$2,1 \cdot 10^5$
Серый чугун марок от СЧ10 до СЧ30	420...720	$1,1 \cdot 10^5$
Текстолит	80...100	$6,0 \cdot 10^3$

Вводя в рассмотрение передаточное отношение  $u = n_1/n_2$  (где  $n_1$  и  $n_2$  — частоты вращения катков), межосевое расстояние,  $a = r_1 + r_2$ , коэффициент ширины обода катка  $\Psi_a$  и выразив удельную нагрузку  $g$  через вращающий момент  $M_1$ , из условия прочности катков по допускаемым контактным напряжениям  $[\sigma_H]$  найдем соотношение для вычисления межосевого расстояния передачи:

$$a = (u+1) \sqrt[3]{\frac{M_1 K_c E_{\text{пр}} (0,418)^2}{\Psi_a f(u[\sigma_H])^2}}.$$

Диаметры катков определяются из выражений:

$$D_1 = 2a/(u \pm 1); \quad D_2 = D_1(1 - \xi).$$

Далее определяют усилие прижатия  $F_p$  и нагрузки на валы и опоры.

Рассмотрим примеры расчета передач.

**Пример 30.1.** Рассчитать открытую цилиндрическую передачу с гладкими катками, если передаваемая мощность двигателя  $P_1 = 4,0$  кВт; частота вращения  $n_1 = 1000$  об/мин; передаточное число  $u = 3,25$ .

*Решение.* Выбираем материал катков — сталь по стали всухую. По табл. 30.2 принимаем:  $[\sigma_H] = 600$  МПа; модуль упругости  $2,1 \cdot 10^5$  МПа. Воспользуемся табл. 30.1 и выберем коэффициент трения  $f = 0,15$ . Коэффициент ширины обода катка по межосевому расстоянию  $\Psi_a = 0,3$ . Коэффициент запаса сцепления примем равным 1,5. Тогда определим момент на валу ведущего катка:

$$M_1 = 9,55(P_1/n_1) = 9,55(4000/1000) = 38,2 \text{ Н} \cdot \text{м} = 38,2 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм}.$$

Вычислим межосевое расстояние:

$$a = (3,25 + 1) \sqrt[3]{\frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 38,2 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot (0,418)^2}{0,15 \cdot 0,3 \cdot 3,25([600])^2}} \cong 146 \text{ мм}.$$

Определим геометрические размеры катков: диаметр ведущего катка  $D_1 = (2 \cdot 146 / (3,25 + 1)) = 68,7$  мм, принимаем  $D_1 = 70$  мм. Диаметр ведомого катка  $D_2 = u D_1 = 70 \cdot 3,25 \cong 230$  мм. Уточним межосевое расстояние:  $a = (D_1 + D_2) / 2 = (70 + 230) / 2 = 150$  мм.

Рабочая ширина обода ведомого катка будет  $150 \cdot 0,3 = 45$  мм, ведущего  $(45 + 5) = 50$  мм.

Определим силу нажатия:

$$F_r = 1,5(38,2 \cdot 10^3 \cdot (1 + 3,25) / 0,15 \cdot 150) = 10,82 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Проверим окружную скорость:

$$v = (\pi D_1 n_1 / 60) = (3,14 \cdot 70 \cdot 1000 / 60 \cdot 1000) = 3,66 \text{ м/с, что меньше допускаемой } v = (7 \dots 10) \text{ м/с}.$$

Выполним проверочный расчет по контактным напряжениям:

$$\sigma_H = (0,418/150) \sqrt{\frac{38,2 \cdot 10^3 \cdot 1,5(3,25 + 1)^3 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{45 \cdot 3,25 \cdot 0,15}} = 571 \text{ МПа} \leq [\sigma_H] = 600 \text{ МПа, что допустимо}.$$

Необходимо помнить, что недогрузка передачи допускается не более 10 %, перегрузка — не более 5 %.

**Пример 30.2.** Рассчитать фрикционную коническую передачу, если момент на ведущем валу  $M_1 = 200 \cdot 10^3$  Н·мм, угловая скорость  $\omega_1 = 6,0$  рад/с,  $\omega_2 = 12$  рад/с.

*Решение.* Выбираем материал катков: текстолит — чугун. По табл. 30.2 для текстолита принимаем  $[\sigma_H] = 90$  МПа; модуль упругости  $6,0 \cdot 10^3$ . Значение коэффициентов примем равными: трения  $f = 0,2$  (см. табл. 30.1); запаса сцепления  $K_c = 1,5$  (этот коэффициент вводится для предупреждения пробуксовки от перегрузок в период пуска передачи, для силовых передач  $K_c = 1,2 \dots 1,5$ ; для передач приборов  $K_c = 3 \dots 5$ ); коэффициент длины линии контакта  $\Psi_R = 0,3$  (этот коэффициент принимает значения  $0,25 \dots 0,3$ ).



Определим приведенный модуль упругости:

$$E_{\text{пр}} = ((2E_1E_2)/(E_1+E_2)) = ((2 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 1,1 \cdot 10^5)/(6 \cdot 10^3 + 1,1 \cdot 10^5)) = 1,13 \cdot 10^4 \text{ МПа.}$$

Передаточное отношение  $u_{2-1} = \omega_2/\omega_1 = 120/60 = 2$ .

Вычислим среднее конусное расстояние:

$$R = \sqrt{(u^2 + 1)} \sqrt[3]{\frac{M_1 K_c E_{\text{пр}} (0,418)^2}{\Psi_R f u ([\sigma_H])^2}} =$$

$$= (\sqrt{2^2 + 1}) \cdot \sqrt[3]{(200 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 1,13 \cdot 10^4 \cdot 0,418^2)/(90^2 \cdot 0,3 \cdot 2 \cdot 0,2)} = 189,56 \text{ мм.}$$

Примем среднее конусное расстояние равным 190 мм.

Определим диаметр большего катка (ведущего):

$$D_{m1} = 2R/(1 + u_{1-2}^2)^{0,5} = 2 \cdot 190/(1 + 0,5)^{0,5} = 339,89 \text{ мм;}$$

принимаем  $D_{m1} = 340 \text{ мм.}$

Вычислим углы конусности катков:  $\delta_2 = \text{artgu} = \text{arctg} 0,5 = 26^\circ 34'$ ;  $\delta_1 = 90^\circ - 26^\circ 34' = 63^\circ 26'$ .

Тогда геометрические размеры катков будут следующими: средний диаметр ведомого вала  $D_{m2} = D_{m1} u_{1-2} = 340 \cdot 0,5 = 170 \text{ мм;}$  длина контактной линии и ширина обода катка  $b = R \Psi_R = 190 \cdot 0,3 = 190 \cdot 0,3 = 57 \text{ мм;}$   $b_1 = b \cos \delta_1 = 57 \cos 63^\circ 26' \cong 26 \text{ мм;}$   $b_2 = b \cos \delta_2 = 57 \cos 26^\circ 34' = 51 \text{ мм.}$

Определим силу нажатия:  $F_r = K_c (2M_1/fD_{m1}) = 1,5((2 \cdot 200 \cdot 10^3)/(0,2 \cdot 340)) = 5882 \text{ Н.}$

Проверим окружную скорость:  $v = (\omega_1 D_{m1})/2 \cdot 1000 = (6,0 \cdot 340)/(2 \cdot 1000) = 1,02 \text{ м/с,}$  что меньше допускаемого значения  $v = (7 \dots 10) \text{ м/с.}$

Тогда нормальные напряжения

$$\sigma_H = (0,418/R) \sqrt{\frac{M_1 K_c (\sqrt{(1 + u_{2-1}^2)})^3 E_{\text{пр}}}{b f u_{2-1}}} =$$

$$= (0,418/190) \sqrt{(200 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot (\sqrt{(1 + 2^2)})^3 \cdot 1,13 \cdot 10^4)/(57 \cdot 2 \cdot 0,2)} = 88,41 \text{ МПа,}$$

что удовлетворяет условию прочности, так как  $[\sigma_H] = 90 \text{ МПа.}$

## Глава 31. РЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ

### 31.1. Общие сведения

Ременная передача относится к передачам трением с гибкой связью и может применяться для передачи движения между валами, находящимися на значительном расстоянии один от другого.

Она состоит (рис. 31.1, *a*) из двух шкивов *1* и *2*, связанных между собой ремнем *3*, а также натяжное устройство *4*, создающее контактное давление между ремнем и шкивами и обеспечивающее передачу энергии за счет сил трения.

Ременные передачи классифицируются по следующим признакам:

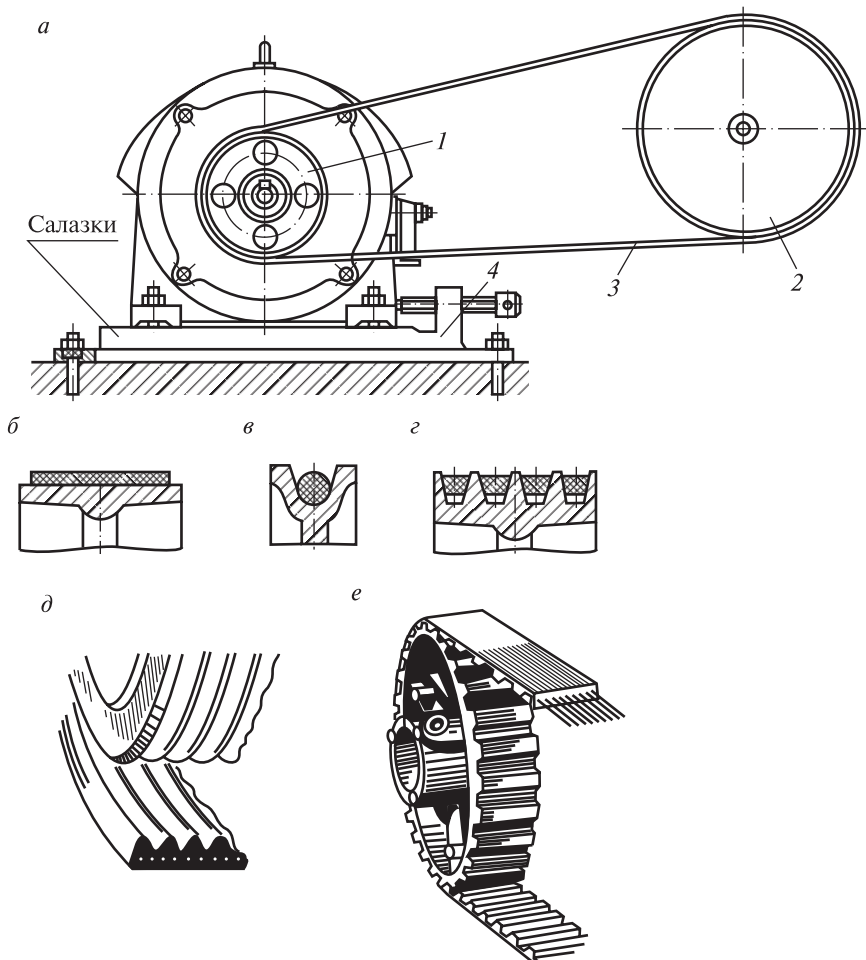


Рис. 31.1. Схема ременной передачи (*a*) и форма сечений ремней: *б* — плоская; *в* — круглая; *г* — клиновая; *д* — поликлиновая; *е* — зубчатая

*по форме сечения ремня* — плоского (рис. 31.1, б); круглого (рис. 31.1, в); клинового (рис. 31.1, г); поликлинового (рис. 31.1, д) и зубчатого (рис. 31.1, е).

*по взаимному расположению осей валов* — с параллельными осями (рис. 31.2, а, б); со скрещивающимися осями (рис. 31.2, в); с пересекающимися осями (угловые, рис. 31.2, г).

*по направлению вращения шкива*: с одинаковым направлением (открытые и полуоткрытые, рис. 31.2, а, в—ж); с противоположными направлениями (перекрестные, рис. 31.2, б).

*по способу создания натяжения ремня* — простые (рис. 31.2, а—в); с натяжным роликом (рис. 31.2, д); с натяжным устройством (рис. 31.1, а).

*по конструкции шкивов* — с однорядными шкивами (рис. 31.2, а—д); со ступенчатыми шкивами (рис. 31.2, е); с раздвижными конусными шкивами (клиноременный вариатор, рис. 31.2, ж).

В механических приводах ременная передача используется преимущественно как понижающая. Передаваемая мощность — до 50 кВт, окружные скорости до 40—50 м/с, максимальное передаточное отношение  $u_{\max} = 5...6$  для передач без натяжного ролика и  $u_{\max} = 6...10$  для передач с натяжным роликом; допускается кратковременная перегрузка до 300 %.

*Основные преимущества ременных передач*: простота конструкции; сравнительно малая стоимость; способность передавать вращательное движение на большие расстояния и работать с высокими скоростями; плавность и бесшумность работы; малая чувствительность к толчкам и ударам, а также перегрузкам; способность пробуксовывать.

*Основные недостатки*: невысокая долговечность ремня; большие радиальные габариты; значительные нагрузки на валы и опоры; непостоянство передаточного отношения.

## 31.2. Ремни, шкивы и натяжные устройства

*Ремни* должны обладать достаточно высокой прочностью при действии переменных нагрузок, иметь высокий коэффициент трения при движении по шкиву и высокую износостойкость.

По форме сечения различают плоско-, кругло- и клиноременные передачи (см. рис. 31.1, б, в, г).

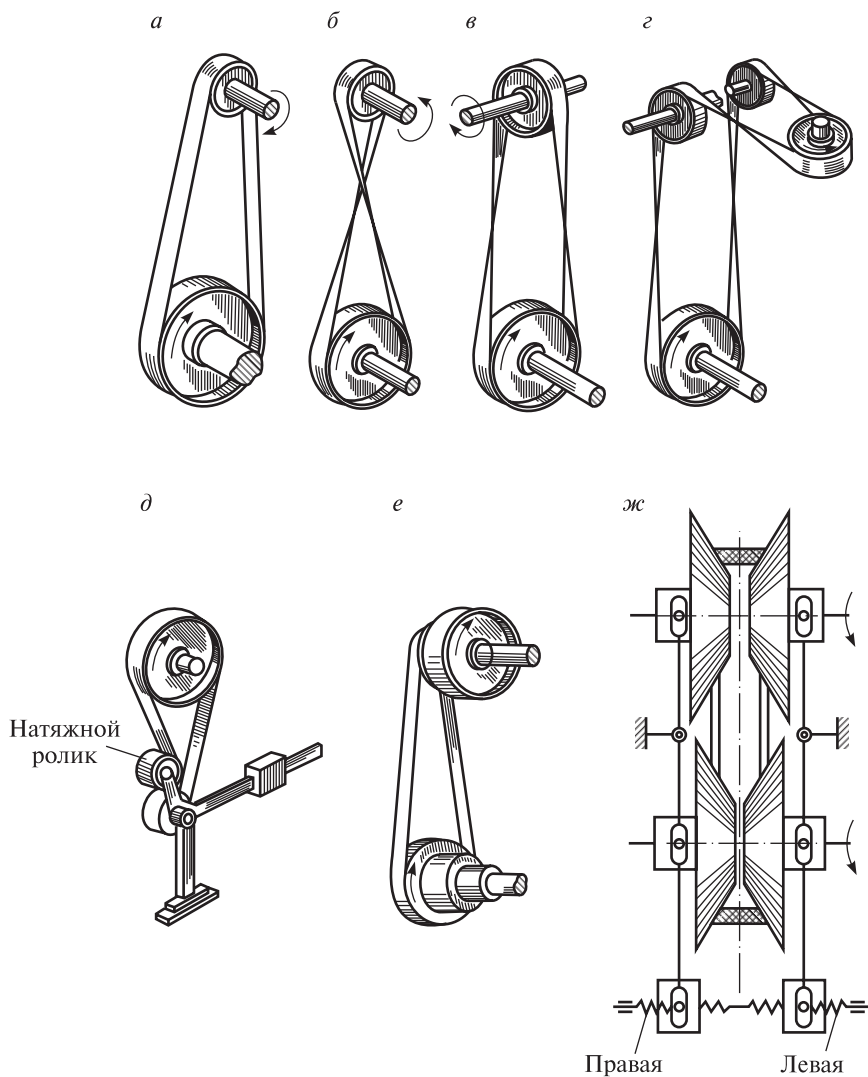


Рис. 31.2. Виды ременных передач по взаимному расположению осей валов: с параллельными осями (а, б), со скрещивающимися осями (в), с пересекающимися осями, угловые (г); по способу натяжения: с роликом (д); по конструкции шкивов: с однорядными шкивами (а—д), со ступенчатыми шкивами (е), с раздвижными конусными шкивами (ж)

*Плоские ремни* имеют прямоугольное сечение (см. рис. 31.1, б), применяются в машинах, к которым предъявляют жесткие требования по вибрациям (например, высокоточные станки). Ремни изготавливают накладкой, склеиванием, сшиванием полос ткани или кожи. Ткань может быть прорезиненной, хлопчатобумажной, шерстяной, капроновой и т.д.

Промышленность изготавливает прорезиненные ремни трех сечений: сечение *А* — нарезное, применяется наиболее часто, скорость ремня — до 30 м/с; сечение *Б* — послойно завернутое, используется для тяжелых условий работы при скоростях до 20 м/с; сечение *В* — спирально завернутое, применяется при малых нагрузках и скоростях до 15 м/с, обеспечивает повышенную износостойкость кромок. Широкое применение получают бесшовные (бесконечные) ремни из пластмасс на основе полиамидных смол, пронизанные кордом из капрона, лавсана и др. Такие ремни имеют более высокую прочность и быстроходность (до 50—75 м/с).

Основные технические характеристики плоских ремней даны в табл. 31.1.

Таблица 31.1

Основные характеристики плоских ремней

Параметры	Кожаные	Прорезиненные			Хлопчатобумажные
		Тип А	Тип Б	Тип В	
1	2	3	4	5	6
Ширина ремней <i>b</i> , мм	10...560	20; 25; 30; 40; 45; 50; 60; 70; 75; 80; 85; 90; 100; 125; 150; 300; 400; 450; 500; 600; 700; 800; 900; 1000; 1100	20; 25; 30; 40; 45; 50; 200; 250; 300; 375; 400; 425; 450; 500	20; 25; 30; 40; 50; 60; 70; 75; 80; 85; 90; 110; 125; 150; 200; 250; 300; 375; 400; 425; 450; 500	30...250
Толщина ремня $\delta$ , мм	(3...6) одинарные	6; 8; 10; 12; 14; 16	3; 4; 5; 6; 7,5; 9; 10,5; 12; 13,5	2,5; 3,75; 5; 6,25; 7,5; 8,75; 10; 11,25	4,5; 6,5; 8,5

1	2	3	4	5	6
Число прокладок (слоев)	—	3—9	2—9	3—9	4—8
Отношение $\delta/D_{\min}$ рекомендуемое допускаемое	0,028 0,04	0,025 0,0033			0,025...0,033 0,028...0,04
Наибольшая рекомендуемая скорость $V_{\max}$	40	30	20	15	25
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	980	1200...1500			750...1050
Модуль продольной упругости $E$ , МПа	98,1...147	78,5...118			29,4...59

*Круглые ремни* (кожаные, капроновые и др.) применяют в машинах малой мощности (бытовых машинах).

*Клиновые ремни* (рис. 31.3, *а, б*), применяемые наиболее часто, имеют большую долговечность и тяговую способность по сравнению с плоскими, могут передавать вращение на несколько валов одновременно. Однако передачи с клиновыми ремнями имеют

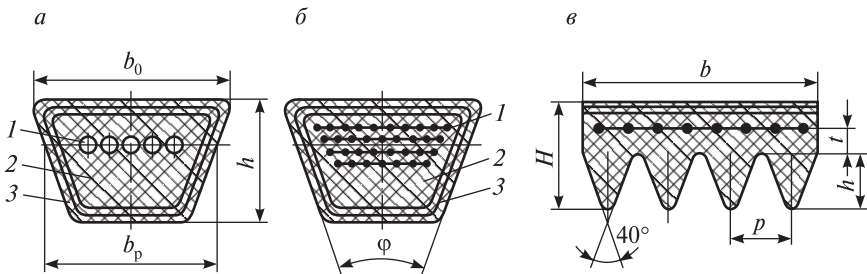


Рис. 31.3. Клиновые ремни:

*а* — кордо-шнуровой; *б* — кордо-тканевый; *в* — поликлиновой

меньшую быстроходность (скорость до 25 м/с), КПД ниже на 1—2 % и могут применяться лишь в открытых передачах. Они состоят (рис. 31.3, а) из кордотканевого слоя 1 (корд, размещенный в нескольких слоях вязкой или капроновой ткани), работающего на растяжение, и резинового (или резиноктаневого) слоя 2, работающего на сжатие. Эти слои связаны оберткой 3 из нескольких слоев диагонально намотанной прорезиненной ткани.

Применяют также ремни с кордошнуровым несущим слоем, состоящим из одного слоя кордошнура 1 толщиной 1,6—1,7 мм, заключенного в слой резины 2; эти слои также связаны оберткой 3 (рис. 31.3, б). Такие ремни имеют большую гибкость и используются при меньших диаметрах шкивов и больших скоростях по сравнению с кордотканевыми ремнями.

Большую гибкость и нагрузочную способность имеют кордошнуровые ремни, у которых верхний растягиваемый слой состоит из одного ряда шнуров (намотанных по винтовой линии), заключенных в слой мягкой резины.

Для работы на шкивах малого диаметра используют, как правило, более гибкие *клиновые ремни* с гофрами на внутренней, а иногда — на внутренней и наружной сторонах.

Клиновые ремни изготовляют с углом клина  $\varphi = 40^\circ$  и отношением большего основания трапецевидного сечения к высоте  $b_0/h \approx 1,6$  (нормальные ремни) и  $b_0/h \approx 1,2$  (узкие ремни). Размеры поперечного сечения (обозначаются) 0, А, Б, В, Г, Д, Е по мере увеличения площади (рис. 31.4, а), длина нормальных ремней определена ГОСТ 1284-80.

Узкие ремни передают в 1,5—2 раза большие мощности, чем нормальные ремни, и допускают работу при скорости 50 м/с. Это дает возможность уменьшить число ремней в комплекте и ширину шкивов. Четыре сечения этих ремней УО, УА, УБ, УВ (рис. 31.4, б) полностью заменяют семь сечений нормальных ремней.

Геометрические размеры клиновых ремней даны в табл. 31.2.

*Поликлиновые ремни* (см. рис. 31.1, д и рис. 31.3, в) получили распространение с высокопрочным полиэфирным кордом, также работающим на шкиве с клиновыми канавками. При одинаковой мощности ширина такого ремня в 1,5—2 раза меньше ширины комплекта нормальных ремней. Благодаря высокой гибкости допуска-

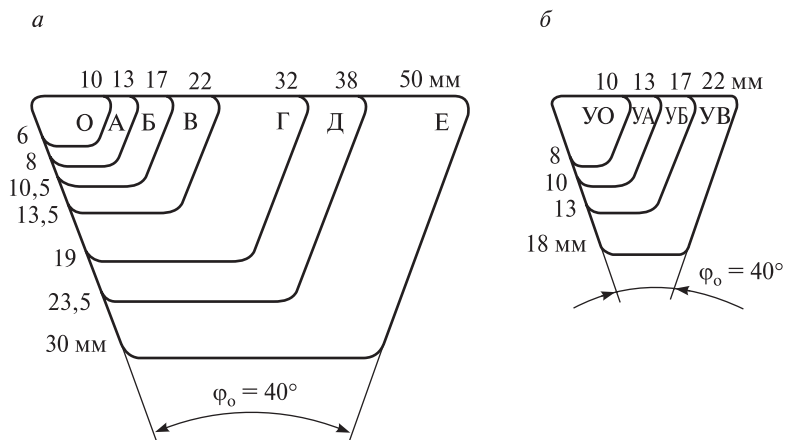


Рис. 31.4. Размеры трапециевидного сечения ремней:  
*а* — клиновые сечения (нормативные); *б* — узкие

Таблица 31.2

Клиновые ремни (см. рис. 31.3, *а*)

Сечение ремня	Размеры сечения, мм			$A_0$ , мм <sup>2</sup>	Натяжение $2F_0$ , Н	Рекомендуемая длина $L$ ремня, мм
	$b_0$	$b_p$	$h$			
О	10	8,5	6	47	11	400...2500
А	13	11	8	81	20	560...4000
Б	17	14	10,5	138	30	800...6300
В	22	19	13,5	230	75	1800...10 600
Г	32	27	19	476	140	3150...15 000
Д	38	32	23,5	692	180	4500...18 000
Е	50	42	30	1170	290	6300...18 000

ется применение шкивов меньшего диаметра, чем в клиноременной передаче, большая быстроходность (до 40—50 м/с) и большие передаточные отношения. Поликлиновые ремни выпускают трех типов: К, Л, М (табл. 31.3). Недостатком таких ремней является чувствительность к отклонениям от параллельности валов и осевому смещению шкивов.



Таблица 31.3

Геометрические размеры поликлиновых ремней (см. рис. 31.3, в)

Обозначение сечения	Размеры сечения, мм				Расчетная длина $L$ , мм	Число клиньев $z$	
	$p$	$H$	$h$	$t$		рекомендуемое	допускаемое
К	2,4	40	2,35	1,0	400...2000	2—36	36
Л	4,8	9,5	4,85	2,4	1250...4000	4—20	50
М	9,5	16,7	10,35	3,5	2000...4000	2—20	50

**Шкивы клиноременных передач.** В отличие от рассмотренных шкивов плоскоременных передач, рабочей поверхностью клиноременных шкивов являются боковые стороны клиновых канавок (рис. 31.5, а). Размеры и углы профиля канавок, толщину обода шкива принимают стандартными (табл. 31.4) в зависимости от типа ремня. Рабочую поверхность канавок желательно полировать, шкивы должны быть хорошо сбалансированы. Для поликлиновых ремней рабочей поверхностью шкива (рис. 31.5, б) являются боковые стороны клиновых канавок в обode шкива.

Материалы и способ изготовления шкивов зависят от окружной скорости ремня. Шкивы изготавливают литыми, сварными или штампованными из чугуна СЧ 10 и СЧ 15 при скорости вращения до 30 м/с; из модифицированного чугуна и стали 25Л при скорости вращения до 45 м/с; из алюминиевых сплавов при скорости вращения до 80 м/с; при окружной скорости свыше 80 м/с для изготовления используют легированные стали.

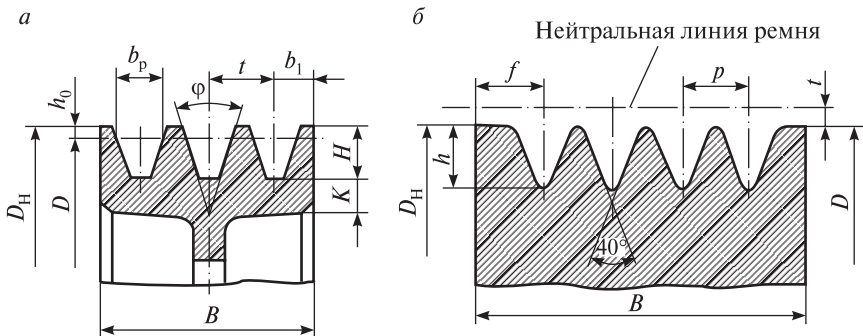


Рис. 31.5. Шкивы ременных передач:  
а — клиновые; б — поликлиновые

Таблица 31.4

Размеры клиноременных шкивов, мм (см. рис. 31.5, а)

Тип сечения ремня	$h_0$	$H$	$t$	$b_1$	К	Расчетные диаметры $D$ шкивов при $\varphi$			
						34°	36°	38°	40°
О	2,5	10	12	8	5,5	63...71	80...100	112...160	180...450
А	3,5	12,5	16	10	6	90...122	125...160	180...400	450...560
Б	5	16	20	12,5	7,5	125...160	180...224	250...500	560...710
В	6	21	26	17	10	200	224...315	355...630	710...1000
Г	8,5	28,5	37,5	24	12		315...450	500...900	1000... 1250
Д	10	34	44,5	29	15		500...560	630...1120	1250...1600
Е	12,5	43	58	38	18			800...1400	Св. 1600

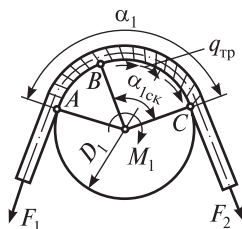
**Натяжные устройства.** В ременных передачах натяжные устройства предусмотрены для регулирования межосевого расстояния, что позволяет свободно надевать новые ремни на шкивы, создавать предварительное натяжение и периодически восстанавливать его или непрерывно поддерживать по мере вытягивания ремней в процессе эксплуатации. Натяжные устройства должны обеспечивать изменение межосевого расстояния в сторону увеличения на  $0,06a$  и в сторону уменьшения на  $0,03a$  (где  $a$  — номинальное значение межосевого расстояния).

Наиболее простым и распространенным способом натяжения ремней является перемещение одного из шкивов. Обычно этот способ используют для передачи движения от электродвигателя, который устанавливают в салазках плиты — устройство периодического действия или качающейся плиты — устройство постоянного действия, где натяжение создается силой тяжести качающейся части. На практике большинство передач работает с переменным режимом нагрузки, поэтому ремни с постоянным предварительным натяжением в период недогрузок оказываются излишне натянутыми, что ведет к резкому снижению долговечности. В этом случае целесообразно применять автоматическое натяжение ремня, при котором оно меняется в зависимости от нагрузки в результате действия реактивного момента, возникающего на статоре двигателя.

### 31.3. Усилия и напряжения в ременных передачах

При движении ремень (рис. 31.6, *a*) передает усилие с ведущего шкива на ведомый за счет сил трения на поверхностях контакта, определяемых углом  $\alpha_i$  ( $i$  — номер шкива,  $i = 1, 2$ ) обхвата ремнем шкива. Для создания между ремнем и шкивами сил трения ремень прижимают к шкивам усилием предварительного натяжения  $F_0$ .

*a*



*б*

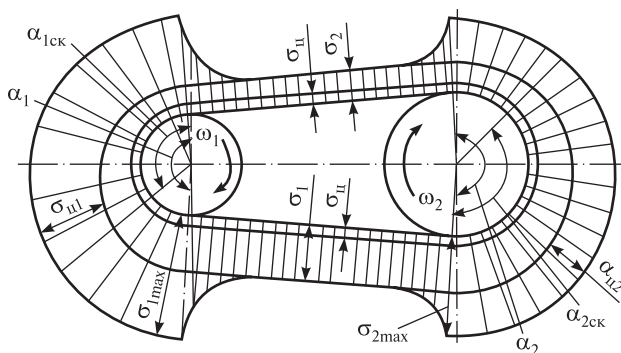


Рис. 31.6. Усилия в ременной передаче:

*a* — взаимодействие ремня со шкивом; *б* — распределение напряжений вдоль ремня

Под действием вращающего момента  $M_1$  в ведущей ветви передачи натяжение возрастет до некоторой величины  $F_1$  вследствие появления момента сопротивления  $M_2$ , а усилие в ведомой ветви уменьшится до величины  $F_2$ .

При этом полезная нагрузка ремня (окружное усилие), равная силе трения между ремнем и шкивом, будет передаваться по всей дуге обхвата:

$$F_t = F_1 - F_2 = 2M_1/D_1 = \int_{A_k} g_{\text{тр}} dA_k, \quad (31.1)$$

где  $g_{\text{тр}}$  — удельная сила трения;

$A_k$  — площадь поверхности контакта ремня со шкивом.

Если использовать модель ремня в виде гибкой нерастяжимой нити, то усилия в ветвях передачи при действии рабочей нагрузки  $F_t$  можно связать соотношением, которое при учете центробежных сил примет вид

$$(F_1 - F_{\text{ц}})/(F_2 - F_{\text{ц}}) = e^{f\alpha_{\text{ск}}} = g, \quad (31.2)$$

где  $f$  — коэффициент трения между ремнем и шкивом;

$\alpha_{\text{ск}}$  — угол дуги скольжения ремня по шкиву.

С учетом равенства (31.1) натяжения в ветвях:

$$F_1 = (g/(g-1))F_t + F_{\text{ц}};$$

$$F_2 = (1/(g-1))F_t + F_{\text{ц}},$$

откуда напряжения в сечениях ведущей и ведомой ветвей ремня от начального натяжения

$$\sigma_0 = F_0/A \quad (31.3)$$

при действии внешней нагрузки

$$\sigma_1 = F_1/A; \quad \sigma_2 = F_2/A, \quad (31.4)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения ремня.

Изменение напряжений вдоль ремня показано на рис. 31.6, б. Наибольшие напряжения испытывают наружные волокна в зоне контакта ремня с малым шкивом. Здесь к растягивающим напряжениям  $\sigma_1$  от усилия натяжения  $F_1$  добавляется напряжение растяжения от изгиба ремня вокруг шкива:

$$\sigma_{\text{max}} = \sigma_1 + \sigma_{\text{и}} = ((g/(g-1))(F_t/A) + \sigma_{\text{ц}} + \sigma_{\text{и}}. \quad (31.5)$$

Окружные растягивающие напряжения от центробежных сил находят, полагая, что ремень является кольцом, вращающимся со скоростью  $v$ :

$$\sigma_{\text{ц}} = \rho v^2, \quad (31.6)$$

где  $\rho$  — плотность материала ремня.

Максимальные напряжения изгиба в ремне, как и в кольце, зависят от наименьшего диаметра  $D_1$  шкива и толщины ремня  $h$ :

$$\sigma_{\text{и}} = E(h/D_1), \quad (31.7)$$

где  $E$  — приведенный модуль упругости ремня, для прорезиненных ремней  $E = 200...300$  МПа, для капроновых ремней  $E = 600$  МПа, для клиновых кордотканевых ремней  $E = 500...600$  МПа.

Как уже отмечалось, напряжения  $\sigma_0$  в ремне от начального натяжения назначают из условия обеспечения наибольшей долговечности ремня. На основе опыта эксплуатации передач с плоским и клиновым ремнем назначают  $\sigma_0 = 1,2...1,8$  МПа.

Существенно, что напряжения изгиба  $\sigma_{\text{и}}$  являются переменными, они вызывают усталостное повреждение ремня. Для уменьшения напряжений минимальное значение диаметра малого шкива ограничивают. Обычно  $D_1/h = 25...45$ .

### 31.4. Кинематика и геометрические зависимости передач

**Скольжение в передаче.** Работа упругого ремня сопровождается его неизбежным проскальзыванием, вызванным различным натяжением ведущей и ведомой ветвей и, как следствие, — неравномерным распределением деформаций растяжения и сдвига по дуге обхвата. При обегании ремнем ведущего шкива натяжение его падает, ремень укорачивается и проскальзывает по шкиву. На ведомом шкиве ремень удлиняется, опережая шкив. Опытom установлено, что на первом участке  $AB$  — дуге сцепления (рис. 31.6, *a*) — за счет нарастающих тангенциальных сил сцепления (меньших полных сил трения) передается малая часть нагрузки, а деформации сдвига ремня (показаны тонкими линиями) приводят к небольшому относительному снижению его скорости.

В точке  $B$  силы сцепления становятся равными силам трения, происходит срыв и начинается скольжение ремня по дуге  $BC$  — дуге скольжения. На этой дуге с углом  $\alpha_{\text{ск}}$  за счет сил трения, нарастающих от точки  $B$  к точке  $C$ , передается основная часть окружного усилия и имеет место значительное снижение окружной скорости.

Снижение скорости от  $v_1$  (для ведущей ветви) до  $v_2$  (для ведомой ветви) характеризуют относительным скольжением

$$\xi = (v_1 - v_2)/v_1.$$

Передаточное отношение

$$u = \omega_1/\omega_2 = D_2/(1 - \xi)D_1.$$

В расчетах, как правило, принимают  $\xi = 0,001-0,02$ .

**Быстроходность передачи.** Окружные растягивающие напряжения от центробежных сил находят по формуле (31.6), полагая, что  $\sigma_{ц} = \sigma_0$ , то давление на всей дуге обхвата будет равно нулю и передача не сможет передавать нагрузку. Окружная скорость на шкиве при этом составит

$$v_{1кр} = \sqrt{(\sigma_0 / \rho)}.$$

Для ремня из капрона можно принять напряжение от начального натяжения  $\sigma_0 = 50$  МПа и  $v_{1кр} = 150$  м/с.

С увеличением быстроходности возрастают потери на трение и при окружной скорости  $v_{кр} = \sqrt{(\sigma_0 / 5\rho)}$  потери на трение будут наибольшими. Режимов работы передачи со скоростью  $v_{2кр}$  следует избегать из-за опасности перегрева ремня.

Оптимальная скорость ремней 20—25 м/с, а наибольшая допустимая 30—35 м/с. Узкие клиновые ремни с улучшенным кордом могут работать при скоростях до 40—60 м/с.

**Геометрия передачи.** Основными геометрическими параметрами передач являются диаметры шкивов  $D_1$  и  $D_2$ , межосевое расстояние  $a$ , длина ремня  $L$  и угол обхвата  $\alpha$  на меньшем шкиве.

Для ограничения напряжений изгиба диаметр  $D_1$  меньшего шкива в клиноременной передаче регламентирован стандартом для каждого сечения ремня (ГОСТ 1284-80). В случае передач с плоским ремнем минимальный диаметр (мм) меньшего шкива находят по эмпирической формуле

$$D_1 = (1100 \dots 1350) \sqrt[3]{\frac{P_1}{n_1}},$$

где  $P_1$  — передаваемая мощность, кВт;

$n_1$  — частота вращения меньшего шкива, об/мин.

Минимальное межосевое расстояние в плоскоремennых передачах

$$a_{\min} = 0,5(D_1 + D_2),$$

в клиноременных передачах (на основе данных эксплуатации)

$$a_{\min} = 0,55(D_1 + D_2) + h.$$

Для увеличения долговечности ремня принимают  $a > a_{\min}$ .

Максимальное межосевое расстояние по экономическим соображениям (во избежание увеличения габаритов и стоимости ремней) рекомендуют ограничивать величиной

$$a_{\max} = 2(D_1 + D_2).$$

Требуемая длина ремня для открытой передачи при заданном межосевом расстоянии  $a$  и угле обхвата  $\alpha$  определяется как сумма прямолинейных участков и дуг обхвата:

$$L \cong 2a + \pi (D_1 + D_2)/2 + (D_2 - D_1)^2/(4a).$$

Угол обхвата меньшего шкива

$$\alpha = 180^\circ - ((D_2 - D_1)/a) \cdot 57^\circ.$$

Значение угла  $\alpha$  зависит от тяговой способности, которая у передач резинотканевыми ремнями ниже, чем у клиноременных. По этой причине угол  $\alpha$  у них больше и составляет  $\alpha \geq 150^\circ$ , тогда как у передач синтетическими ремнями и клиноременных  $\alpha \geq 120^\circ$ . В результате габариты клиноременных передач значительно меньше, чем передач резинотканевым ремнем. Для увеличения угла  $\alpha$  увеличивают межосевое расстояние  $a$ .

### 31.5. Критерии работоспособности ременных передач

Прочность сцепления ремня со шкивом характеризует *тяговую способность передачи*. Ее принято оценивать *коэффициентом тяги* — относительной нагрузкой в предположении, что  $F_{\text{ц}} = 0$ :

$$\varphi = (F_1 - F_2)/(F_1 + F_2) = F_t/(F_1 + F_2).$$

С учетом равенства (31.6) несложно получить

$$\varphi = (g - 1)/(g + 1).$$

Таким образом, коэффициент тяги зависит от условий работы передачи.

Если положить, что при действии внешней нагрузки удлинение ведущей ветви равно укорочению ведомой ветви, то получим ( $F_0$  — усилие начального натяжения ремня):

$$F_1 = F_0 + 0,5F_t; F_2 = F_0 - 0,5F_t \quad (31.8)$$

и соотношение для коэффициента тяги

$$\varphi = F_t / (2F_0).$$

Тяговую способность передачи удобно оценивать по вращающему моменту на ведущем шкиве. Пренебрегая силами инерции, из соотношений (31.1)—(31.2) и (31.8) найдем:

$$M_1 = F_0 D_1 ((e^{f\alpha_{\text{ск}}} - 1) / (e^{f\alpha_{\text{ск}}} + 1)) = F_0 D_1 \varphi. \quad (31.9)$$

Из этого равенства видно, что тяговая способность передачи будет возрастать при увеличении предварительного натяжения ремня  $F_0$ , угла обхвата  $\alpha$  и связанного с ним угла скольжений  $\alpha_{\text{ск}}$  (в расчетах принимают  $\alpha_{\text{ск}} \approx 0,7\alpha$ ), а также коэффициента трения между ремнем и шкивами.

Для увеличения нагрузочной способности передачи необходимо стремиться к использованию более прочных ремней, допускающих высокие начальные напряжения (например, капрон, нейлон и т.д.). Однако в этом случае возрастают нагрузки на опоры.

Менее эффективно использование материалов с высоким коэффициентом трения в связи с возрастанием потерь на трение и опасностью перегрева ремня при упругом скольжении.

Нагрузочную способность передачи можно повысить, увеличив коэффициент трения между ремнем и меньшим шкивом (для этого на меньший шкив надевают бандаж из специально подобранного материала).

Для получения высокой тяговой способности передач с плоским ремнем рекомендуется обеспечивать  $\alpha \geq 150^\circ$ .

В передачах с большим передаточным отношением и при малом расстоянии между осями валов угол обхвата для малого шкива и усилие натяжения часто увеличивают с помощью натяжных роликов, устанавливаемых на ведомой ветви.

Коэффициент трения  $f$  в формуле (31.9) соответствует передаче с плоским ремнем.

В клиноременной передаче

$$f_{\text{кл}} = f / (\sin \varphi_0 / 2).$$

Для стандартных ремней  $\varphi_0 = 40^\circ$  и  $f_{\text{кл}} \approx 3f$ . Отсюда следует, что в клиноременных передачах сцепление ремня со шкивом почти в три раза больше, чем в передаче с плоским ремнем. Благодаря это-



му клиноременные передачи хорошо работают при углах обхвата  $\alpha \geq 120^\circ$ . В ряде конструкций допускают  $\alpha = 80...100^\circ$ .

При работе плоскоременной передачи часть энергии расходуется на упругий гистерезис при циклическом деформировании ремня (растяжение, сдвиг, изгиб); на скольжение ремня по шкивам, аэродинамическое сопротивление движению ремня и шкивов, а также на трение в подшипниках валов передачи.

В клиноременной передаче к этим потерям добавляются потери на трение при радиальном перемещении ремня в процессе входа его в канавку и выхода из нее, а также возрастают потери на упругий гистерезис при изгибе ремня (клиновой ремень имеет большую толщину, чем плоский ремень).

КПД ременной передачи зависит от коэффициента тяги  $\phi$  и соответствующего ему относительного скольжения ремня  $\xi$ . По мере увеличения относительной нагрузки до некоторого значения  $\phi_0$  наблюдается линейное нарастание скольжения ремня от упругих деформаций, сопровождаемое ростом КПД из-за уменьшения влияния потерь холостого хода.

Дальнейшее увеличение  $\phi$  приводит к более интенсивному снижению скорости, что связано с увеличением дуги скольжения и ростом потерь скорости при набегании ремня на шкивы. Передача работает без буксования и в этой области, но КПД снижается из-за нарастания потерь энергии на трение. Лишь при  $\phi = \phi_{\max}$  начинается *буксование*.

Оптимальным считают нагружение передачи, соответствующее наибольшему КПД и некоторому запасу по сцеплению ( $\phi_0 = 0,4...0,5$  — для плоскоременных передач,  $\phi_0 = 0,6...0,7$  для клиноременных передач).

При оптимальной нагрузке коэффициент  $\eta = 0,97...0,98$  для плоскоременной передачи, а для клиноременной передачи  $\eta = 0,92...0,97$ .

### 31.6. Расчет ременных передач

Работоспособность ременной передачи может быть ограничена долговечностью ремня и тяговой способностью.

**Долговечность ремня.** Экспериментальные исследования показали, что долговечность ремня  $N$  (в циклах) связана с максимальным переменным напряжением обычным соотношением

$$\sigma_{\max}^m N = \text{const},$$

откуда ресурс ремня

$$N = (c/\sigma_{\max})^m. \quad (31.10)$$

Если ввести в рассмотрение число пробегов ремня в секунду  $\nu = v/L$  ( $v$  — скорость ремня, м/с;  $L$  — длина ремня, м), то при постоянном режиме нагружения и  $u = 1$

$$N = 3600\nu z_{\text{ш}} T,$$

где  $z_{\text{ш}}$  — число шкивов;

$T$  — срок службы ремня, ч.

Тогда

$$T = ((1/3600\nu z_{\text{ш}})(c/\sigma_{\max})^m). \quad (31.11)$$

В передачах с  $\sigma_0 = 1,2$  МПа при  $u = 1$  принимают для плоских прорезиненных ремней  $m = 5...6$ ,  $c = 60...70$  МПа; для клиновых кордошнуровых  $m = 6...11$ ,  $c = 30$  МПа.

Однако к настоящему времени накоплено недостаточно материала для расчета ремней на усталость, и для косвенной оценки долговечности используют параметр  $\nu$ . На основе опыта эксплуатации ременных передач установлено, что для обеспечения нормальных сроков службы приводных ремней в открытой плоскоремной передаче  $\nu \leq 3...5$ , в клиноремной передаче —  $\nu \leq 10...15$ . Используя эти значения  $\nu$ , можно определить при данной скорости минимальную длину ремня.

**Расчет на тяговую способность.** Расчет передач с плоским ремнем сводится к определению ширины ремня  $b$  по заданной окружной силе  $F_t$ , материалу ремня и допускаемому полезному напряжению  $[K] = [F_t] / A$ , где  $[F_t]$  — допускаемая полезная нагрузка, при котором передача имеет наибольший КПД:

$$b = (F_t k_d)/(h[K]), \quad (31.12)$$

где  $k_d$  — коэффициент динамичности, учитывающий режим работы передачи (табл. 31.5).

Коэффициент динамичности и режима работы

Характер нагрузки	Тип машины	$k_d$
Спокойная. Пусковая нагрузка до 120 % от нормальной	Электрические генераторы, центробежные насосы и компрессоры; станки с непрерывным процессом резания; вентиляторы; ленточные транспортеры	1
Умеренные колебания нагрузки. Пусковая нагрузка до 150 % от нормальной	Поршневые насосы и компрессоры с тремя и более цилиндрами; станки и автоматы; пластинчатые транспортеры	1,1
Значительные колебания нагрузки. Пусковая нагрузка до 200 % от нормальной	Реверсные приводы; поршневые насосы и компрессоры с одним и двумя цилиндрами; строгальные и долбежные станки; винтовые и скребковые транспортеры; элеваторы; эксцентриковые и винтовые прессы с тяжелыми маховиками	1,25
Ударная и резко неравномерная нагрузка. Пусковая нагрузка до 300 % от нормальной	Ножницы, молоты, мельницы; подъемники, экскаваторы, драги; эксцентриковые и винтовые прессы с легкими маховиками	1,5—1,6

*Примечание.* При частых и резких пусах двигателя с большими пусковыми моментами  $k_d$  следует повышать также на 0,15 %, при двухсменной работе на 0,15 %, а при трехсменной работе — на 0,35 %.

Допускаемое полезное напряжение для горизонтально расположенной передачи ( $\alpha_0 = 1,6...2$  МПа,  $\alpha = 180^\circ$ ,  $v = 10$  м/с, нагрузка спокойная), находят из эмпирического соотношения

$$[K_0] = a_k - w_k(h/D_1),$$

где  $a_k = 2...3$  МПа;

$w_k = 9...17$  МПа для прорезиненных и хлопчатобумажных ремней.

Конструктивные и рабочие параметры проектируемой передачи обычно отличаются от указанных ранее «стандартных» параметров. В связи с этим допускаемое полезное напряжение уточняют с помощью корректирующих коэффициентов, полученных экспериментально:

$$[K] = [K_0]C_\alpha C_v C_0,$$

где  $C_\alpha$  — коэффициент, учитывающий влияние угла обхвата меньшего шкива:

$\alpha$ , град	120	140	160	180	200	220
$C_\alpha$	0,82	0,88	0,94	1,0	1,1	1,2

$C_v$  — коэффициент, учитывающий влияние скорости ремня;

$C_v = 1,04 - 0,0004v^2$ ;

$C_0$  — коэффициент, учитывающий способ натяжения ремня и положение передачи,  $C_0 = 1$  в передачах с автоматическим натяжением,  $C_0 = 1; 0,9; 0,8$  в передачах с периодическим подтягиванием ремня и углом наклона линии центров к горизонту соответственно:  $0-60^\circ; 60-80^\circ; 80-90^\circ$ .

Расчет клиноременных передач лишь по форме отличается от предыдущего и состоит в определении требуемого числа ремней  $z$  по определенному профилю сечения:

$$z = (Pk_d)/(P_0K) = (F_t v k_d)/(P_0 K), \quad (31.13)$$

где  $P$  — общая мощность передачи, Вт;

$k_d$  — коэффициент динамичности (значения которого приведены в табл. 31.5);

$F_t$  — полезная нагрузка, Н;

$P_0$  — допускаемая мощность в передаче одним ремнем при  $\alpha = 180^\circ$ , спокойной работе и  $\sigma_0 = 1,6$  МПа устанавливается ГОСТ 1284-80 для каждого сечения ремня;

$K = K_\alpha K_L K_z$  — корректирующий коэффициент;

$K_\alpha$  — коэффициент угла обхвата:

$\alpha$ , град	70	90	110	130	150	180
$K_\alpha$	0,56	0,68	0,78	0,88	0,92	1

$K_L$  — коэффициент, учитывающий влияние длины ремня на его ресурс:

$L/L_0$	0,3	0,5	0,8	1,0	1,4	1,6	2,0
$K_L$	0,79	0,86	0,95	1,0	1,07	1,1	1,15

Здесь  $L$  и  $L_0$  — соответственно расчетная и условная длина ремня; значения  $L_0$  для ремней неравномерное распределение нагрузки между одновременно работающими ремнями, при  $z = 2...3$  коэффициент  $K_z = 0,95$ , при  $z = 4...6$  коэффициент  $K_z = 0,9$ , при  $z > 6$  коэффициент  $K_z = 0,85$ .

В «многоручевой» передаче из-за разной (вследствие рассеяния) длины ремней и различных упругих свойств нагрузка между ремнем распределяется неравномерно. В связи с этим не рекомендуется использовать в передаче более 8—12 ремней.

Расчеты передач с узкими и поликлиновыми ремнями выполняются аналогично.

### 31.7. Передачи с зубчатыми ремнями

**Ремни и шкивы.** Зубчатый ремень представляет собой по форме бесконечную плоскую ленту с зубцами трапециевидальной формы на внутренней поверхности (рис. 31.7, *а*), входящими в зацепление с зубцами на шкивах. Ремни выполняют в основном из армированного металлотросом неопрена или реже — полиуретана. Спирально навитый по длине ремня трос служит несущим элементом при передаче окружного усилия и обеспечивает неизменяемость шага ремня. Предел прочности проволоки троса  $\sigma_B = 3000$  МПа, относительное удлинение  $\delta = 4...5$  %.

Каркас кинематических зубчатых ремней (применяемых в контрольной и измерительной аппаратуре) изготавливают из стекловолокна или полиамидного шнура, а ремень — из резины, покрытой тканым нейлоном для повышения износостойкости.

Основным конструктивным параметром ремня (рис. 31.10, *б*) является угол  $2\gamma = 50^\circ$  и модуль  $m = t/\pi$ , где  $t$  — шаг зубьев.

Значения модуля выбирают по ГОСТу в зависимости от передаваемой мощности и частоты вращения быстроходного вала.

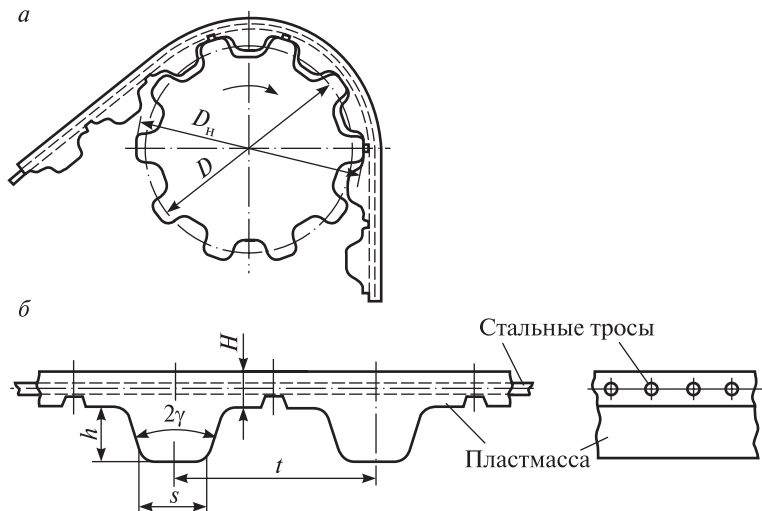


Рис. 31.7. Схема передачи с зубчатым ремнем:  
*а* — схема ремня со швом; *б* — конструктивные параметры ремня

При  $n = 650 \dots 3500$  об/мин:

$P$ , кВт	0,15...0,18	0,27...1,5	2,2...5,5	7,0...17
$m$ , мм	2; 3	3; 4	4; 5	5; 7

Ширину  $b$  ремня выбирают в зависимости от модуля:

$m$ , мм	2	3	4	5	7; 10
$b$ , мм	10; 12,5; 16	16; 20; 25	25; 32; 40	32; 40; 50	63; 80

Далее определяют другие параметры: высоту зубьев  $h = 0,6 m$ , наименьшую толщину  $S = m$ , толщину ремня по впадинам  $H = m+1$ , расчетную длину ремня  $L = \pi m z_p$  ( $z_p$  — число зубьев ремня), диаметры делительных окружностей  $D_1 = m z_1$ ,  $D_2 = m z_2$ , наружные диаметры шкивов зубчатых ремней  $D_{H1} = m z_1 + 2\Delta$ ;  $D_{H2} = m z_2 - 2\Delta$ , где  $\Delta = 0,6$  мм при диаметре троса  $0,3-0,4$  мм и  $\Delta = 1,3$  при диаметре троса  $0,65-0,8$  мм.

Шаг зубьев на наружном диаметре

$$t_{\text{ш}} = (\pi D_H) / z.$$

Минимальное число зубьев меньшего шкива принимается равным  $z_{\min} = 16 \dots 20$  при  $m = 2 \dots 5$  мм и  $z_{\min} = 20 \dots 25$  при  $m = 7 \dots 10$  мм, большие значения назначают при больших скоростях. Число зубьев ремня, находящихся в зацеплении с меньшим шкивом, должно быть не меньше 6.

В зависимости от модуля наибольшие скорости ремней должны быть равны:

$m$ , мм	2	3	4...10
$v$ , м/с	25	35	40

**Расчет на тяговую способность.** Расчетное удельное окружное усилие (Н/см) на ремне

$$p_t = [p_0] C_u C_H C_K,$$

где  $[p_0]$  — допускаемое удельное окружное усилие:

$m$ , мм	2	3	4	5	7	10
$[p_0]$ , Н/см	50	100	250	350	450	600

$C_u$  — коэффициент передаточного отношения, вводимый только для ускоряющей передачи, при  $u \geq 1$   $C_u = 1$ :

$u$	1...0,8	0,8...0,6	0,6...0,4	0,4...0,3	менее 0,3
$C_u$	1	0,95	0,9	0,85	0,8

$C_H$  — коэффициент, учитывающий применение натяжного или направляющего ролика,  $C_H = 0,9$  при одном ролике и  $C_H = 0,8$  — при двух роликах;

$C_k$  — коэффициент, учитывающий неравномерное распределение нагрузки между витками троса:

ширина ремня

$b$ , мм	8	10	12,5	16	20	25	40	63	100
$C_k$	0,67	0,77	0,83	0,91	0,94	1	1,04	1,09	1,2

Необходимая ширина ремня

$$b = F_t / (p_t - gv^2),$$

где  $g$  — масса 1 м ремня шириной 1 см:

$m$ , мм	2	3	4	5	7	10
$g \cdot 10^2$ , кг/(м·см)	0,3	0,4	0,6	0,7	0,8	1,1

$v$  — скорость ремня, м/с;

$F_t$  — окружное усилие, передаваемое ремнем:  $F_t = Pk_d/v$ ; здесь  $P$  — передаваемая мощность, Вт;  $k_d$  — коэффициент динамичности (см. табл. 31.5);  
 $v$  — скорость ремня, м/с.

Окружное усилие  $F_t$  часто ограничивают давлением на зубья в зацеплении с малым шкивом. После определения ширины ремня рекомендуется проверить давления на зубьях

$$p_z = F_t \Psi / z_0 b h \leq [p_z],$$

где  $\Psi$  — коэффициент неравномерности распределения нагрузки между зубьями ремня и шкива на дуге обхвата,  $\Psi = 1,7 \dots 2,0$  при нагрузке до 14 кВт и скорости ремня до 20 м/с;

$z_0$  — число зубьев в зацеплении;

$$z_0 = z_{ш1}(\alpha_1 / 360^\circ),$$

где  $\alpha_1$  — угол обхвата на малом шкиве;

$[p_z]$  — допускаемое давление на зубья ремня, зависящее от частоты вращения быстроходного вала:

$n$ , об/мин	200	400	1000	2000	5000	10000
$[p_z]$ , МПа	2,0	1,5	1,0	0,75	0,5	0,35

Передача зубчатым ремнем не требует значительного натяжения. Для обеспечения зацепления ремня со шкивом назначают небольшое натяжение:

$m$ , мм	2	3	4	5	7	10
$F_0/b$ , Н/см	4	6	8	10	14	20

Усилия на валы передачи

$$F = (1 \dots 1,2) F_t.$$

В настоящее время ременные передачи находят все более широкое применение в технике, в том числе на железных дорогах.

## Глава 32. ЦЕПНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

### 32.1. Общие сведения

Цепная передача, как и ременная, принадлежит к числу передач с гибкой связью. Она состоит из *ведущей* и *ведомой звездочек*, связанных между собой *приводной цепью*. Гибким звеном является цепь. Зацепление обеспечивает ряд преимуществ по сравнению с ременной передачей. В конструкции цепных передач для компенсации удлинения цепи при вытяжке и обеспечения стрелы провисания  $f$  иногда предусматривают специальное натяжное устройство.

Угол обхвата звездочки цепью не имеет такого решающего значения, как угол обхвата шкива ремнем в ременной передаче. Цепные передачи можно использовать как при больших, так и при малых межосевых расстояниях. Они могут передавать мощность от одного ведущего звена нескольким ведомым звездочкам. Передаваемая мощность цепной передачи обычно не превышает 100 кВт. Межосевое расстояние — до 6—8 м, передаточное отношение —  $u = 7...15$  для тихоходных передач (скорость  $v < 2$  м/с),  $u = 3...6$  для среднеходных передач ( $v = 2...6$  м/с) и  $u \leq 3$  для быстроходных передач ( $v = 6...15$  м/с) и в комбинированном приводе.

Цепные передачи широко распространены в транспортирующих устройствах железнодорожного транспорта.

Передача может работать между горизонтальными валами, а также при наклоне к горизонту линии центров звездочек до  $\Psi = 75...80^\circ$ . Цепные передачи имеют высокий КПД, меньшую, чем в ременной передаче, нагрузку на валы, в них исключено проскальзывание цепи.

Цепные передачи разделяют по следующим основным признакам:

- по типу цепей — роликовые (рис. 32.1, а), втулочные (рис. 32.1, б), зубчатые (рис. 32.1, в);

- по числу рядов роликовые цепи делят на однорядные (рис. 32.1, а) и многорядные (рис. 32.1, б);

- по числу ведомых звездочек — двухзвенные (рис. 32.1, а—в) и многозвенные (рис. 31.1, г);

- по расположению звездочек — горизонтальные (рис. 32.2, а), наклонные (рис. 32.2, б), вертикальные (рис. 32.2, в);



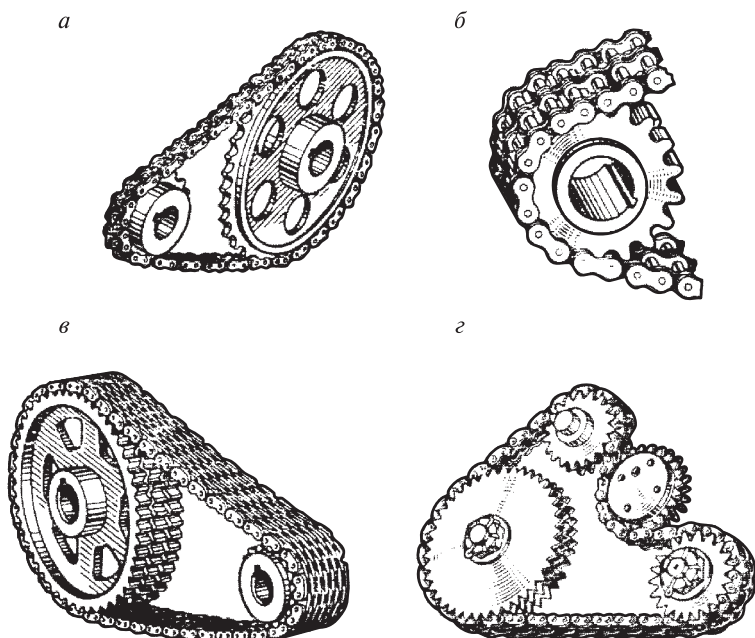


Рис. 32.1. Типы цепей:

*а* — роликовая; *б* — втулочная; *в* — зубчатая; *г* — многозвенная

по способу регулирования провисания цепи — с натяжным устройством или натяжной звездочкой (роликом, рис. 32.2, *а*);

по конструктивному исполнению — открытые (рис. 32.1) и закрытые (рис. 32.2, *д*).

*Достоинством цепных передач* является большая прочность стальной цепи по сравнению с ремнем, что позволяет передать цепью большие нагрузки с постоянным передаточным числом и при значительно меньшем межосевом расстоянии (передача более компактна); возможность передачи движения одной цепью нескольким звездочкам; по сравнению с зубчатыми передачами — возможность передачи вращательного движения на большие расстояния (до 7 м); меньшая, чем в ременных передачах, нагрузка на валы; сравнительно высокий КПД ( $\eta_{\max} \approx 0,9 \dots 0,98$ ).

*Недостатками:* сравнительно высокая стоимость цепей; вытягивание цепей вследствие изнашивания в шарнирах; повышенный

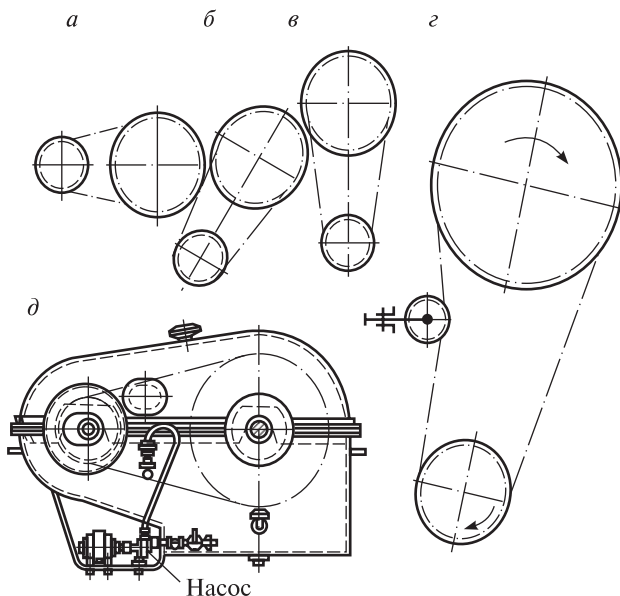


Рис. 32.2. Цепные передачи, характеризуемые расположением звездочек:  
*a* — горизонтальные; *б* — наклонные; *в* — вертикальные;  
 по способу регулирования: *г* — с натяжной звездочкой (роликом); по конструктивному исполнению: *д* — закрытые

шум вследствие удара звена цепи при входе в зацепление и дополнительные динамические нагрузки из-за многогранности звездочек; необходимость высококачественного монтажа передачи и тщательного ухода за ней; невозможность использования передачи при реверсировании без остановки; сложность подвода смазочного материала к шарнирам цепи.

## 32.2. Приводные цепи и звездочки

Приводные цепи осуществляют передачу движения непосредственно от источника к рабочему органу или через промежуточные устройства. Конструктивно они делятся на роликовые, втулочные и зубчатые.

*Роликовая цепь* (рис. 32.3) состоит из последовательно чередующихся внутренних 1 и внешних 2 звеньев, шарнирно соединенных

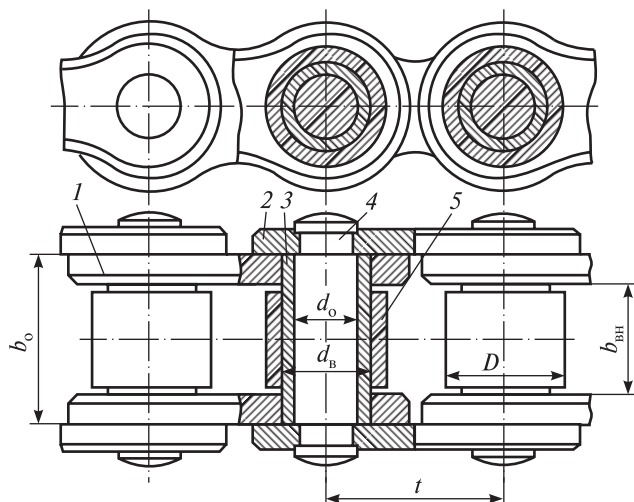


Рис. 32.3. Роликовая цепь

между собой. Каждое звено выполнено из двух пластин, напрессованных на втулки 3 (у внутренних звеньев) или оси-валики 4 (у наружных звеньев). Для уменьшения износа зубьев звездочек на втулку перед сборкой звена надевают ролик 5, свободно вращающийся на ней.

Концы цепи соединяют с помощью соединительного звена со шплинтами или штифтами, если цепь имеет четное число шагов. Цепь с нечетным числом шагов соединяется через переходное звено. С увеличением шага цепи уменьшается ее быстроходность и несущая способность. Обычно  $0,01a \leq t \leq 0,04a$  (где  $a$  — межосевое расстояние). Характеристикой прочности цепи служит разрушающая нагрузка, устанавливаемая экспериментально заводом-изготовителем.

Материал пластин роликовых цепей — сталь 50 (с закалкой до HRC 38—45); валиков, втулок, роликов — сталь 15, 20, 25 (с последующей цементацией и закалкой до HRC 52—60).

В зависимости от отношения шага цепи  $t$  к диаметру ролика  $D$  различают цепи *легкой* (ПРЛ) и *нормальной* (ПР) серий и *длиннозвенные цепи* (ПРД,  $t/D > 2$ ).

В передачах при больших нагрузках и скоростях применяют *многорядные роликовые цепи* (двухрядные 2ПР, трехрядные 3ПР и четырехрядные 4ПР). Многорядные цепи набирают из тех же элементов, что и однорядные, однако валики имеют увеличенную длину. Разрушающие нагрузки для этих цепей пропорциональны числу рядов.

В строительных и дорожных машинах, функционирующих при тяжелых режимах работы, применяют роликовые цепи с изогнутыми пластинами, подобными переходным звеньям обычных цепей. Благодаря высокой осевой податливости такие цепи лучше работают при ударных нагрузках и частых реверсах.

В транспортном машиностроении наряду с роликовыми цепями применяют *втулочные цепи* (рис. 32.4). По конструкции они аналогичны роликовым, отличаясь от последних отсутствием самого ролика. В зацепление с зубьями звездочки входит непосредственно втулка. В этом случае изнашивание звездочки значительно больше, чем при использовании роликовой цепи. В практике транспортного строительства использование втулочных цепей ограничено.

*Зубчатые цепи* по ГОСТ 13552-81 (рис. 32.5) обеспечивают плавную работу с меньшим шумом, чем роликовые. Они также имеют большую допустимую скорость и повышенную прочность.

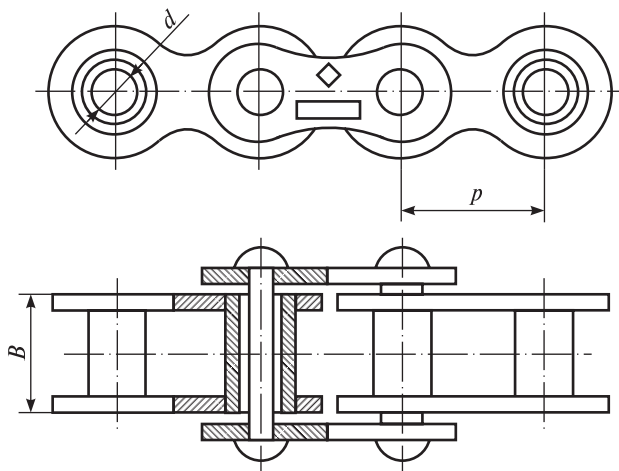


Рис. 32.4. Втулочная цепь

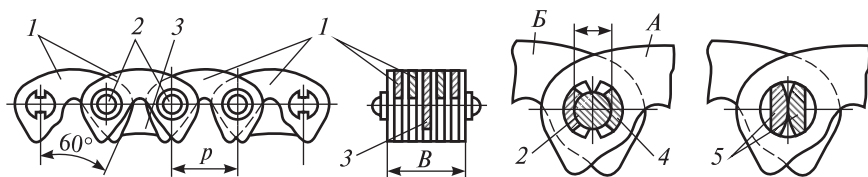


Рис. 32.5. Зубчатая цепь

Зубчатая цепь (рис. 32.5) состоит из набора пластин 1, шарнирно соединенных между собой с помощью валиков 2. Для предохранения цепи от схода со звездочек предусмотрены внутренние направляющие пластины 3. Количество пластин 1 зависит от передаваемой мощности. Пластины изготовляют из стали 50 с закалкой до HRC 38—45. Поставляют такие цепи с шарниром 4 (трение скольжения) или шарниром 5 (призмы, закрепленные в пластинах, трение качения). Вкладыш 4 и призмы 5 изготовляют из цементуемых сталей 15 и 20 с закалкой до HRC 52—60.

В зависимости от расположения зубьев цепи бывают односторонними (рис. 32.5) и двухсторонними. По сравнению с роликовыми и втулочными цепями зубчатые цепи маложумные и обладают большей плавностью в работе, лучше воспринимают ударную нагрузку. Недостаток — эти цепи тяжелее и дороже по сравнению с втулочными и роликовыми цепями.

*Звездочки для приводных ремней.* По конструкции напоминают зубчатые колеса. Профиль их зубьев зависит от типа цепи. Звездочки роликовой и втулочной цепей (рис. 32.6) имеют рабочий профиль зуба, очерченный дугой окружности; звездочки зубчатых цепей (рис. 32.7) — прямолинейный рабочий профиль. Долговечность и надежность цепей передачи во многом зависит от правильного выбора профиля зубьев звездочки, ее параметров, материала и термической обработки. Важным фактором для увеличения долговечности цепной пере-

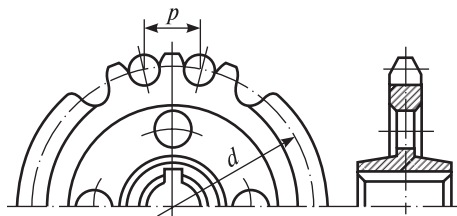


Рис. 32.6. Звездочка роликовой и втулочной цепей

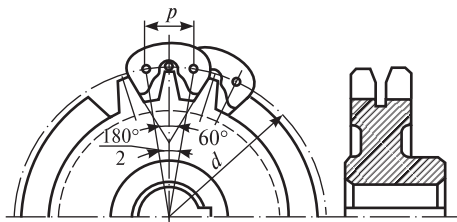


Рис. 32.7. Звездочка зубчатых цепей

дачи является правильный выбор числа зубьев меньшей звездочки. При малом числе зубьев плавность передачи снижается, наблюдается повышенное изнашивание цепи из-за большого угла поворота шарнира и значительных динамических усилий.

Материал звездочек назначают в зависимости от конструкции передачи. Для изготовления ведущих звездочек с малым числом зубьев ( $z_1 < 30$ ) неответственного назначения применяют сталь 20 (с цементацией, закалкой или отпуском); ответственного назначения — сталь 40, 50 (с закалкой, отпуском); при повышенных передаваемых нагрузках — сталь 40X, 45X, 45ХН (с закалкой или отпуском).

Для ведомых звездочек больших диаметров с большим числом зубьев ( $z_2 > 50$ ), кроме перечисленных материалов, может быть применен серый чугун СЧ15, СЧ20, СЧ35. Зубчатые венцы звездочек иногда изготавливают из пластмасс (капрона), что дает возможность снизить шум при работе и изнашивание цепи.

Основными геометрическими и кинематическими соотношениями, а также КПД передачи (рис. 32.1) являются:

- межосевое расстояние

$$a \geq (30 \dots 50)p, \quad (32.1)$$

где  $p$  — шаг цепи.

Минимальное межосевое расстояние  $a_{\min}$  (мм) выбирают из условия минимально допустимого зазора между звездочками:

$$a_{\min} = (d_{a1} + d_{a2})/2 + 30 \dots 50, \quad (32.2)$$

где  $d_{a1}$ ;  $d_{a2}$  — диаметры вершин зубьев ведущей и ведомой звездочек.

Максимальное межосевое расстояние  $a_{\max} = 80p$ . При известной длине цепи межосевое расстояние определяют из выражения

$$a = p/4 \cdot \left[ (L_p - (z_1 + z_2)/g) + \sqrt{(L_p - (z_1 + z_2)/2)^2 - 8(z_2 - z_1/2\pi)^2} \right], \quad (32.3)$$

где  $L_p$  — длина цепи в шагах (или число звеньев цепи);

$z_1, z_2$  — числа зубьев ведущей и ведомой звездочек соответственно;

- число звеньев цепи, определяемое по приближенной формуле

$$L_p = 2a/p + (z_1 + z_2)/2 + ((z_2 - z_1)/2\pi) \cdot p/a; \quad (32.4)$$

- допускаемая величина стрелы провисания

$$f = (0,002 \dots 0,004)a; \quad (32.5)$$

- делительный диаметр звездочки

$$d = (p/\sin(180^\circ/z)); \quad (32.6)$$

- диаметр вершин зубьев:

для втулочных и роликовых цепей

$$d_0 = p[\operatorname{ctg}(180^\circ/z) + (0,5 \dots 0,6)]; \quad (32.7)$$

для зубчатых цепей

$$d_0 = p[\operatorname{ctg}(180^\circ/z)].$$

Среднее передаточное число определяют из равенства средних скоростей цепи  $v_1 = v_2 = v$ .

Для цепной передачи скорость цепи

$$v = pz_1\omega_1/(2\pi \cdot 1000) = pz_2\omega_2/(2\pi \cdot 1000), \quad (32.8)$$

где  $p_p$  — шаг цепи, мм;

$z_1$  и  $z_2$  — числа зубьев ведущей и ведомой звездочек;

$\omega_1$  и  $\omega_2$  — средние угловые скорости ведущей и ведомой звездочек, рад/с.

Из формулы (32.8) имеем

$$\omega_1/\omega_2 = z_2/z_1 = u. \quad (32.9)$$

В цепной передаче

$$d_2/d_1 = \sin(180^\circ/z_2)/\sin(180^\circ/z_1) \neq z_2/z_1, \text{ т.е. } d_2/d_1 \neq u.$$

Для одноступенчатых цепных передач рекомендуется  $u \leq 7$  (в отдельных случаях принимают  $u \leq 10$ ).

КПД передачи зависит от потерь на трение в шарнирах (и между пластинами смежных звеньев), на трение в подшипниках и на потери, связанные со взбалтыванием (разбрызгиванием) масла.

Приближенно КПД определяют по формуле

$$\eta = P / (P + P_{\text{п.ш}} + P_{\text{п.п}} + P_{\text{п.м}}), \quad (32.10)$$

где  $P$  — передаваемая мощность;

$P_{\text{п.ш}} = (\Sigma A_{\text{ц}} v) / (pz)$  — потери мощности на трение в шарнирах ( $A_{\text{ц}}$  — работа трения;  $v$  — скорость;  $p$  — шаг цепи;  $z$  — число звеньев цепи);

$P_{\text{п.п}} = 17 \cdot 10^{-10} F f \pi d n$  — потери мощности на трение в подшипниках ( $F$  — нагрузка на подшипник;  $f$  — приведенный коэффициент трения;  $d$  — диаметр вала;  $n$  — частота вращения вала);

$P_{\text{п.м}}$  — потери мощности на взбалтывание (разбрызгивание) масла (составляют 4–5 % от потерь в шарнирах).

Для нормальных условий работы среднее значение  $\eta = 0,92 \dots 0,98$ .

### 32.3. Усилия в ветвях цепи и критерии работоспособности цепной передачи

Упрощенная схема передачи сил в цепной передаче аналогична силовой схеме в ременной передаче.

Окружная сила

$$F_t = 2M/d, \quad (32.11)$$

где  $M$  — момент на звездочке;

$d$  — делительный диаметр звездочки.

Силы натяжения:

ведущей ветви цепи работающей передачи (рис. 32.11)

$$F_1 = F_t + F_0 + F_v; \quad (32.12)$$

ведомой ветви цепи

$$F_2 = F_0 + F_v; \quad (32.13)$$

от провисания цепи

$$F_0 = K_f g a, \quad (32.14)$$

где  $K_f$  — коэффициент провисания, зависящий от расположения привода и величины стрелы провисания цепи  $f$ . При  $f = (0,001 \dots 0,002)a$ : для горизонтальных передач  $K_f = 6$ ; для наклонных ( $\approx 40^\circ$ ) —  $K_f = 3$ ; для вертикальных  $K_f = 1$ ;

$g$  — масса 1 м цепи, кг;

$a$  — межосевое расстояние, м;



от центробежных сил

$$F_v = gv^2, \quad (32.15)$$

где  $g$  — масса 1 м цепи, кг;  
 $v$  — скорость цепи, м/с.

Вал и опора воспринимают силы натяжения от провисания цепи и от окружной силы: приближенно это определяется формулой

$$F_s = F_t K_B + 2F_0, \quad (32.16)$$

где  $F_s$  — нагрузка на вал и опору;  
 $K_B$  — коэффициент нагрузки на вал (табл. 32.1).

Таблица 32.1

Значения коэффициента нагрузки на вал  $K_B$

Наклон линии центров звездочек к горизонту, град	Характер нагрузки	$K_B$
0...40	Спокойная	1,15
	Ударная	1,30
40...90	Спокойная	1,05
	Ударная	1,15

Экспериментально установлено, что основными причинами выхода цепных передач из строя являются вытяжка цепи (под действием сил  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_v$ ); разрушение шарниров (из-за ударов при вхождении цепи в зацепление с зубьями звездочки и вследствие изнашивания их от трения); разрушение пластин.

При расчете цепных передач за критерий работоспособности принимают долговечность цепи, определяемую величиной износа шарниров. Цепи, выбранные по условиям износоустойчивости шарниров, обладают достаточной прочностью. В ответственных случаях проверяют коэффициент запаса прочности ( $n \geq [n]$ ), число выходов шарниров цепи в зацеплении в 1 с ( $U \leq [U]$ ).

**Расчет цепи на износоустойчивость шарниров.** Среднее давление  $p_c$  в шарнире не должно превышать допустимого:

$$p_c = (F_t K)/A \leq [p_c], \quad (32.17)$$

где  $F_t$  — окружная сила, передаваемая цепью;

$A$  — площадь проекции опорной поверхности шарнира для роликовых и тулочных цепей ( $A = dB$ ); для зубчатых цепей  $A = 0,76dB$ ;

$K$  — коэффициент эксплуатации.

Коэффициент эксплуатации

$$K = K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6. \quad (32.18)$$

Значения коэффициентов  $K_1$ — $K_6$  приведены в табл. 32.2.

Таблица 32.2

**Значения коэффициентов  $K$  при расчете цепи на износостойкость шарниров**

Коэффициент	Условия работы	Значения
$K_1$ — динамичности	При спокойной нагрузке При толчкообразной или переменной нагрузке	1,0 1,25...1,5
$K_2$ — межосевое расстояние	$a < 25p$ $a = (30...50)p$ $a = (60...80)p$	1,25 1,0 0,8
$K_3$ — способ смазывания	Смазывание: непрерывное капельное периодическое	0,8 1,0 1,5
$K_4$ — наклон линии центров к горизонту	При наклоне линии центров к горизонту, град. до 60 св. 60	1,0 1,5
$K_5$ — режим работы	При работе: односменной двухсменной непрерывной	1,0 1,25 1,5
$K_6$ — способ регулирования натяжения цепи	При подвижных опорах При оттяжных звездочках При отжимном ролике	1,0 1,1 1,25

Преобразуем выражение (32.17), выразив окружную силу через момент на меньшей звездочке  $M_1$ , шаг цепи  $p$  и число зубьев этой звездочки  $z_1$ , представляя площадь опорной поверхности шарнира в виде функции от шага  $p$  и выполнив определенные преобразования, получим выражение для определения шага цепи:

- для роликовой и втулочной цепей

$$p \geq 2,8 \sqrt[3]{(M_1 K) / (z_{\text{ц}} z_1 [p_{\text{с}}])} ; \quad (32.19)$$

- для зубчатой цепи с шарниром скольжения

$$p \geq 3,3 \sqrt{(M_1 K) / (\psi_p z_1 [p_c])}, \quad (32.20)$$

где  $z_{\text{ц}}$  — число рядов в роликовой или втулочной цепи;

$\psi_p = B/p = 2...8$  — коэффициент ширины зубчатой цепи.

**Расчет цепи по запасу прочности.** В ответственных случаях выбранную цепь проверяют по коэффициенту запаса прочности:

$$n = F / \Sigma F_1 \geq [n], \quad (32.21)$$

где  $F$  — разрушающая нагрузка цепи (табл. 32.1);

$\Sigma F_1 = F_t K_b + F_v + F_0$  — суммарная нагрузка в ведущей цепи;

$[n]$  — требуемый (допускаемый) коэффициент запаса прочности.

Долговечность по числу входов в зацепление с обеими звездочками (число ударов) проверяют по формуле

$$U = zn / 30 L_p = 2v / L \leq [U], \quad (32.22)$$

где  $L_p$  — общее число звеньев цепи;

$z$  и  $n$  — число зубьев и частота вращения звездочки (ведущей или ведомой);

$U$  — действительное число входов звеньев цепи в зацепление за 1 с;

$v$  — окружная скорость, м/с;

$L$  — длина цепи, м;

$[U]$  — допускаемое число входов цепи в зацепление за 1 с.

#### **Рекомендации для выполнения проектного расчета цепных передач**

1. Выбирать тип цепи по ее предполагаемой скорости и исходя из условий работы передачи (роликовая, втулочная, зубчатая).

2. По передаточному числу  $u$  выбрать число зубьев малой звездочки  $z_1$ , по формуле (32.9) определить число зубьев большей звездочки  $z_2$ . Проверить выполнение условия  $z_2 \leq z_{2\text{max}}$ .

3. Определить вращающий момент  $M_1$  на малой звездочке. Далее выбрать допускаемое давление в шарнирах  $[p_c]$ , для чего задать расчетные коэффициенты  $K_1$ — $K_6$  и по формуле (32.18) определить коэффициент эксплуатации  $K$ . После этого из условия износостойкости шарниров [формулы (32.19), (32.20)] определить шаг цепи. Полученное значение шага  $p$  округлить до стандартного в большую сторону.

4. Принятый шаг проверить по допустимой угловой скорости малой звездочки. При несоблюдении условия  $\omega_1 = \omega_{1\text{max}}$  увеличить число рядов роликовой (втулочной) цепи или ширину зубчатой цепи.

5. По формуле (32.8) определить среднюю скорость цепи  $v$  и силу  $F_t$ , после чего по формуле (32.17) проверить износостойкость цепи. При несоблюдении условия  $p_c \leq [p_c]$  увеличить шаг цепи и расчет повторить.

6. Определить геометрические размеры передачи.

7. Для особо ответственных цепных передач по формуле (32.21) проверить выбранную цепь по коэффициенту запаса прочности.

8. По формуле (32.22) проверить передачу по числу ударов в 1 с.

**Сопротивление усталости.** Высоконагруженные обильно смазываемые передачи, работающие при скоростях  $v_{ц} < 15$  м/с и переменных нагрузках, часто выходят из строя вследствие усталостного разрушения пластин по проушинам. Последнее связано с высокой концентрацией напряжений в этой области и контактной коррозией в прессовых соединениях пластин и втулок.

При более высоких скоростях ( $v_{ц} > 15$  м/с) существенно возрастают ударные нагрузки при входе в зацепление звена с зубом звездочки и наблюдаются случаи разрушения звеньев от раскалывания роликов.

Для повышения сопротивления усталости пластин отверстия упрочняют обжатием в специальных матрицах.

## 32.4. Особенности конструирования и эксплуатации цепных передач

Цепные передачи целесообразно располагать в вертикальной плоскости с горизонтальным или наклонным (до  $\Psi = 40...50$ ) расположением линии центров.

Ведущей в цепной передаче может быть верхняя или нижняя ветвь. Верхняя ветвь должна быть ведущей в горизонтальных передачах с большим межосевым расстоянием ( $a > 60t$ ) и малыми числами звездочек во избежание соприкосновения звездочек, а также в передачах с  $a < 30t$  при  $u < 2$  и в вертикальных передачах для предотвращения захвата дополнительных зубьев звездочки провисающей верхней ветвью.

Регулирование натяжения цепей является эффективным средством повышения долговечности цепной передачи. Предварительное натяжение цепных передач устанавливается по стреле провисания  $f$  ( $f \approx 0,02a$  для горизонтальных и наклоненных к горизонту до  $45^\circ$  передач;  $f = (0,01...0,015) a$  для передач, близких к вертикальным).

Для устранения вредного влияния вытяжки цепей и сохранения предварительного натяжения и провисания в процессе эксплуатации выполняют периодическую регулировку натяжения. Для этого предусматривают в конструкции либо возможность перемещения опор, либо использование натяжных роликов или звездочек. На-

тяжные ролики и звездочки желательно устанавливать на ведомой ветви в месте ее наибольшего провисания. Если ролики ставят на ведущей ветви, то для уменьшения вибраций они должны быть оттяжными, т.е. устанавливаться с внутренней стороны.

Важнейшими условиями надежной работы передачи являются параллельность валов и тщательное совмещение плоскостей звездочек.

Смазывание передач осуществляется периодически капельным способом, а также непрерывным способом (окунанием в масляную ванну или циркуляционной струей от насоса и т.п.).

При скорости цепи  $v_{\text{ц}} < 6$  м/с смазывание осуществляется в масляной ванне; при скорости цепи  $v_{\text{ц}} = 6 \dots 8$  м/с — циркуляционной струей. При увеличении скорости рекомендуется смазку производить разбрызгиванием, с помощью маслоподъемных щитков или колец (цепь в ванну не погружена).

В качестве пластических смазок выбирают солидолы и консталины, в которые при необходимости вводят легирующие присадки.

## Глава 33. ПЕРЕДАЧИ ВИНТ—ГАЙКА

### 33.1. Общие сведения

Назначение передачи винт—гайка состоит в преобразовании вращательного движения в поступательное. Такие передачи часто используются на железнодорожном транспорте, когда требуется получить большой выигрыш в силе, например, в подъемных (домкраты и др.) и нагрузочных устройствах (винтовые прессы, механизмы подачи металлорежущих станков и т.д.), так как с их помощью можно получить большие усилия при малых перемещениях.

В зависимости от характера движения винта и гайки различают ряд механизмов. Простейшие из них показаны на рис. 33.1, *а, б*. Винтовой механизм (домкрат, рис. 33.1, *а*), представляет собой двухзвенный механизм, стойка — подвижная гайка 1 и подвижное звено — винт 2. В механизме (домкрате), представленном на рис. 33.1, *б*, вращательное движение гайки 1 сопровождается поступательным движением винта 2.

В последние годы получили распространение шариковинтовые механизмы (рис. 29.1, *ж*), в которых между витком и гайкой

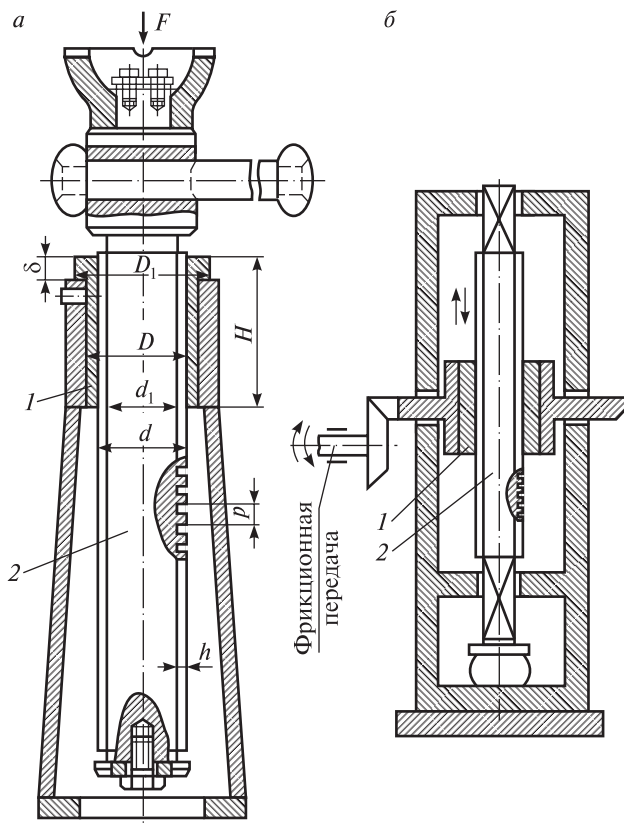


Рис. 33.1. Домкраты:

*a* — с вращающимся и одновременно поступательно перемещающимся винтом при неподвижной гайке; *б* — с вращательным движением гайки и поступательным движением винта

размещаются шарики. При вращении винта шарики увлекаются в направлении его поступательного движения, попадают в обводной канал в гайке и возвращаются в полость между винтом и гайкой.

На практике используются механизмы с резьбой различного профиля. По форме профиля резьбы делятся на треугольные (рис. 33.2, *a*), прямоугольные (рис. 33.2, *б*), трапециевидные (рис. 33.2, *в*), упорные (рис. 33.2, *г*), круглые (рис. 33.2, *д*). Резьба винтовой линии может быть правой или левой. Правая винтовая линия идет слева

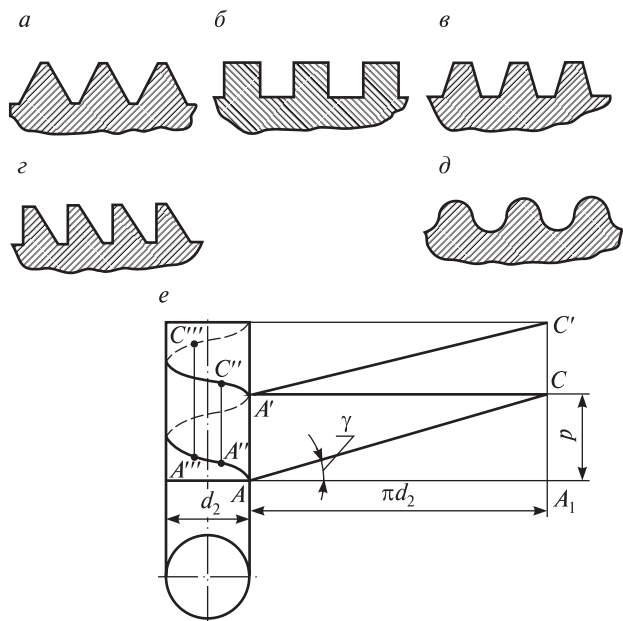


Рис. 33.2. Формы профиля резьбы:

*a* — треугольная; *б* — прямоугольная; *в* — трапецидальная; *г* — упорная; *д* — круглая; *е* — правая винтовая линия

направо и вверх, левая — справа налево и вверх. Наибольшее распространение на железнодорожном транспорте имеет правая резьба. Угол  $\gamma$  (рис. 33.2, *e*) образованный винтовой линией по среднему диаметру резьбы  $d_2$  и плоскостью, перпендикулярной к оси винта, называется *углом подъема винтовой линии (резьбы)*.

$$\operatorname{tg} \gamma = S/(\pi d_2).$$

Длину катета  $A_1C$  обозначают  $p$  и называют *шагом винтовой линии*. Если по «параллельным» винтовым линиям перемещаются два или несколько рядом расположенных профиля, то они образуют многозаходную резьбу. По числу заходов резьбы делятся на однозаходные, двухзаходные, трехзаходные. Для однозаходной резьбы  $p$  — шаг резьбы равен ходу резьбы  $S$ . Для многозаходной резьбы  $S = pz$ , где  $z$  — число заходов.

В передаточных (грузовых и ходовых) винтах чаще применяют трапецидальную резьбу со средним шагом. Резьбу с мелким шагом применяют для делительных перемещений повышенной точности, с крупным — при тяжелых условиях работы силовой передачи. Для винтов, находящихся под действием больших односторонних нагрузок, применяют упорную резьбу. Реже (для передаточных винтов) применяют прямоугольную резьбу, а в механизмах приборов используют метрическую резьбу.

Конструкции винтов должны удовлетворять общим требованиям, предъявляемым к конструкциям валов, т.е. не иметь резких переходов, кольцевых выступов большего диаметра. Длинные винты для облегчения изготовления выполняют составными. Соединение достигается свинчиванием с дополнительным креплением при помощи клиньев или конических штифтов, используют также сварку.

### 33.2. Материал винтов и КПД винтовой пары

**Материал винтов.** Ходовые винты изготавливают из высокоуглеродистых сталей 40, 45, 50, 40ХН, 50ХН, 65Г с закалкой до твердости HRC > 50. При высоких окружных скоростях вращения (0,1...0,25 м/с) гайки изготавливают из оловянистых бронз БрОФ10-1, БрО6Ц6С3, при малых скоростях вращения используют антифрикционные чугуны марок АВЧ-1, АВЧ-2, АКЧ-1, АКЧ-2 или серые чугуны марок СЧ15, СЧ20.

Допускаемые давления для пар винт—гайка из закаленной стали и бронзы — 10...13 МПа; из незакаленной стали и бронзы — 8...10 МПа; из незакаленной стали и антифрикционного чугуна — 6...7 МПа; незакаленной стали и серого чугуна — 4...5 МПа. Для механизмов точных перемещений (делительных и др.) значения допускаемых давлений принимают в 2-3 раза меньше, чем для механизмов общего назначения.

**Коэффициент полезного действия винтовой пары**

$$\eta = A_{\text{п.с}}/A_3, \quad (33.1)$$

где  $A_{\text{п.с}}$  — работа сил полезного сопротивления на винте;

$A_3$  — работа движущих сил, затраченная на один оборот винта (гайки).

По известной осевой силе  $F_a$  и окружной силе  $F_t$  (рис. 33.3, где для удобства рассмотрения сил в винтовой паре развернем виток



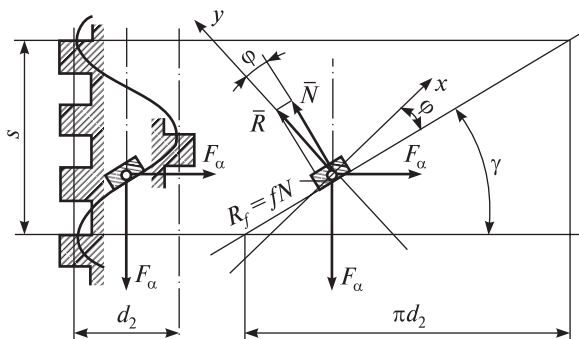


Рис. 33.3. К определению КПД винтовой пары

прямоугольной резьбы по среднему диаметру  $d_2$  в наклонную плоскость, а гайку представим в виде ползуна) определяют  $A_{п.с}$  и  $A_3$ :

$$A_{п.с} = F_a S = F_a \pi d_2 \operatorname{tg} \gamma; A_3 = F_t \pi d_2 = F_a \operatorname{tg}(\gamma + \varphi) \pi d_2.$$

Тогда КПД винтовой пары

$$\eta = \operatorname{tg} \gamma / [\operatorname{tg}(\gamma + \varphi)]. \quad (33.2)$$

Из формулы (33.2) видно, что КПД передачи возрастает с увеличением угла  $\gamma$  и с уменьшением коэффициента трения в резьбе (уменьшение  $\varphi$ ).

Передаточное число  $u$  условно можно выразить отношением перемещения маховика или рукоятки (рис. 33.1, а) к перемещению винта (гайки):

$$u = 2\pi R / p_h, \quad (33.3)$$

где  $R$  — радиус маховика или длина рукоятки;

$p_h$  — ход резьбы. При малом ходе резьбы и сравнительно большом радиусе маховика можно получить большое  $u$ , следовательно, большой выигрыш в силе.

*Основными достоинствами передачи винт—гайка являются плавность и бесшумность работы; возможность получения большого выигрыша в силе; высокая точность перемещения; большая несущая способность при малых габаритных размерах; простота конструкции, а также возможность самоторможения.*

*Недостатки:* низкий КПД; большие потери на трение; затруднительность применения при больших частотах вращения.

### 33.3. Расчет передачи винт—гайка

Наиболее частая причина выхода из строя винтов и гаек — износ их резьбы. Поэтому *основным критерием работоспособности и расчета передачи является износостойкость*. Расчет на износостойкость выполняют как проектировочный. Другими критериями работоспособности являются *прочность* и *устойчивость* винта. Эти расчеты выполняют как проверочные.

**Расчет на износостойкость.** Для обеспечения износостойкости давление в резьбе не должно превышать допускаемого, т.е.

$$p_c = F_a / (\pi d_2 h z) \leq [p_c], \quad (33.4)$$

где  $F_a$  — осевая сила, действующая на гайку (винт);

$d_2$  — средний диаметр резьбы;

$h$  — рабочая высота профиля резьбы;

$z$  — число витков гайки.

Значения допускаемого давления для пары винт—гайка приведены в табл. 33.1.

Таблица 33.1

Допускаемое давление в резьбе для пары винт—гайка

Материал винтовой пары	$[p_c]$ , МПа
Закаленная сталь—бронза	10...12
Незакаленная сталь—бронза	8...10
Закаленная сталь—антифрикционный чугун АЧВ-1, АЧК-1	7...9
Незакаленная сталь—антифрикционный чугун АЧВ-2, АЧК-2	6...7
Незакаленная сталь—чугун СЧ20, СЧ25	5

*Примечание.* При редкой работе, а также для гаек малой высоты значение  $[p_c]$  может быть повышено на 20 %.

Заменив в формуле (33.4)  $z$  на  $H/p$  ( $H$  — высота гайки,  $p = 2h$  — шаг прямоугольной или трапецеидальной резьбы) и  $H/d_2$  на  $\Psi_r$ , получим формулу проектного расчета для определения среднего диаметра резьбы:

$$d_2 \geq \sqrt{(2F_a) / (\pi \Psi_r [p_c])}, \quad (33.5)$$

где  $\Psi_r$  — коэффициент высоты гайки (для цельных гаек  $\Psi_r = 1,0...2,0$ ; для разъемных гаек  $\Psi_r = 2,6...3,5$ ).

Длину винта ( $l$ ) выбирают конструктивно в зависимости от требуемого перемещения. Для домкратов обычно  $l = (8...10)d$ .

Наружный диаметр гайки определяют из условия прочности на растяжение и кручение:

$$D = \sqrt{((4F_a K_{кр}) / \pi [\sigma_p]) + d^2}; \quad (33.6)$$

наружный диаметр фланца — из условия прочности на смятие:

$$D_1 = \sqrt{((4F_a) / \pi [\sigma_{см}]) + D^2}. \quad (33.7)$$

Высоту гайки находят, используя формулу

$$H = \Psi_r d_2. \quad (33.8)$$

В этих формулах  $F_a$  — осевая сила, действующая на гайку (винт);

$K_{кр}$  — коэффициент, учитывающий закручивание винта, для трапецеидальных резьб он равен 1,25, для прямоугольной и упорной  $K_{кр} = 1,2$ ;

$\Psi_r$  — коэффициент высоты гайки;

$d$  — наружный диаметр резьбы;

$d_2$  — средний диаметр;

$[\sigma_p]$  — допускаемое напряжение на растяжение для гайки;

$[\sigma_{см}]$  — допускаемое напряжение на смятие.

**Расчет на прочность.** Для высоконагруженных винтов необходимо проводить проверочный расчет по четвертой теории прочности на совместное действие кручения и растяжения или сжатия, исходя из условия:

$$\sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{(4N/\pi d_1^2)^2 + 3(M_{кр}/0,2d_1^3)^2} \leq [\sigma], \quad (33.9)$$

где  $\sigma_3$  — эквивалентное (приведенное) напряжение для опасной точки винта;

$N$  и  $M_{кр}$  — соответственно продольная сила и крутящий момент, возникающий в опасном сечении винта;

$d_1$  — внутренний диаметр резьбы, определяемый из выражения  $d_1 = d_2 - h$ ; допускаемое напряжение  $[\sigma] = \sigma_r/[n]$ , обычно  $[n] = 3,0$ .

**Расчет на устойчивость.** Длинные винты проверяют на устойчивость по условию

$$n_y \geq [n_y], \quad (33.10)$$

где  $n_y$  и  $[n_y]$  — соответственно расчетный и допускаемый коэффициенты запаса устойчивости; для вертикальных винтов допускаемый коэффициент запаса 2,5...4, для горизонтальных 3,5...5.

Расчетный коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = F_{кр}/F_a, \quad (33.11)$$

где  $F_{кр}$  — критическая сила;  
 $F_a$  — сжимающая нагрузка, действующая на винт.

Если приведенная длина винта  $\mu \ell \geq 2,5d_1$  ( $\ell$  — длина винта;  $d_1$  — внутренний диаметр резьбы винта), то критическую силу определяют по формуле Эйлера

$$F_{кр} = \pi^2 EJ_{пр}/(\mu \ell)^2, \quad (33.12)$$

где  $E$  — модуль упругости материала винта;

$J_{пр}$  — приведенный момент инерции сечения винта, определяемый по эмпирической формуле

$$J_{пр} = (\pi d_1^4/64) \cdot (0,375 + 0,625(d/d_1)),$$

$d$  — наружный диаметр винта;

$\mu$  — коэффициент приведенной длины винта, зависящий от условий его закрепления.

Для винтов меньшей гибкости,  $\mu \ell \leq 2,5d_1$ , расчет выполняют по формуле Ф.С. Ясинского (см. гл. 20).

При критическом напряжении, равном пределу текучести, устойчивость винта не проверяют.

**Допускаемые напряжения.** Допускаемое напряжение на растяжение или сжатие стальных винтов определяют по формуле

$$[\sigma_p] = \sigma_T/[n], \text{ при } [n] = 2...3.$$

Аналогичное напряжение для материала гайки: на смятие бронзы или чугуна по стали  $[\sigma_{см}] = 42...55 \text{ Н/мм}^2$ ; на растяжение: для бронзы  $[\sigma_p] = 34...44 \text{ Н/мм}^2$ ; для чугуна  $[\sigma_p] = 20...24 \text{ Н/мм}^2$ .

## Глава 34. ЧЕРВЯЧНЫЕ ПЕРЕДАЧИ

### 34.1. Общие сведения

*Червячная передача* представляет собой винтовую передачу, у которой ведущее колесо (червяк) выполнено с малым числом зубьев, а ведомое (червячное колесо) имеет большое число зубьев. Она предназначена для сообщения вращательного движения валам, оси которых скрещиваются под углом  $90^\circ$ .

Широкое применение червячные передачи имеют в подъемно-транспортных машинах. Кроме этого, они используются при не-

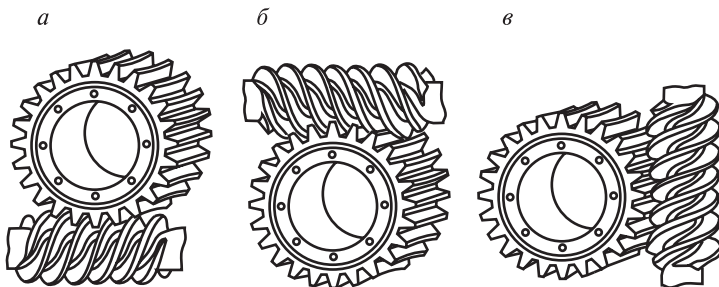


Рис. 34.1. Передачи с нижним (а), верхним (б) и боковым (в) червяком

больших и средних мощностях в разных отраслях транспортного машиностроения.

Различают два вида червячных передач: *цилиндрические* и *глобоидные*. По расположению червяка относительно колеса различают передачи с *нижним* (рис. 34.1, а), *верхним* (рис. 34.1, б) и *боковым* (рис. 34.1, в) червяком. При окружных скоростях червяка  $v_1 \leq 5$  м/с применяют нижний червяк, при  $v_1 > 5$  м/с — верхний червяк. Чаще всего расположение червяка определяется компоновкой изделия.

В зависимости от формы профиля витка различают червяки архимедов, эвольвентный и конволютный. *Архимедов червяк* (рис. 34.2, а) — цилиндрический торцовый профиль его витка является архимедовой спиралью. Этот червяк подобен винту с трапецидальной резьбой.

*Эвольвентный червяк* (рис. 34.2, б) имеет эвольвентный профиль витка в своем торцовом сечении (как у косозубого колеса).

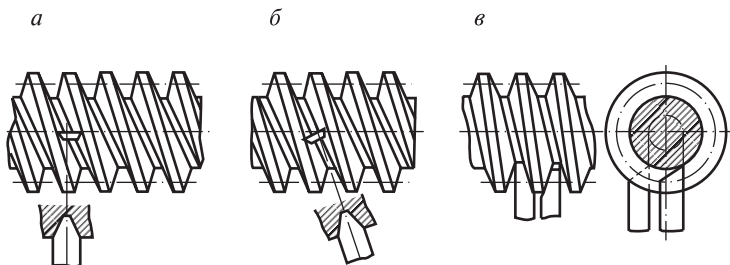


Рис. 34.2. Профиль витка червяка: архимедов (а), эвольвентный (б), конволютный (в)

*Конволютный червяк* (рис. 34.2, в) — это такой, у которого торцовый профиль витка является удлиненной или укороченной эвольвентой.

В железнодорожном машиностроении из цилиндрических червяков наиболее распространены архимедовы. Их можно нарезать на обычных токарных или резбифрезерных станках. Червяки бывают с левым и с правым направлением линии винта, последние имеют преимущественное распространение. Их изготавливают, как правило, за одно целое с валом, что увеличивает жесткость и снижает стоимость. В передачах с малыми передаточными числами и большими диаметрами червяков применяют насадочные червяки.

Витки червяка, расположенные на глобоидной (торовой) поверхности, называют *глобоидной червячной передачей*. Эта передача появилась сравнительно недавно, имеет повышенную нагрузочную способность (в 1,5—2 раза больше, чем у обычных червячных передач), так как линия контакта в этих передачах располагается благоприятно, что улучшает условия для образования масляных клиньев, и в зацеплении находится большее число зубьев колеса и витков червяка. Глобоидные передачи требуют повышенной точности изготовления и монтажа, а также искусственного охлаждения. Эти передачи применяют реже, чем цилиндрические.

*Достоинствами червячных передач* являются возможность получения больших передаточных чисел одной парой (от 8 до 100, а в кинематических передачах — до 1000); плавность и бесшумность работы; возможность выполнения самотормозящей передачи (ручные грузоподъемные тали); компактность и сравнительно небольшая масса конструкции передачи.

*Недостатки червячных передач*: сравнительно невысокий КПД (0,7...0,85); в самотормозящих передачах — до 0,5; сильный нагрев передачи при длительной работе; необходимость применения для колеса дорогих антифрикционных материалов; небольшие по сравнению с зубчатой передачей передаваемые мощности (до 200 кВт, чаще — до 50 кВт).

## 34.2. Основные параметры червячных передач

**Червяк.** Основные параметры червяка регламентированы размерами такого червяка (рис. 34.3) характеризуются его шагом:

$$p = \pi m, \quad (34.1)$$

где  $m = p/\pi$  — осевой модуль червяка (стандартизован).

Многовитковые червяки характеризуются еще и ходом линии витка (рис. 34.4):

$$p_h = pz_1 \quad (34.2)$$

где  $z_1 = 1...4$  — число витков (заходов) червяка.

С увеличением  $z_1$  повышается КПД передачи, но усложняется технология ее изготовления и растет число зубьев червячного колеса  $z_2$ , вследствие чего увеличиваются габариты передачи.

Передаточное число и червячной передачи определяют из условия, что за каждый оборот червяка колесо поворачивается на число зубьев, равное числу витков червяка:

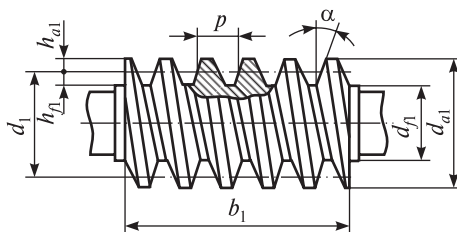


Рис. 34.3. Геометрические размеры цилиндрического червяка

$$u = z_2/z_1, \quad (34.3)$$

где  $z_2$  — число зубьев колеса червячной передачи;  
 $z_1$  — число витков червяка.

Делительный угол подъема винтовой линии (рис. 34.5) определяется выражением

$$\operatorname{tg} \gamma = \pi m z_1 / (\pi d_1) = z_1/g. \quad (34.4)$$

Обычно угол находится в пределах  $\gamma = 5\text{--}20^\circ$ .

Делительный диаметр червяка

$$d_1 = m z_1 / \operatorname{tg} \gamma = g m, \quad (34.5)$$

где  $g = z_1 / \operatorname{tg} \gamma$  — коэффициент диаметра червяка.

Значения  $g$  и  $m$  стандартизованы и приведены в табл. 34.1.

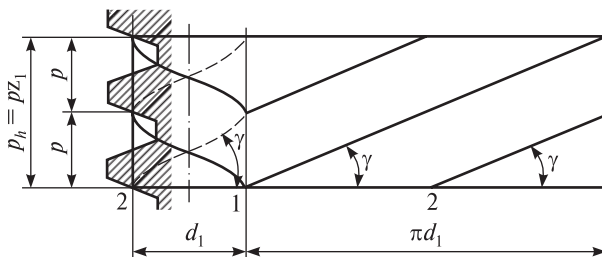


Рис. 34.4. Многовитковый червяк

Таблица 34.1

Значения  $g$  и  $m$  для червяка

$m$ , мм	2,5; 3,15; 4; 5	6,3	8; 10; 12,5
$g$	8; 10; 12,5; 16; 20	8; 10; 12,5; 16; 20	8; 10; 12,5; 16; 20

Чтобы исключить чрезмерно тонкие червяки, ГОСТом предусматривается увеличение  $g$  с увеличением  $m$ . Ориентировочно значения  $g$  принимают  $0,25z_2$  с округлением до нормативного, предусмотренного значениями табл. 34.1.

Высоту головки и ножки витка червяка принимают:

$$h_{a1} = m, \quad h_{f1} = 1,2 m.$$

Диаметр вершин и впадин витков червяка:

$$\begin{aligned} d_{a1} &= d_1 + 2h_{a1} = d_1 + 2m; \\ d_{f1} &= d_1 - 2h_{f1} = d_1 - 2,4m. \end{aligned} \quad (34.6)$$

Длина нарезанной части червяка  $b_1$ . Значения  $b_1$  определяют по условию использования одновременного зацепления наибольшего числа зубьев колеса:

$$b_1 = (C_1 + C_2 z_2)m, \quad (34.7)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — вспомогательные коэффициенты:  $C_1 = 11$  и  $C_2 = 0,006$  при  $z_1 = 1$  и  $2$ ;  $C_1 = 12,5$  и  $C_2 = 0,09$  при  $z_1 = 4$ .

Для шлифуемых и фрезеруемых червяков во избежание искажения рабочей части боковых поверхностей витков при входе и выходе шлифовального круга (фрезы)  $b_1$  увеличивают приблизительно на  $3m$ .

**Червячное колесо.** Основные размеры червячного колеса приведены на рис. 34.5. Его делительный диаметр определяется выражением

$$d_2 = mz_2, \quad (34.8)$$

где  $z_2$  — число зубьев червячного колеса.

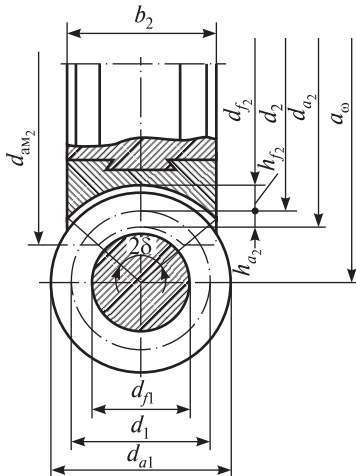


Рис. 34.5. Геометрические размеры червячного колеса



Минимальное число зубьев колеса определяют из условия отсутствия подрезания и обеспечения достаточной поверхности зацепления. Для силовых передач  $z_{2 \min} = 28$ . При увеличении  $z_2$  возрастают диаметр колеса и расстояние между опорами червяка, что приводит к увеличению его деформирования. При  $z_2 > 80$  возникает опасность излома зубьев ввиду уменьшения модуля.

Высоту головки и ножки зуба принимают, как у червяка:

$$h_{a_2} = m, \quad h_{f_2} = 1,2m.$$

Диаметр вершин и впадин витков зубьев:

$$\begin{aligned} d_{a_2} &= d_2 + 2h_{a_2} = d_2 + 2m; \\ d_{f_2} &= d_2 - 2h_{f_2} = d_2 - 2,4m. \end{aligned} \quad (34.9)$$

Наибольший диаметр:

$$d_{a_{m_2}} \leq d_{a_2} + 6m/(z_1 + 2). \quad (34.10)$$

Ширина венца:

$$\begin{aligned} b_2 &\leq 0,75 d_{a_1} \text{ при } z_1 = 1 \text{ и } 2; \\ b_2 &\leq 0,67 d_{a_1} \text{ при } z_1 = 4. \end{aligned} \quad (34.11)$$

Угол обхвата  $2\delta$  червяка колесом определяется точками пересечения дуги окружности диаметром  $d_{a_1} - 0,5m$  с контуром венца:

$$\sin \delta = b_2/(d_{a1} - 0,5m). \quad (34.12)$$

Межосевое расстояние

$$a_w = (d_1 + d_2)/2 = m(g + z_2)/2. \quad (34.13)$$

Межосевое расстояние  $a_w$ , мм, для стандартных редукторов принимают равным: 40, 50, 63, 80, 100, 125, 160, 200, 250, 315, 400, 500. Для нестандартных редукторов  $a_w$  округляют до чисел из ряда  $R_a$  40 (см. табл. 25.1).

Предварительное значение модуля  $m$  определяют исходя из формулы (34.13). Поскольку для силовых передач принимают  $g/z_2 = (0,12...0,4)$ , из той же формулы получим

$$m = (1,4...1,7)a_w/z_2. \quad (34.14)$$

За окончательное значение  $m$  принимают ближайший стандартный модуль по табл. 34.1.

Для вписывания в стандартные или заданные межосевые расстояния  $a_w$  применяют *червячные передачи со смещением*. Червяк нарезают без смещения. Смещение осуществляют только за счет червячного колеса, которое нарезают на тех же станках и тем же инструментом, что и колесо без смещения. При заданном межосевом расстоянии  $a_w$  коэффициент смещения:

$$x = (a_w/m) - 0,5(g + z_2); \quad (34.15)$$

$$a_w = 0,5m(g + z_2 + 2x); \quad (34.16)$$

$$z_2 = 2a_w/m - g - 2x; \quad (34.17)$$

$$d_{a_2} = m(z_2 + 2 + 2x); \quad d_{f_2} = m(z_2 - 2,4 + 2x). \quad (34.18)$$

Все другие размеры остаются неизменными. Смещение оказывает большое влияние на форму зубьев колеса и на геометрию зацепления. По условию неподрезания и незаострения зубьев значение  $x$  выбирают в пределах  $\pm 1$ . Из формулы (34.17) следует, что варьируя значение  $x$  при  $a_w$ ,  $m$  и  $g$ , можно получить различные  $z_2$  и  $u$ . Это позволяет осуществить ряд значений  $u$  в одном корпусе.

**Передаточное отношение** червячной передачи  $u$  определяют из условия, что за каждый оборот червяка колесо поворачивается на число зубьев, равное числу витков червяка:

$$u = n_1/n_2 = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1, \quad (34.19)$$

где  $z_2$  — число зубьев колеса червячной передачи;

$z_1$  — число витков червяка.

Из формулы (34.19) следует, что передаточное отношение  $u$  не зависит от диаметра червяка, обычно  $u = 20...60$  в силовых передачах и  $u \leq 300$  в кинематических цепях приборов и в делительных механизмах.

### 34.3. Особенности работы и КПД червячной передачи

Червячные передачи при работе имеют следующие особенности: повышенное скольжение в зацеплении и неблагоприятные условия смазки.

*Повышенное скольжение в зацеплении* возникает потому, что окружные скорости  $v_1$  червяка и  $v_2$  колеса направлены под углом скрепления одна к другой (рис. 34.6). Поэтому витки червяка скользят

по зубьям колеса. Скорость скольжения  $v_s$  является равнодействующей скоростей  $v_1$  и  $v_2$ , направлена по касательной к линии витков червяка и определяется из параллелограмма скоростей:

$$\begin{aligned} v_s &= \sqrt{(v_1^2) + (v_2^2)} = \\ &= v_1 / \cos \gamma = \pi n_1 d_1 / (60 \cos \gamma), \end{aligned} \quad (34.20)$$

где  $\gamma$  — делительный угол подъема линии витка. Поскольку практически  $\gamma < 30^\circ$ , то в червячной передаче  $v_2 = v_1 \tan \gamma$  всегда значительно меньше  $v_1$ , а  $v_s > v_1$ .

*Неблагоприятные условия смазки зацепления* обусловлены направлением скорости  $v_s$  вдоль линии контакта. Наиболее благоприятным условием является перпендикулярное направление скорости  $v_s$  к линии контакта, что имеет место в прямозубой передаче. Повышенное скольжение в зацеплении и неблагоприятные условия смазки в червячных передачах являются причиной повышенного износа зубьев и склонность к заеданию.

КПД червячной передачи может быть определен из выражения

$$\eta = \eta_{\Pi} \eta_p \eta_3, \quad (34.21)$$

где  $\eta_{\Pi}$ ,  $\eta_p$ ,  $\eta_3$  — КПД, учитывающие соответственно потери мощности в подшипниках, на разбрызгивание и перемешивание масла, потери в зацеплении.

Потери в зацеплении составляют главную часть потерь в передаче. Значение  $\eta_3$  определяется из выражения

$$\eta_3 = \tan \gamma / \tan(\gamma + \varphi'), \quad (34.22)$$

где  $\varphi'$  — приведенный угол трения, зависящий от скорости скольжения (табл. 34.2).

Кроме скорости скольжения, на КПД передачи влияют сорт масла, материал червячной пары, твердость и шероховатость рабочих поверхностей витков червяка.

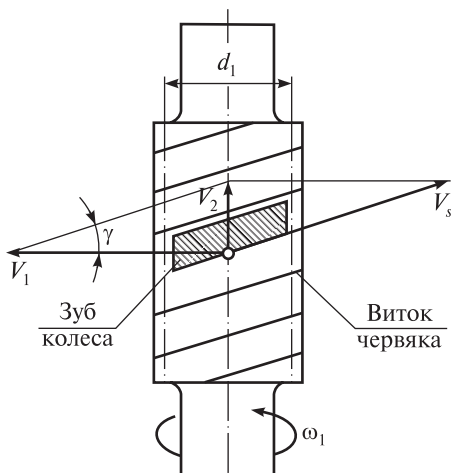


Рис. 34.6. Скорости скольжения червяка

Таблица 34.2

Зависимость угла трения  $\phi'$  от скорости скольжения

Материал венца колеса	Угол трения $\phi'$ при скорости скольжения $v_s$ , м/с							
	1,0	1,5	2	2,5	3,0	4,0	7,0	10,0
Оловянные бронзы	2°30'	2°20'	2°	1°40'	1°30'	1°20'	1°	0°55'
Безоловянные бронзы, латуни и чугуны	3°10'	2°50'	2°30'	2°20'	2°	1°40'	1°30'	1°20'

Червячные передачи имеют сравнительно низкий КПД, что является их основным недостатком. КПД увеличивается с возрастанием числа витков червяка (увеличивается  $\gamma$ ) и с уменьшением коэффициента трения (уменьшается  $\phi'$ ).

### 34.4. Расчет на прочность червячных передач

*Расчет на контактную прочность.* Этот расчет должен обеспечивать не только отсутствие усталостного разрушения зубьев, но и отсутствие заедания. Наибольшие контактные напряжения в зоне зацепления определим по формуле Герца (30.3), после несложных преобразований получим

$$\sigma_H = \sqrt{(g_k E_{\text{пр}}) / (\rho_{\text{пр}} 2\pi(1-\mu^2))}, \quad (34.23)$$

где  $E_{\text{пр}}$  — приведенный модуль упругости материалов червяка и колеса;

$\rho_{\text{пр}}$  — приведенный радиус кривизны профилей сцепляющихся зуба, колеса и витка червяка;

$\mu$  — коэффициент Пуассона (для стали, бронзы и чугуна  $\mu = 0,3$ );

$g_k$  — нормальная нагрузка, приходящаяся на единицу длины контактных линий  $L_k$  колеса и червяка (принимают  $L_k = 1,3d_1 \cos \gamma$ ).

Нормальную нагрузку, приходящуюся на единицу длины контактных линий, определим из выражения

$$g_k = F_n / L_k = F_n \cos \gamma / (1,3d_1), \quad (34.24)$$

где  $F_n = 2M_2 / (d_2 \cos \alpha \cos \gamma)$  — нормальная нагрузка к поверхности зуба червячного колеса и витка червяка (ее условно считают приложенной в полюсе зацепления);

$M_2$  — вращающий момент на червячном колесе;

$\alpha = 20^\circ$  — угол зацепления;

$\gamma = 4...26^\circ$  — угол подъема линии витка по делительному цилиндру;

$d_2$  — делительный диаметр червячного колеса.

Выражение для приведенного радиуса

$$\rho_{\text{пр}} = d_2 \sin \alpha / (2 \cos \gamma). \quad (34.25)$$

Значение приведенного модуля упругости определяется выражением

$$E_{\text{пр}} = 2 E_1 E_2 / (E_1 + E_2). \quad (34.26)$$

Для червячных передач принимают  $E_{\text{пр}} = 210$  ГПа (стальной червяк);  $E_2 = 90$  ГПа (бронзовое или чугунное колесо).

Подставляя в формулу (34.23) вместо  $g$ ,  $\rho_{\text{пр}}$ ,  $E_{\text{пр}}$ ,  $\mu$  их значения и решая это уравнение относительно межосевого расстояния  $a_w$ , получим формулы для проверочного и проектного расчета червячных передач по контактным напряжениям.

*Проверочный расчет.* Расчетное контактное напряжение в поверхностных слоях зубьев колеса определяется выражением

$$\sigma_H = (170 / (z_2 / g)) \sqrt{M_{\rho_2} ((1 + (z_2 / g) / a_w))^3} \leq [\sigma_H], \quad (34.27)$$

где  $g$  — коэффициент диаметра червяка;

$a_w$  — межосевое расстояние, мм;

$M_{\rho_2} = M_2 K_\beta K_v$  — расчетный момент на червячном колесе, Н·мм;

$z_2$  — число зубьев колеса;

$K_\beta$  — коэффициент неравномерности нагрузки (при постоянной нагрузке  $K_\beta = 1,0$ , при переменной нагрузке в зависимости от жесткости червяка  $K_\beta = 1,1 \dots 1,3$ );

$K_v$  — коэффициент динамической нагрузки (при окружной скорости  $v_2 \leq 3$  м/с принимается  $K_v = 1,1 \dots 1,0$ , при  $v_2 \geq 3$  м/с  $K_v = 1,1 \dots 1,3$ ).

Допускаемое напряжение  $[\sigma_H]$  получают умножением табличных значений  $[\sigma_{HO}]$  на коэффициент долговечности  $K_{HL}$ . Коэффициент долговечности принимает значения  $(0,67 \dots 1,15)$ , он зависит от циклической долговечности и частоты вращения червяка. Значения  $[\sigma_{HO}]$  можно выбрать по табл. 34.3 и 34.4.

Таблица 34.3

Значения  $[\sigma_{HO}]$ , МПа, для оловянных бронз

Материалы и способ литья	Твердость поверхности витков червяка	
	до HRC 45	св. HRC 45
БрОФ10-1, в песчаной форме	130	160
БрОФ10-1, в кокиль	190	225
БрОНФ, центробежное	210	250

Таблица 34.4

Значения  $[\sigma_H]$ , МПа, для твердых бронз и чугунов по условию стойкости передачи к заеданию

Червячное колесо—червяк	Скорость скольжения $v_{ск}$ , м/с						
	0,5	1	2	3	4	6	8
БрАЖ-4 — закаленная сталь	250	230	210	180	160	120	90
Сч15 или СЧ20 — сталь 20 или 20Х (цементованная)	130	115	90	—	—	—	—
СЧ10 или СЧ15 — сталь 45 или Ст6	110	90	70	—	—	—	—

*Проверочный расчет.* Решая уравнение (34.27) относительно параметра  $a_w$  (межосевое расстояние), получим формулу проектного расчета червячных передач:

$$a_w = (1 + z_2/g) \sqrt[3]{M_{\rho_2} (170/(z_2/g)[\sigma_H])^2}, \quad (34.28)$$

где  $a_w$ , мм;  $M_{\rho_2}$ , Н·мм;  $[\sigma_H]$ , МПа.

*Расчет червячной передачи на прочность.* На изгиб рассчитывают лишь зубья червячного колеса (витки червяка обладают избыточной прочностью на изгиб) по формуле

$$\sigma_F = (1,4 M_{\rho_2} Y_F)/(gz_2 m^3) \leq [\sigma_F], \quad (34.29)$$

где  $M_{\rho_2} = M_2 K_p K_v$  — расчетный момент на червячном колесе, Н·м;

$g$  — коэффициент диаметра червяка;

$z_2$  — число зубьев колеса;

$\sigma_F$  — коэффициент формы зуба, для червячных передач выбирают по эквивалентному числу зубьев  $z_v = z_2/\cos^3 \gamma$ , см. табл. 34.5;

$\sigma_F$  и  $[\sigma_F]$  — соответственно расчетное и допускаемое напряжение изгиба.

Таблица 34.5

Значения коэффициента формы зуба  $Y_F$  червячного колеса

$z_v$	$Y_F$	$z_v$	$Y_F$
26	1,85	45	1,48
28	1,80	50	1,45
30	1,76	60	1,40
32	1,71	80	1,34
35	1,64	100	1,30
37	1,61	150	1,27
40	1,55	300	1,24

Значения допускаемых напряжений изгиба приведены в табл. 34.6.

Таблица 34.6.

Допускаемое напряжение на изгиб,  $[\sigma_F]$ , МПа, для различных способов литья

Материал	Способ литья	Твердость поверхности витков червяка			
		до HRC 45		св. HRC 45	
		неревер- сивная	реверсив- ная	неревер- сивная	реверсив- ная
БрОФ10-1	В песчаные формы	40	29	50	36
БрОФ10-1	В кокиль	58	42	72	52
БрОНФ	Центробежное	65	46	81	57
БрАЖ9-4	В песчаные формы	78	64	100	75
СЧ10	То же	34	21	42	26
СЧ15	>> >>	38	24	48	30
СЧ20	>> >>	43	27	54	34
СЧ25	>> >>	48	30	60	37

Также проводят расчет для открытых червячных передач при  $z_2 > 80$ . В подавляющем большинстве случаев в зубьях колес, размеры которых определены из расчета на контактную прочность,  $\sigma_F < [\sigma_F]$ .

Проектной расчет на изгиб производят по формуле

$$m = \sqrt[3]{(1,4 M_{\rho_2} Y_F) / ((z_2 g) \cdot [\sigma_F])}, \quad (34.30)$$

где  $m$ , мм;  $M_{\rho_2}$ , Н·мм;  $[\sigma_F]$ , МПа.

### 34.5. Материалы червячной передачи

Материалы в червячной передаче должны иметь низкий коэффициент трения, обладать повышенной износостойкостью и пониженной склонностью к заеданию. Обычно это разнородные материалы.

Червяки изготавливают в основном из сталей марок 40, 45, 50 (реже — из сталей 35, Ст5) с закалкой до HRC 45—55; а также из сталей 15X, 20X, 40X, 40XH, 12XH3, 18XГТ с цементацией и закалкой до HRC 58—63.

Высокая твердость и гладкость витков обеспечивают наибольшую стойкость зубьев червячных колес против изнашивания и усталостного разрушения, а также способствует повышению КПД передачи.

*Червячные колеса* (см. рис. 34.6) или их венцы изготавливают только из антифрикционных сплавов.

При скоростях скольжения до 2 м/с и больших диаметрах колес для их изготовления можно использовать чугуны марок СЧ15, СЧ20, СЧ25; при скорости до 6 м/с — применяют алюминиево-железистые бронзы БрАЖ9-4 (при этом червяк должен иметь твердость не менее HRC 45), при скорости до 25 м/с и длительной работе без перерыва применяют оловянную бронзу БрОФ10-1, оловянно-никелевую бронзу БрОНФ, а также латуни марок ЛЦ 23 А6ЖЗМц2 и др.

Опыт эксплуатации на транспорте показал, что срок службы бронзовых венцов червячных колес зависит от способа отливки заготовок. Наиболее высокой износостойкостью обладают зубья венцов, отлитых центробежным способом.

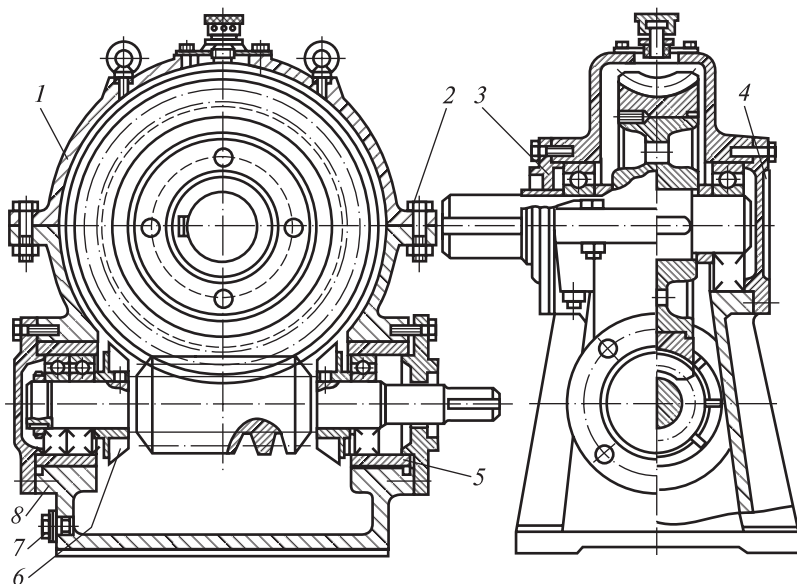


Рис. 34.7. Червячный редуктор



В связи с тем что для изготовления венцов червячных колес используется дефицитный цветной металл, колеса изготавливают преимущественно бандажированием, а червяки — за одно целое с валом.

Для более полного ознакомления с конструкцией червячных передач на рис. 34.7 показан автономный редуктор с нижним расположением червяка. Корпус редуктора имеет горизонтальный разъем, в плоскости которого лежит ось колеса, для упрощения сборки и изготовления редуктора. Верхняя часть (крышка) 1 и нижняя часть (корпус) 8 редуктора соединяются болтами 2. Подшипники червяка устанавливаются в корпус 8 с помощью дополнительных стаканов 5. Это облегчает установку червяка вместе с подшипниками и маслоразбрызгивающими кольцами 6 в корпус. Осевое положение колеса в корпусе зафиксировано с помощью крышек 3 и 4. Червяк выполнен за одно целое с валом. Колесо составное, из бронзового венца и стальной или чугуновой ступицы. Для уменьшения износа и улучшения теплоотвода из зоны контакта должно быть обеспечено смазывание передачи.

### 34.6. Тепловой расчет червячной передачи

В червячных передачах имеют место сравнительно большие потери передаваемой мощности, и передача работает с большим тепловыделением. Если отвод тепла будет недостаточен, передача перегреется. Поскольку смазочные свойства масла при нагреве резко ухудшают свои свойства, возникает опасность заедания передачи и выхода ее из строя. С целью обеспечения нормальной работоспособности для червячных редукторов производят тепловой расчет. Тепловой расчет червячной передачи при установившемся режиме работы ведут на основе теплового баланса, т.е. приравнивания тепловыделения теплоотводу.

Условие нормального теплового режима:

$$t_{\text{м}} \leq [t_{\text{м}}], \quad (34.31)$$

где  $t_{\text{м}}$  — температура масла в корпусе редуктора;

$[t_{\text{м}}]$  — допустимая температура масла в корпусе редуктора  $t_{\text{м}} = 60 \dots 70 \text{ }^{\circ}\text{C}$ , в исключительных случаях  $t_{\text{м}} = 90 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ;

$t_{\text{м}}$  — определяют из условия теплового баланса  $Q_{\text{выд}} = Q_{\text{отв}}$ ;

$Q_{\text{выд}}$  — количество теплоты, выделяемое передачей при непрерывной работе;

$Q_{\text{отв}}$  — количество теплоты, отводимое свободной поверхностью корпуса передачи за то же время.

На основании теплового баланса можно определить температуру масла:

$$t_m = (P_1(1 - \eta))/(K_f A) + t_b, \quad (34.32)$$

где  $P_1$  — мощность, передаваемая червяком, Вт;

$\eta$  — КПД передачи;  $A$  — площадь поверхности корпуса передачи, соприкасающаяся с воздухом, м<sup>2</sup>;

$t_b$  — температура окружающего воздуха, °С;

$K_f$  — коэффициент теплопередачи — количество теплоты, передаваемое в окружающую среду с единицы поверхности в 1 с при разности температур в 1 °С, Вт/(м<sup>2</sup>·°С); при нормальной циркуляции воздуха вокруг корпуса  $K_f = (14 \dots 17,5)$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С), при плохой —  $K_f = (8 \dots 10,5)$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С).

Тепловой расчет червячной передачи выполняют как проверочный.

При  $t_m > [t_m]$  необходимо либо увеличить поверхность охлаждения (применяя охлаждающие ребра и т.п.), либо применить искусственное охлаждение, обдувание корпуса воздухом с помощью вентилятора, посредством змеевика с циркулирующей водой, помещаемого в масло, и т.п.

## Глава 35. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ

### 35.1. Общие сведения и классификация зубчатых передач

Зубчатые передачи — наиболее распространенный тип передач в современном транспортном машиностроении. Их применяют в широких диапазонах скоростей (до 200 м/с), мощностей (до 100 тыс. кВт) и передаточных чисел. В большинстве случаев зубчатая передача служит для передачи вращательного движения.

Передачу движения с помощью зубьев принято называть *зубчатым зацеплением*.

У зубчатого колеса условно различают *тело* и *зубчатый венец*, отделяемый от тела соосной поверхностью впадин. *Соосной* называют поверхность вращения, ось которой совпадает с осью колеса.

Линия пересечения боковой поверхности зуба с какой-либо заданной поверхностью (например, с плоскостью, перпендикулярной оси колеса) называется *профилем (линией) зуба*.

*Основные достоинства* зубчатых передач по сравнению с другими видами передач: постоянство передаточного числа; высокая нагрузочная способность; высокий КПД (до 0,97—0,99 для одной пары колес); малые габаритные размеры по сравнению с другими видами передач при равных условиях; большая надежность в работе, простота обслуживания; сравнительно малые нагрузки на валы и опоры.

К *недостаткам* зубчатых передач следует отнести: невозможность бесступенчатого изменения передаточного числа; высокие требования к точности изготовления и монтажа; шум при больших скоростях; плохие амортизирующие свойства (это отрицательно влияет на компенсацию динамических нагрузок); громоздкость при больших расстояниях между осями ведущего и ведомого валов; потребность в специальном оборудовании и инструменте для нарезания зубьев; зубчатая передача не предохраняет машину от возможных опасных перегрузок.

По взаимному расположению осей колес различают зубчатые передачи с параллельными осями и с пересекающимися осями (конические, рис. 35.1, *е—и*), по расположению зубьев в передаче и колесах — зацепление внешнее — внутреннее (рис. 35.1, *г*) и реечное (рис. 35.1, *к*).

Зубчатые передачи *классифицируются*:

- по характеру движения осей:

- а) обычные передачи, имеют неподвижные геометрические центры (оси) всех колес;

- б) планетарные передачи, центры одного или нескольких колес подвижны.

- по взаимному расположению осей:

- а) цилиндрические передачи (рис. 35.1, *а—г, к*);

- б) конические передачи (рис. 35.1, *е—з*);

- в) со скрещающимися осями (винтовые, рис. 35.1, *д, и*);

- г) гиперболоидные передачи (передачи с перекрещивающимися осями: червячные (рис. 35.1, *л*), винтовые (рис. 35.1, *м*), гипоидные и др.).

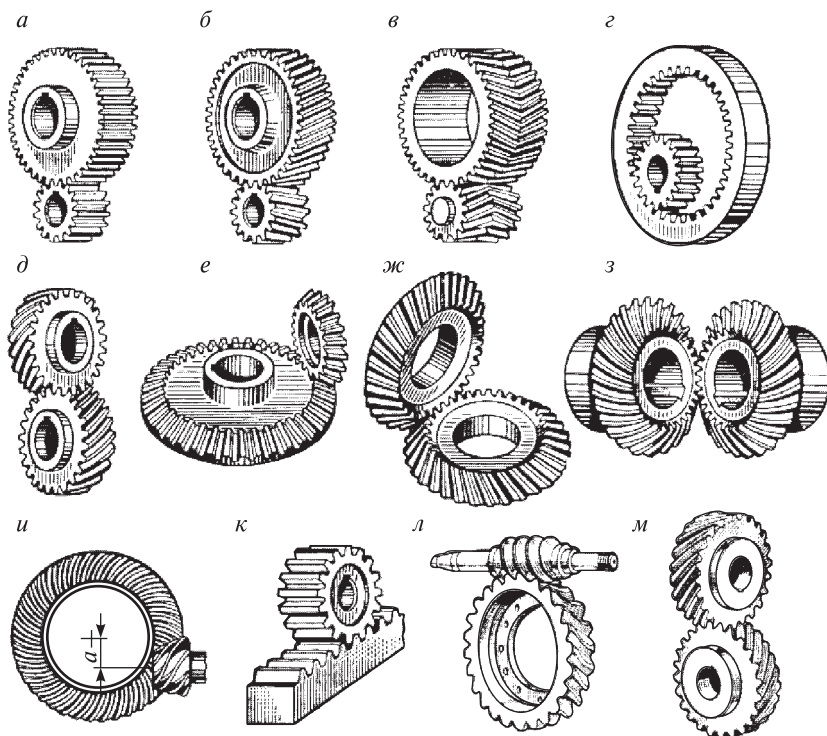


Рис. 35.1. Зубчатые передачи:

*а—г, к* — цилиндрическая; *д* — винтовая со скрещивающимися осями; *е—и* — коническая; *л* — червячная гиперболическая; *м* — винтовая гиперболическая

- по относительному расположению поверхностей вершин и впадин зубьев колес:

а) передачи внешнего зацепления, образуются при зацеплении колес с внешними зубьями;

б) передачи внутреннего зацепления, образуются при зацеплении колес, одно из которых имеет внутренние зубья, а другое — внешние (рис. 35.1, *г*). У колеса с внешними зубьями поверхность вершин находится вне поверхности впадин, а у колеса с внутренними зубьями — внутри поверхности впадин.

- по направлению зубьев, оцениваемому по расположению линии зубьев:

а) передачи с прямыми зубьями (прямозубые, рис. 35.1, *а*), имеющие прямую линию зуба;

б) передачи с винтовыми зубьями (рис. 35.1, *м*) линии которых на соосной поверхности являются винтовыми линиями любого вида. Косые зубья являются разновидностью винтовых зубьев;

- по профилям зубьев колес:

а) передачи с эвольвентным зацеплением, в котором профили зубьев являются эвольвентами окружностей;

б) передачи с циклоидальным зацеплением, в котором профили зубьев являются циклоидами;

в) передачи с зацеплением Новикова, в котором выпуклый профиль зуба одного колеса и вогнутый профиль зуба другого колеса очерчены дугами окружностей.

В зависимости от назначения зубчатые передачи могут встраиваться в конструкцию машины (встроенные передачи) или выделяться в самостоятельный узел (агрегат) и иметь отдельный корпус.

По конструктивному исполнению передачи могут быть расположены вне корпуса и иметь легкое ограждение (*открытые передачи*), либо в корпусе, изолирующем их от внешней среды (*закрытые передачи*). Открытые передачи (как правило, прямозубые цилиндрические) работают без смазывания или при ограниченном смазывании и небольших окружных скоростях (*тихоходные передачи*); закрытыми выполняют обычно передачи, работающие при средних и высоких окружных скоростях (*быстроходные передачи*) с обильным смазыванием (из масляной ванны, струей масла и др.).

Различают *силовые* и *несиловые* (кинематические) передачи. Силовые передачи используют для передачи мощностей и их габариты определяются, как правило, прочностной надежностью. Несиловые передачи выполняют в основном кинематические функции и мощности практически не передают. Размеры таких передач определяются конструктивными соображениями.

Зубчатые передачи могут понижать или повышать частоту вращения ведомого вала. В понижающей передаче частота вращения ведомого вала (колеса) меньше частоты вращения ведущего вала (колеса), а в повышающей передаче — больше.

Агрегат с понижающей передачей (передачами) называют *редуктором*, агрегат, с повышающей передачей — *мультипликатором*.

Из перечисленных зубчатых передач наибольшее распространение на железнодорожном транспорте получили цилиндрические прямозубые и косозубые передачи как наиболее простые в изготовлении и эксплуатации. Конические передачи применяют только в тех случаях, когда это необходимо по условиям компоновки машины; винтовые — в специальных случаях.

## 35.2. Сведения о методах изготовления зубчатых колес, их конструкциях и материалах

В зависимости от материала, формы и размеров зубчатых колес существуют следующие способы их изготовления: *нарезание*, *накатка* и *литьё*. Способ изготовления выбирается в зависимости от назначения и по технологическим соображениям.

*Нарезание зубьев* осуществляется двумя методами — копирование и обкатка.

*Метод копирования* основан на прорезании впадин между зубьями дисковой модульной фрезой (рис. 35.2, *а*) или пальцевой фрезой (рис. 35.2, *б*).

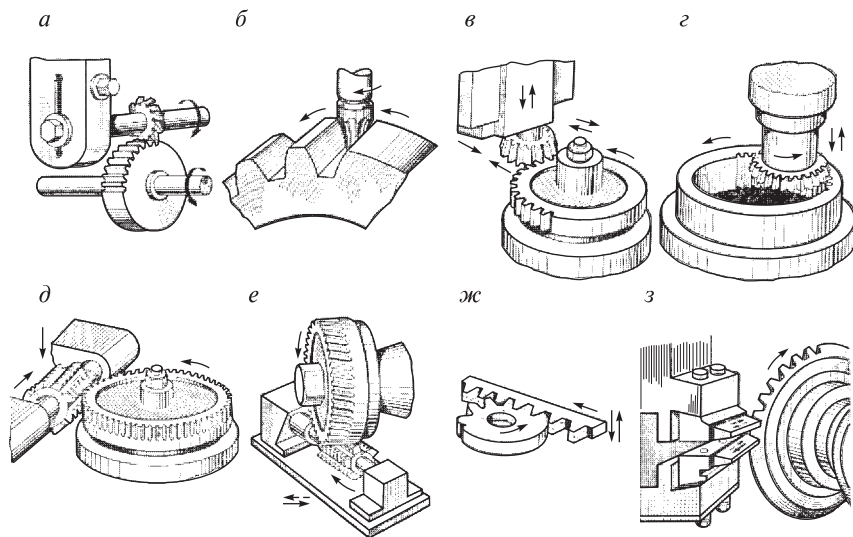


Рис. 35.2. К методам изготовления зубчатых колес:

*а* — дисковой фрезой; *б* — пальцевой фрезой; *в*, *г* — долбяком; *д*, *е* — червячной фрезой; *ж* — инструментальной рейкой; *з* — на зубострогальном станке

Обработка зубьев методом обкатки производится инструментами с очертаниями, отличными от очертаний нарезаемых зубьев — долбяком (рис. 35.2, *в, г*), червячной фрезой (рис. 35.2, *д, е*), инструментальной рейкой (рис. 35.2, *ж*) или строганием (рис. 35.2, *з*).

Достоинством метода обкатки является то, что он позволяет одним и тем же инструментом изготавливать колеса с зубьями различной формы. Изменяя относительное расположение инструмента и заготовки на станке, можно получать зубья различной формы и толщины (передачи со смещением).

Для достижения высокой точности малой шероховатости поверхности зубьев после нарезания производится их *отделка*.

Способы отделки зубьев:

*шлифование* — производится методом копирования или обкатки шлифовальным кругом;

*шевингование* — выполняется специальным инструментом шевер-шестерней или шевер-рейкой (обкатывая обрабатываемое колесо, шевер отделяет зубья до требуемых точности и шероховатости поверхности);

*притирка* — производятся с помощью специального чугунного колеса (притира), находящегося в зацеплении с обрабатываемым колесом.

В зависимости от получения заготовки зубчатые колеса подразделяют на литые, кованые или штампованные, изготовленные механической обработкой, сварные.

Зубчатые колеса, у которых диаметр впадин незначительно превышает диаметр вала в месте посадки зубчатого колеса, изготавливают за одно целое с валом. Такую конструкцию называют валом-шестерней. В остальных случаях зубчатое колесо выполняют отдельно, после чего насаживают на вал.

Колеса диаметром меньше 400 мм, как правило, имеют форму диска с выточками или без выточек. Чаще всего эти колеса изготавливают из поковок. Колеса диаметром более 400—500 мм изготавливают со спицами различного сечения.

При конструировании колеса наиболее важным требованием является его жесткость. Основные соотношения элементов зубчатых колес в зависимости от их конструктивного исполнения приведены в специальной справочной литературе.

Для экономии высокопрочных дорогостоящих материалов изготавливают сборные конструкции — *бандажированные* колеса. В этом случае зубчатый венец колеса изготавливают из качественной стали, а центральную часть делают из менее дорогого материала (например, чугуна).

Для изготовления зубчатых колес применяют следующие материалы:

сталь углеродистую обыкновенного качества марок Ст5, Ст6; качественную сталь марок 35, 40, 45, 50, 55; легированную сталь марок 12ХН3А, 30ХГС, 35Х, 40Х, 40ХН, 50Г;

сталь 35Л, 45Л, 55Л; серый чугун марок СЧ10, СЧ15, СЧ20, СЧ25, СЧ30, СЧ40, высококачественный чугун марок ВЧ 50-2, ВЧ 45-5;

неметаллические материалы (текстолит марок ПТК, ПТ, ПТ-1, бакелит, капрон, фторопласт и т.д.).

*КПД зубчатой передачи.* Потери мощности в зубчатых передачах складываются из потерь на трение в зацеплении, на трение в подшипниках и из гидравлических потерь на размешивание и разбрызгивание масла (закрытые передачи). Потери в зацеплении составляют главную часть потерь передачи, они зависят от точности изготовления и способа смазывания. Среднее значение КПД закрытых передач с учетом потерь в подшипниках: зубчатая цилиндрическая —  $\text{КПД} = 0,96 \dots 0,98$ ; зубчатая коническая —  $\text{КПД} = 0,95 \dots 0,97$ . Потерянная мощность в передаче переходит в теплоту, которая при недостаточном охлаждении может вызвать ее перегрев.

### **35.3. Элементы зубчатой передачи, определения и обозначения**

Одноступенчатая зубчатая передача состоит из двух зубчатых колес — ведущего и ведомого, Меньшее по числу зубьев из пары колес называют шестерней, а большее — колесом. Термин «зубчатое колесо» является общим. Параметрам шестерни (ведущего колеса) приписывают при обозначении нечетные индексы (1, 3, 5, 7 и т.д.), а параметрам колеса — четные. Зубчатое зацепление (ГОСТ 16530-83) характеризуется следующими основными параметрами:



$d_a$  — диаметр вершин зубьев;  $d_f$  — диаметр впадин зубьев;  $d_w$  — начальный диаметр;  $d_b$  — основной диаметр;  $d$  — делительный диаметр;  $p_t$  — окружной шаг;  $p_n$  — нормальный шаг;  $h$  — высота зуба;  $h_a$  — высота делительной ножки зуба;  $c$  — радиальный зазор;  $b$  — ширина венца (длина зуба);  $e_t$  — окружная ширина впадины зуба;  $s_t$  — окружная толщина зуба;  $a_w$  — межосевое расстояние;  $a$  — делительное межосевое расстояние;  $z$  — число зубьев.

К основным параметрам зубчатого зацепления относят также *окружной и нормальный модули*.

*Модулем зубьев  $m$*  называют часть диаметра делительной окружности, приходящуюся на один зуб. Модуль является основной характеристикой размеров зубьев. Для пары зацепляющихся колес модуль должен быть одинаковым.

Линейную величину, в  $\pi$  раз меньшую окружного шага зубьев, называют *окружным модулем зубьев* и обозначают  $m_p$ , а линейную величину, в  $\pi$  раз меньшую нормального шага зубьев, называют *нормальным модулем зубьев* и обозначают  $m_n$ . Таким образом,

$$m_t = p_t/\pi; m_n = p_n/\pi. \quad (35.1)$$

Размеры цилиндрических прямозубых колес вычисляют по делительному нормальному модулю, который называют *расчетным модулем зубчатого колеса*, или просто *модулем*, и обозначают буквой  $m$ . Модуль измеряют в миллиметрах, он регламентирован ГОСТом.

*Начальная окружность* — каждая из взаимокасающихся окружностей зубчатых колес передачи, они являются сопряженными. Это понятие относится к паре колес, находящихся в зацеплении. При изменении межосевого расстояния  $a_w$  начальные диаметры тоже, соответственно, изменяются, так как  $a_w$  равно сумме радиусов этих окружностей. Таким образом, *у пары колес, находящихся в зацеплении, может быть сколько угодно начальных окружностей*, в то время как для отдельно взятого зубчатого колеса понятие начальной окружности вообще лишено смысла.

По делительному диаметру  $d$  окружные шаги соответствуют стандартному модулю  $m$ . Для цилиндрических прямозубых колес, например,  $p_t = p_n = m\pi$  или  $d = mz$ .

Для определения основных параметров зубчатой передачи принимают делительный радиус. Если межосевое расстояние в передаче равно сумме делительных радиусов, то начальные и делительные

окружности в этом случае совпадают. В дальнейшем рассматривается именно такой частный случай зацепления.

*Основная окружность* — это такая развертка, которой является теоретическим торцовым профилем зуба эвольвентного цилиндрического зубчатого колеса. Основной диаметр

$$d_b = d \cos \alpha_t, \quad (35.2)$$

где  $\alpha_t$  — угол профиля торцового сечения зубчатой рейки.

*Высота зуба*  $h$  — радиальное расстояние между окружностями вершин и впадин зубчатого колеса:

$$h = h_a + h_f. \quad (35.3)$$

*Головка зуба* — его часть, расположенная между делительной окружностью цилиндрического зубчатого колеса и окружностью вершин зубьев,  $h_a$  — высота головки зуба.

*Ножка зуба* — часть его, расположенная между делительной окружностью и окружностью впадин (высота ножки зуба  $h_f$ ).

*Радиальный зазор* — расстояние между поверхностями вершин зубьев и впадин (шестерни и колеса):

$$c = h_f - h_a. \quad (35.4)$$

*Окружная толщина зуба*  $s_t$  — расстояние между разноименными профилями зуба по дуге концентрической окружности зубчатого колеса.

*Ширина венца*  $b$  — наибольшее расстояние между торцами зубьев цилиндрического зубчатого колеса по линии, параллельной его оси.

*Межосевое расстояние*  $a_w$  — расстояние между осями зубчатых колес передачи по межосевой линии  $O_1O_2$ .

*Делительное межосевое расстояние*  $a$  — межосевое расстояние цилиндрической зубчатой передачи, равное полусумме делительных диаметров зубчатых колес при внешнем зацеплении или полуразности при внутреннем зацеплении.

## 35.4. Основная теорема зубчатого зацепления.

### Геометрический расчет эвольвентных передач

Для обеспечения нормальной работы пары зубчатых колес с постоянным передаточным числом, профили зубьев должны быть очер-

чены по кривым, подчиняющимся определенным законам. Эти законы вытекают из основной теоремы зацепления. Рассмотрим ее.

Пусть имеется пара зубчатых колес с центрами  $O_1$  и  $O_2$ , вращающихся, соответственно, с угловыми скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . На рис. 35.3, а показаны положения, которые последовательно занимает пара эвольвентных зубьев в процессе их зацепления. Прямую  $O_1O_2$  называют *межосевой линией зубчатой передачи*. Проведем в точках касания зубьев  $K_1, K_2, K_3$  общие нормали к профилям. Все эти нормали  $NN$  должны пересекать межосевую линию  $O_1O_2$  в постоянной точке  $P$ . Эту точку называют *полусом зацепления*. Ее положение на межосевой линии определяется отношением угловых скоростей колес, т.е. их передаточным числом:

$$O_2P/O_1P = \omega_1/\omega_2 = u. \quad (35.5)$$

Из этого соотношения следует, что общая нормаль к профилям зубьев в точке их касания пересекает межосевую линию в точке  $P$  и делит межосевое расстояние на отрезки, обратно пропорционально угловым скоростям.

Следовательно, для обеспечения постоянного передаточного числа положение полюса  $P$  на линии центров должно быть постоянным.

Для доказательства этой теоремы рассмотрим пару сопряженных зубьев в зацеплении (рис. 35.3, б). Профили зубьев шестерни и колеса касаются в точке  $K_3$ . Проведем через эту точку, общую для обоих профилей, касательную  $TT$  и нормаль  $NN$ . Окружные скорости точка  $K_3$  относительно центров вращения  $O_1$  и  $O_2$  будут

$$v_1 = \overline{O_1K_3} \cdot \omega_1 \quad \text{и} \quad v_2 = \overline{O_2K_3} \cdot \omega_2. \quad (35.6)$$

Разложим  $v_1$  и  $v_2$  на составляющие  $v'_1$  и  $v'_2$  по направлению нормали  $NN$  и составляющие  $v''_1$  и  $v''_2$  по направлению касательной  $TT$ .

Для обеспечения постоянного касания профилей необходимо соблюдать условие  $v'_1 = v'_2$ , в противном случае, при  $v'_1 < v'_2$  зуб шестерни отстанет от зуба колеса, при  $v'_1 > v'_2$  произойдет врезание зубьев. Опустим из центров  $O_1$  и  $O_2$  перпендикуляры  $O_1a$  и  $O_2d$  на нормаль  $NN$ . Из подобия треугольников  $ef_1K_3$  и  $aK_3O_1$  имеем  $v'_1/v_1 = O_1a/O_1K_3$ , откуда  $v'_1 = (v_1/O_1K_3) \cdot O_1a$ .

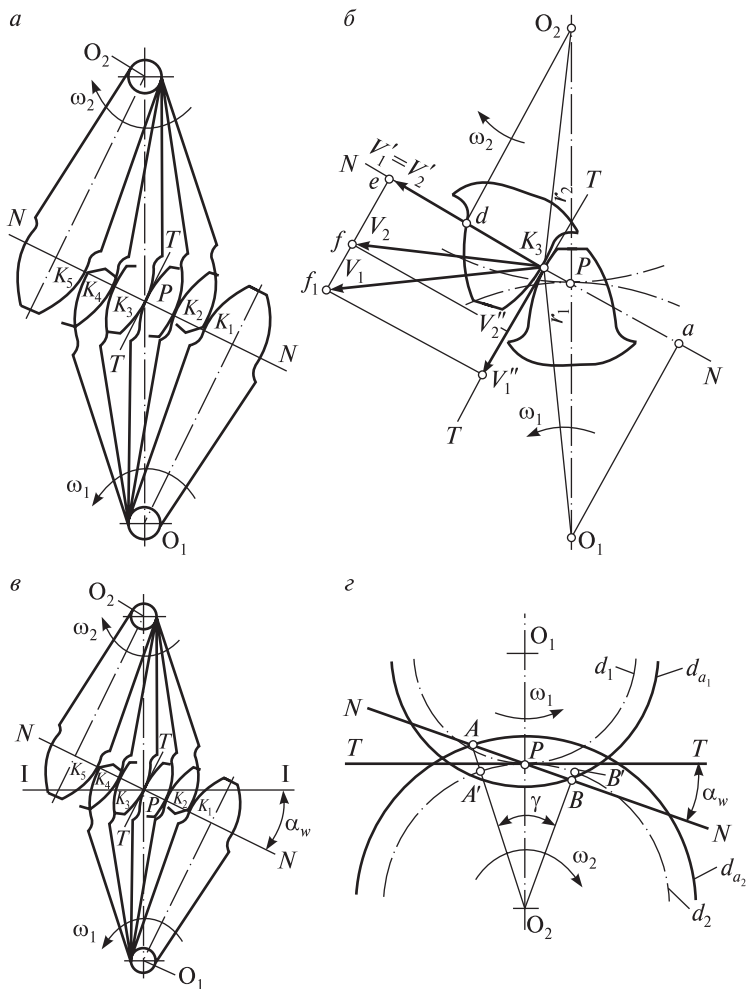


Рис. 35.3. К основной теореме зубчатого зацепления:  
 а — геометрическое место точек контактов прямой  $NN$  в зацеплении б — пара сопряженных зубьев в зацеплении; в — линия зацепления; г — межцентровое расстояние в произвольный момент времени

Из подобия треугольников  $efK_3$  и  $dK_3O_2$  имеем  
 $v_2'/v_2 = O_2d/O_2K_3$ . Отсюда  $v_2' = (v_2/O_2K_3) \cdot O_2d$ .

Поскольку  $v'_1 = v'_2$ , следовательно,  $\omega_1 O_1 a = \omega_2 O_2 d$  и передаточное число

$$u = \omega_1/\omega_2 = O_2 d/(O_1 a). \quad (35.7)$$

Аналогично рассмотрим подобие треугольников  $O_2 P d$  и  $O_1 P a$ , тогда имеем

$$O_2 d/O_1 a = O_2 P/O_1 P, \text{ откуда}$$

$$u = \omega_1/\omega_2 = O_2 P/(O_1 P) = z_2/z_1. \quad (35.8)$$

В процессе работы эвольвентных профилей точка их касания все время перемещается по прямой  $NN$ . Эту прямую называют *линией зацепления* (рис. 35.3, в).

Точку входа и выхода в зацепление сопряженных зубьев, можно определить из следующих геометрических построений. Возьмем произвольное межцентровое расстояние  $O_1 O_2$  (рис. 35.3, г) и разделим его в произвольном отношении  $O_2 P/(O_1 P) = u$ .

Радиусами  $O_2 P$  и  $O_1 P$  проведем начальные окружности зубчатых колес через точку  $P$ , касательную  $TT$  к этим окружностям и линию  $NN$  — нормаль к боковым поверхностям зубьев — под углом  $\alpha_w$  и касательной  $TT$ . Угол  $\alpha_w$  называют *углом зацепления*,  $\alpha_w$  принимают равным  $20^\circ$ .

Выберем произвольную высоту головки зубьев и проведем радиусами, равными  $(0,5 d_{a_1})$  и  $(0,5 d_{a_2})$ , окружности выступов зубчатых колес (высота головки зуба шестерни и колеса должна быть одинаковой). При направлении вращения колес, указанном на рисунке, зубья войдут в зацепление в точке  $A$  (точке пересечения нормали с окружностью выступов колеса) и выйдут из зацепления в точке  $B$  (точке пересечения нормали с окружностью выступов шестерни).

Все точки касания сопряженных зубьев будут лежать на участке  $AB$  линии зацепления. Участок  $AB$  называется *рабочим участком линии зацепления*.

Соединим точки  $A$  и  $B$  с центром колеса  $O_2$ . Образовавшийся угол  $\gamma$  есть угол, на который повернется колесо за период зацепления пары зубьев.

Продолжим линию  $O_2 B$  до ее пересечения в точке  $B'$  с начальной окружностью колеса, а точку пересечения прямой  $O_2 A$  с начальной окружностью колеса обозначим через  $A'$ . Дуга  $A'B'$ ,

соответствующая углу  $\gamma$  и измеренная по начальной окружности, называется *дугой зацепления*.

Необходимое условие непрерывности зацепления: *дуга зацепления должна быть больше шага*. В противном случае при выходе из зацепления одной пары зубьев вторая пара еще не войдет.

Длина линии зацепления  $g_\alpha$  — отрезок линии зацепления, отсекаемый окружностями вершин зубьев сопряженных колес. Он определяет начало и конец зацепления пары сопряженных зубьев. Длина зацепления — активная часть линии зацепления.

Коэффициент торцового перекрытия  $\varepsilon_\alpha$  — отношение длины линии зацепления ( $g_\alpha$ ) к основному шагу ( $p_b$ ), т.е.  $\varepsilon_\alpha = g_\alpha/p_b$ . Величина  $\varepsilon_\alpha$  показывает, сколько пар зубьев в среднем находятся одновременно в зацеплении. Например, при  $\varepsilon_\alpha = 1,4$  в течение 40 % времени в зацеплении находятся две пары зубьев, а в течение 60 % — одна пара.

Полюс зацепления  $P$  (см. рис. 35.3, б) сохраняет неизменное положение на линии центров  $O_1O_2$ . Следовательно, радиусы  $O_1P(r_1)$  и  $O_2P(r_2)$  также неизменны. Окружности радиусов  $r_1$  и  $r_2$  называют *начальными*, или *делительными*.

При вращении зубчатых колес эти окружности перекатываются одна по другой без скольжения, о чем свидетельствует равенство их окружных скоростей  $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$  (см. доказательство теоремы зацепления). Теоретически боковые поверхности зубьев (профили) могут быть очерчены любыми кривыми, удовлетворяющими основному закону зубчатого зацепления. Такие профили называют *сопряженными*. Для построения сопряженных профилей применяют ограниченное число кривых.

Профили зубьев должны быть технологичными, т.е. такими, чтобы их можно было получить в производственных условиях наиболее простыми методами. Из теоретически возможных профилей преимущественное применение получили эвольвентные (см. рис. 35.3, б), так как их проще обработать и они обладают большими преимуществами. Это зацепление при изменении межосевого расстояния не нарушает правильность зацепления (т.е. не изменяется передаточное число). Оно может быть использовано и в сменных колесах.

Зубчатые колеса раньше изготавливали с профилем зуба, очерченным циклоидальными кривыми. Зацепление в этом случае на-

зывают циклоидальным: головка зуба очерчивается эписциклоидой, ножка — гипоциклоидой.

По сравнению с эвольвентным зацеплением циклоидальное имеет следующие недостатки: сложность изготовления профиля зуба; не допускается отклонение межосевого расстояния.

В зацеплении М.Л. Новикова торцовые профили зубьев очерчены дугами окружностей. По сравнению с эвольвентными передачи с зацеплением Новикова могут при одних и тех же габаритных размерах передавать в 1,5-2 раза большую мощность. Ввиду сложности изготовления и монтажа передачи с зацеплением Новикова пока нашли ограниченное применение.

### 35.5. Сведения о корригировании зацеплений

Форма эвольвентного профиля зубьев при заданном угле инструмента  $\alpha$  и модуле зависит от числа зубьев  $z$  (рис. 35.4, *а*). С уменьшением числа зубьев увеличивается кривизна эвольвентного профиля и соответственно уменьшается толщина зубьев у основания и вершины.

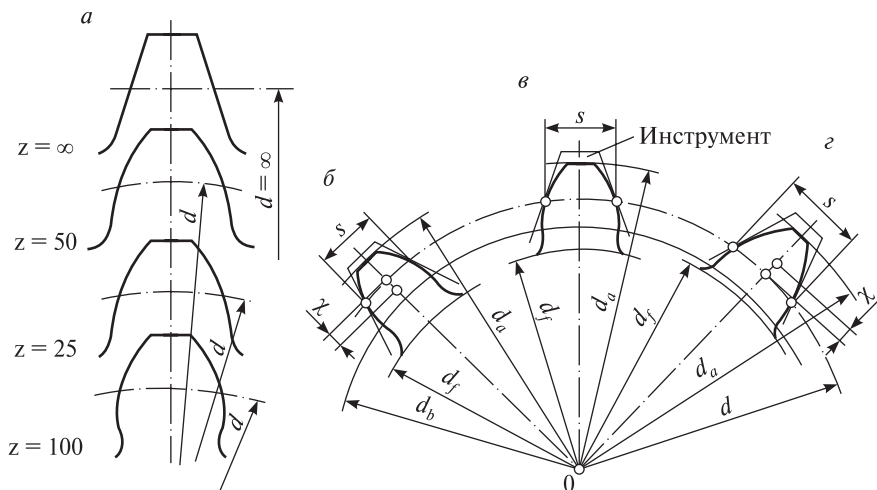


Рис. 35.4. К корригированию зацепления:

*а* — форма эвольвентного профиля зубьев при заданном угле инструмента и модуле; *б*, *в*, *г* — коррекция зацепления

Если число зубьев  $z$  меньше некоторого предельного значения  $z_{\min}$ , то при нарезании зубьев происходит подрезание ножек зуба (рис. 35.4, а,  $z = 10$ ), в результате чего в опасном сечении зуб значительно ослабляется. Снижается его прочность на изгиб, а также уменьшается рабочая часть ножки, что увеличивает изнашивание зубьев и уменьшает коэффициент их перекрытия.

Минимальное число зубьев шестерни, у которой исключено подрезание зубьев без сдвига инструмента реечного типа, определяется по формуле  $z_{\min} = 2/\sin^2\alpha$ , где  $\alpha$  — угол профиля зуба рейки. Для стандартного зацепления  $\alpha_w = 20^\circ$ ,  $z_{\min} = 17$ . В случае больших окружных скоростей передачи для уменьшения шума для редукторов принимают число зубьев шестерни  $z_1 = 20 \dots 30$ .

Для устранения явлений подрезания зубьев и улучшения параметров передачи применяют корригирование. Корригирование зубьев производят на обычных станках стандартным инструментом. Разница в изготовлении зубчатых колес с некорригированными и корригированными зубьями состоит в том, что для последних инструмент устанавливают с некоторым дополнительным смещением по отношению к оси заготовки. При этом по сравнению с нормальным эвольвентным зацеплением профили корригированных зубьев получаются другими, т.е. используются для данной передачи более выгодные участки эвольвенты той же основной окружности. Соответственно заготовки этих колес должны быть измененного диаметра.

Коррекция зацепления может быть высотной или угловой. Осуществляется она смещением инструментальной рейки (рис. 35.4, б, в, г) на размер  $\chi$  при нарезании зубьев (положительное смещение рейки — от центра зубчатого колеса, отрицательное — к центру).

*Высотное корригирование.* Шестерню изготавливают с положительным коэффициентом смещения  $\xi_1$ , а колесо с отрицательным —  $\xi_2$  (здесь  $\xi = \chi/m$ ). Суммарный коэффициент смещения  $\xi_\Sigma = \xi_1 + \xi_2 = 0$ . При высотной коррекции изменяется соотношение между высотой головки ножек зубьев, общая же высота зубьев не изменяется. Межосевое расстояние  $a_w$  и угол зацепления  $\alpha_w$  также остаются неизменными.

*Угловое корригирование* отличается от высотного тем, что  $\xi_\Sigma \neq 0$ . При  $\xi_1 > 0$  и  $\xi_2 > 0$  толщина зубьев по делительным окружностям  $s_t$  и диаметры вершин зубьев  $d_a$  увеличатся как у шестерни,



так и у колеса. Для обеспечения нормального зацепления колеса необходимо раздвинуть на величину  $\Delta a_w$  (при этом начальные окружности отличаются от делительных). По мере увеличения межосевого расстояния  $a_w$  угол зацепления  $\alpha_w$  возрастает. Угловое корригирование имеет значительно большие возможности, чем высотное, поэтому применяется чаще.

Более подробные сведения по корригированию зацепления приведены в специальной литературе.

### 35.6. Виды разрушений зубьев

Правильно спроектированная и изготовленная передача при выполнении всех правил эксплуатации не должна перегреваться и создавать при работе сильный шум. Значительный перегрев и чрезмерный шум свидетельствуют о недостатках в работе передачи, связанных с ее конструкцией, изготовлением, неправильным выбором смазочного материала или возможными повреждениями зубьев. Возможны следующие виды разрушения зубьев: поломка, изнашивание, заедание, выкрашивание рабочих поверхностей.

*Поломка зубьев.* Этот вид их разрушения полностью выводит передачу из строя. Чаще поломка наблюдается у основания зуба (рис. 35.5, а) вследствие периодического действия переменной нагрузки  $F$ , а также в результате значительной кратковременной перегрузки (ударной нагрузки). Если зуб работает одной стороной, то первоначальная трещина, как правило, образуется в зоне растяжения. Трещина распространяется вдоль основания ножки зуба, а иногда к его вершине или по какой-то рабочей части зуба.

Долговечность зубьев можно повысить, увеличив прочность основания зуба и уменьшив концентрацию напряжений в опасном сечении.

*Выкрашивание рабочих поверхностей зубьев.* Этот вид повреждения зубьев нарушает нормальную работу всей передачи, но не выводит ее из строя полностью. Чаще это повреждение наблюдается в закрытых передачах, работающих при обилии смазочного материала. Выкрашивание поверхности зубьев возникает на ножках зубьев колес вблизи полюсной линии (рис. 35.5, б). Смазочный материал, который заходит в микротрещины, находясь под действием внешнего давления (при работе передачи), расклинивает трещины. Пов-

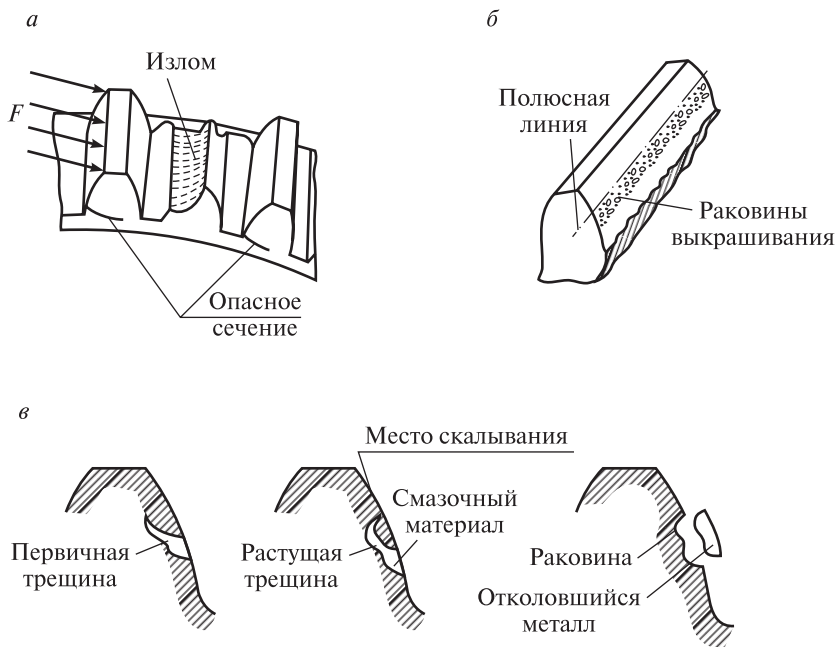


Рис. 35.5. Виды разрушения зубьев цилиндрической прямозубой передачи:  
*а* — излом; *б* — выкрашивание; *в* — откалывание (скалывание)

тораясь, такие действия приводят к откалыванию части металла (рис. 35.5, *в*). Диаметр ямок выкрашивания (оспинок) доходит до 2—5 мм. Установлено, что чем тверже поверхности зубьев и чем меньше шероховатость их поверхностей, тем большую нагрузку они могут выдерживать без опасности возникновения выкрашивания. Более вязкое масло способно лучше гасить динамические нагрузки на зубья и тем самым уменьшать выкрашивание поверхности зубьев.

В открытых передачах выкрашивание наблюдается очень редко, так как поверхностный слой, в котором возникают начальные трещины, истирается раньше, чем в нем успевает произойти усталостное выкрашивание.

Изнашивание зубьев чаще наблюдается в открытых передачах, чем в закрытых, заключается в истирании рабочих поверхностей вследствие попадания в зону зацепления металлических частиц,

пыли, грязи (абразива). Изнашивание может начаться также в результате недостаточно гладкой поверхности у новой передачи и продолжаться до сглаживания неровностей рабочих поверхностей зубьев.

*Заедание зубьев.* Оно наблюдается как в открытых, так и в закрытых тихоходных, тяжело нагруженных передачах. Этот вид повреждения зубьев заключается в том, что под действием высоких давлений сопряженные поверхности зубьев сцепляются одна с другой настолько сильно, что частицы металла с поверхности зубьев в зоне раздавленной масляной пленки отрываются и прихватываются к поверхности зубьев парного колеса. При последующем относительном движении зубьев эти частицы отрываются и делают на рабочих поверхностях борозды, задиры.

Правильно спроектированные передачи должны быть рассчитаны так, чтобы любая из возможных причин повреждения зубьев была исключена. В соответствии с этим проверяют выносливость рабочих поверхностей (расчет на контактную прочность и прочность на изгиб). Открытые передачи рассчитываются на изгиб, закрытые — на контактную прочность и на изгиб.

### 35.7. Цилиндрические прямозубые передачи

*Цилиндрическая прямозубая зубчатая передача* состоит из двух или нескольких пар цилиндрических зубчатых колес с прямыми зубьями. Эта передача наиболее проста в изготовлении. Применяется она как в открытом, так и в закрытом исполнении.

*Передаточное число  $u$*  ограничивается габаритными размерами передачи. Для одной пары цилиндрических зубчатых колес

$$u = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1 = n_1/n_2 \leq 12,5.$$

*Основные геометрические размеры* прямозубой цилиндрической передачи с эвольвентным профилем зуба определяются в зависимости от модуля  $m$  и числа зубьев  $z$  (рис. 35.6).

Диаметр вершин зубьев

$$d_\alpha = d + 2h_a. \quad (35.9)$$

Диаметр впадин

$$d_f = d - 2h_a. \quad (35.10)$$

Из равенства  $\pi d = pz$  делительный диаметр

$$d = pz. \quad (35.11)$$

Согласно ГОСТ 13755-81 высота головки зуба  $h_\alpha = m$ , высота ножки зуба  $h_f = 1,25m$ , высота зуба  $h = h_\alpha + h_f = m + 1,25m = 2,25m$ . Тогда диаметр вершин зубьев  $d_\alpha = mz + 2m = m(z + 2)$ , диаметр впадин  $d_f = mz - 2,5m = m(z - 2,5)$ , основной диаметр  $d_b = d \cos \alpha$ .

Толщина зуба  $s_t$  и ширина впадины  $e_t$  по делительной окружности равны между собой (боковой зазор между зубьями теоретически отсутствует), т.е.  $s_t = e_t = p/2 = \pi m/2 \approx 1,57m$ .

Разность в высоте ножки одного колеса и высоте головки другого образует радиальный зазор  $c = h_f - h_\alpha = 1,25m - m = 0,25m$ .

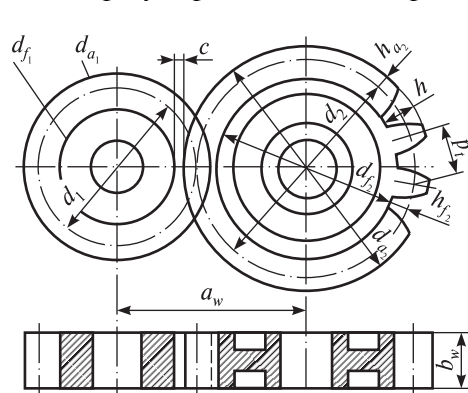


Рис. 35.6. К расчету геометрических соотношений цилиндрической прямозубой передачи

Межосевое расстояние при  $a = a_w$  (см. рис. 35.6)  $a_w = (d_1 + d_2)/2$  или  $a_w = m(z_1 + z_2)/2$ . Приняв суммарное число зубьев  $z_1 + z_2 = z_\Sigma$ , найдем  $a_w = mz_\Sigma/2$ .

В прямозубой передаче ширина венца  $b_w$  равна длине зуба:

$$b_w = m\Psi_m, \quad (35.12)$$

где  $\Psi_m$  — коэффициент длины зуба (ширины венца) по модулю для цилиндрических прямозубых передач, он выбирается по табл. 35.1.

Таблица 35.1

Значения коэффициента  $\Psi_m$

$\Psi_m = b_n/m$	НВ	Характеристика конструкции
45...30 30...20	До 350 Св. 350	Высоконагруженные точные передачи, валы, опоры и корпуса повышенной жесткости
30...25 20...15	До 350 Св. 350	Обычные передачи редукторного типа в отдельном корпусе с достаточно жесткими валами и опорами
15...10	—	Грубые передачи (в том числе с консольными валами)

Если известно  $u$  и  $z_{\Sigma}$ , то число зубьев шестерни и колеса можно определить по формулам:

$$z_1 = z_{\Sigma} / (1 + u); \quad (35.13)$$

$$z_2 = z_{\Sigma} - z_1, \quad (35.14)$$

где  $z_1$  — число зубьев шестерни;  
 $z_2$  — число зубьев колеса;  
 $z_{\Sigma}$  — суммарное число зубьев;  
 $u$  — передаточное число.

*Расчет зубьев цилиндрической прямозубой передачи на изгиб.* Рассмотрим схему (рис. 35.7) зацепления двух зубьев в полюсе и силы, действующие на зубья колес со стороны шестерни, трением между зубьями колес и шестерни пренебрегаем. Тогда нормальная сила  $F_n$  разлагается на две составляющие: окружную силу  $F_t$  и радиальную  $F_r$ .

При выводе соотношений введем следующие допущения:

- зуб рассматриваем как консольную балку прямоугольного сечения, работающую на изгиб и сжатие;
- вся нагрузка, действующая в зацеплении, передается одной парой зубьев и приложена к их вершинам;
- нагрузка равномерно распределена по длине зуба  $b_w$ .

Расчетная схема с учетом введенных допущений показана на рис. 35.8, где  $s$  — толщина зуба в опасном сечении;  $l$  — плечо силы вызывающей изгиб;  $b_w$  — длина зуба;  $F_n$  — нормальная сила, действующая на зуб.

Определим силы в опасном сечении корня зуба. Разложим силу  $F_n$  в приложенной точке  $A$  на две составляющие:  $F'_t$  и  $F'_r$ ;

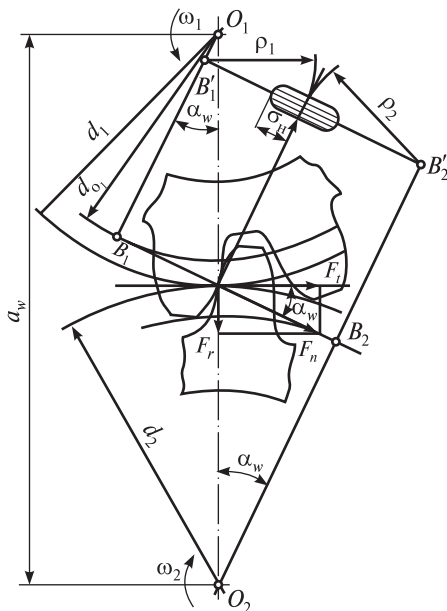


Рис. 35.7. Схема зацепления зубьев в полюсе и силы, действующие в зацеплении

условно принимаем, что сила  $F_n$  приложена только к одному зубу (перекрытием пренебрегаем), а сила  $F_t$  равна окружной силе на начальной окружности.

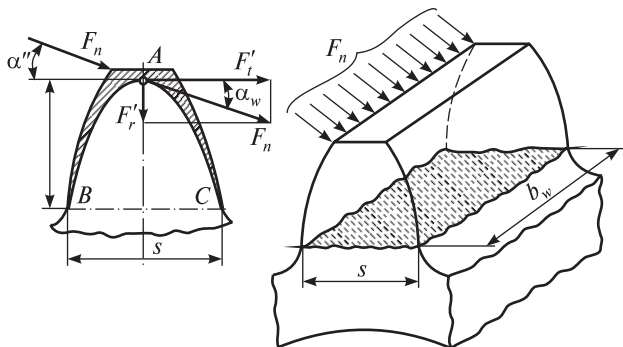


Рис. 35.8. Профиль балки равного сопротивления

Сила  $F_t'$  изгибает зуб, а сила  $F_r'$  сжимает его. Рассматривая расчетную схему рис. 35.8, находим:

$$F_t' = F_n \cos \alpha' ; F_r' = F_n \sin \alpha', \quad (35.15)$$

где  $\alpha'$  — угол направления силы (35.14) приложенной у вершины, который несколько больше угла зацепления  $\alpha_w$ ;

$F_n = F_t' / \cos \alpha_w$  — нормальная сила.

С учетом приведенной зависимости для  $F_n$  получим:

$$F_t' = (F_n \cos \alpha') / \cos \alpha_w ; F_r' = (F_n \sin \alpha') / \cos \alpha_w.$$

За расчетное напряжение принимают напряжения, действующие на растянутой стороне зуба, т.е.

$$\alpha_F = \alpha_{из} - \alpha_{сж}. \quad (35.16)$$

Для опасного сечения BC условие прочности

$$\alpha_F = (F_t' l) / W - F_r' / A, \quad (35.17)$$

где  $\alpha_F$  — напряжение изгиба в опасном сечении корня зуба;

$W$  — момент сопротивления;

$A = b_w s$  — площадь сечения ножки зуба.

Выразим  $l$  и  $s$  в долях модуля зубьев:  $l = km$ ;  $s = cm$ , где  $k$  и  $c$  — коэффициенты, зависящие от формы зуба, т.е. от угла  $\alpha_w$  и числа зубьев  $z$ .

Тогда изгибающий момент в опасном сечении

$$M_{\text{и}} = F_t l = F_t k m,$$

момент сопротивления прямоугольного сечения зуба

$$W = b_w s^2/6 = b_w c^2 m^2/6.$$

Подставим полученные выражения в формулу (35.17), и вводя коэффициенты расчетной нагрузки  $K_{F\beta}$  (табл. 35.2),  $K_{Fv}$  (табл. 35.3) и теоретический коэффициент концентрации напряжений  $K_T$ , получим

$$\sigma_F = \frac{F_t}{b_w m} \left[ \left( \frac{6k}{c^2} \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha_w} - \frac{\sin \alpha'}{c \cos \alpha_w} \right) K_T \right] K_{F\beta} K_{Fv} \leq [\sigma_F]. \quad (35.18)$$

В формуле (35.18) обозначим

$$\left[ \left( \frac{6k}{c^2} \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha_w} - \frac{\sin \alpha'}{c \cos \alpha_w} \right) K_T \right] = Y_F,$$

где  $Y_F$  — коэффициент формы зуба (его значения приведены в табл. 35.4).

В результате получим окончательную формулу проверочного расчета прямозубой передачи на усталость при изгибе:

$$\sigma_F = Y_F \left( \frac{F_t}{b_w m} \right) K_{F\beta} K_{Fv} \leq [\sigma_F]. \quad (35.19)$$

Выведем формулу проверочного расчета прямозубых передач на усталость при изгибе через вращающий момент  $M_2$ .

С учетом того что  $F_t = 2M_1/d_1 = 2M_1/(mz_1) = 2M_2/(mz_1u)$  и  $b_w = \Psi_{bd} m z_1$ , формула проверочного расчета (35.19) примет вид

$$\sigma_F = Y_F \left( \frac{2M_2}{u z_1^2 m^3 \cdot \Psi_{bd}} \right) K_{F\beta} K_{Fv} \leq [\sigma_F], \quad (35.20)$$

где  $\Psi_{bd}$  — коэффициент длины зуба (ширины венца) по делительному диаметру. Значения этого коэффициента приведены в табл. 35.5.

Таблица 35.2

Значение коэффициентов  $K_{H\beta}$  и  $K_{H\alpha}$ 

Расположение шестерни относительно опор	Твердость HВ поверх- ности зубьев колеса	$K_{H\beta}$ при $\Psi_{bd} = b_{H\beta}/d_1$					$K_{H\alpha}$ при $\Psi_{bd} = b_{H\alpha}/d_1$						
		0,2	0,4	0,6	0,8	1,2	1,6	0,2	0,4	0,6	0,8	1,2	1,6
Консольное (опоры—под- шипники)	До 350	1,16	1,37	1,64	—	—	—	1,08	1,17	1,28	—	—	—
	Св. 350	1,33	1,70	—	—	—	—	1,22	1,44	—	—	—	—
Консольное (опоры—под- шипники)	До 350	1,10	1,22	1,38	1,57	—	—	1,06	1,12	1,19	1,27	—	—
	Св. 350	1,20	1,44	1,71	—	—	—	1,11	1,25	1,45	—	—	—
Симметричное	До 350	1,01	1,03	1,05	1,07	1,14	1,26	1,01	1,02	1,03	1,04	1,07	1,10
	Св. 350	1,02	1,04	1,08	1,14	1,30	—	1,01	1,02	1,04	1,07	1,16	1,26
Несимметричное	До 350	1,05	1,10	1,17	1,25	1,42	1,61	1,03	1,05	1,07	1,12	1,19	1,28
	Св. 350	1,09	1,18	1,30	1,43	1,73	—	1,06	1,12	1,20	1,29	1,48	—



Таблица 35.3

Значение коэффициентов  $K_{Fv}$  и  $K_{Hv}$ 

Степень точности передачи	Твердость HB поверхности зубьев колеса	$K_{Fv}$ ( $K_{Hv}$ ) при окружной скорости, м/с					
		1	2	3	6	8	10
7	До 350	1,08/1,03 (1,04/1,02)	1,16/1,06 (1,07/1,03)	1,33/1,11 (1,14/1,05)	1,50/1,16 (1,21/1,06)	1,62/1,22 (1,29/1,07)	1,80/1,27 (1,36/1,08)
	Св. 350	1,03/1,01 (1,03/1,00)	1,05/1,02 (1,05/1,01)	1,09/1,03 (1,09/1,02)	1,13/1,05 (1,14/1,03)	1,17/1,07 (1,19/1,03)	1,22/1,08 (1,24/1,04)
8	До 350	1,10/1,03 (1,04/1,01)	1,20/1,06 (1,08/1,02)	1,38/1,11 (1,61/1,04)	1,58/1,17 (1,24/1,06)	1,78/1,23 (1,32/1,07)	1,96/1,29 (1,40/1,08)
	Св. 350	1,04/1,01 (1,03/1,01)	1,06/1,02 (1,06/1,01)	1,12/1,03 (1,10/1,02)	1,16/1,05 (1,16/1,03)	1,21/1,05 (1,22/1,04)	1,26/1,08 (1,26/1,05)
9	До 350	1,13/1,04 (1,05/1,01)	1,28/1,07 (1,10/1,03)	1,50/1,14 (1,20/1,05)	1,72/1,21 (1,30/1,07)	1,98/1,28 (1,40/1,09)	2,25/1,35 (1,50/1,12)
	Св. 350	1,04/1,01 (1,04/1,01)	1,07/1,02 (1,07/1,01)	1,14/1,04 (1,13/1,02)	1,21/1,06 (1,20/1,03)	1,27/1,08 (1,26/1,04)	1,34/1,09 (1,32/1,05)

Примечание. В числителе значения для прямозубых колес, в знаменателе — для косозубых.

Таблица 35.4

Коэффициент  $Y_F$  для эвольвентного наружного зацепления при  $\alpha_w = 20^\circ$ 

Число зубьев	$Y_F$	Число зубьев	$Y_F$	Число зубьев	$Y_F$
17	4,26	28	3,81	65	3,62
20	4,07	30	3,79	80	3,60
22	3,98	35	3,75	100	3,60
24	3,92	40	3,70	150	3,60
26	3,88	45	3,66	300	3,60
		50	3,65	Рейка	3,63

Таблица 35.5

Рекомендуемые значения  $\Psi_{bd}$  в зависимости от твердости активных поверхностей зубьев

Расположение колес относительно опор	HB <sub>2</sub> ≤ 350 или HB <sub>1</sub> и HB <sub>2</sub> ≤ 350	HB <sub>1</sub> и HB <sub>2</sub> > 350
Симметричное	0,8...1,4	0,4...0,9
Несимметричное	0,6...1,2	0,3...0,6
Консольное	0,3...0,4	0,2...0,25

Как уже отмечалось, причиной поломки зубьев является усталость материала под действием изгибающих напряжений. Поэтому значения допускаемых напряжений должны быть определены исходя из предела выносливости зубьев:

$$[\sigma_F] = Y_R \left( \sigma_{F \text{ lim } b}^0 / S_F \right) K_{FC} K_{FL}, \quad (35.21)$$

где  $Y_R$  — коэффициент, учитывающий шероховатость поверхности зуба ( $Y_R = 1,05...1,2$ ;  $Y_R > 1,2$  — при нормализации, улучшении и объемной закалке);

$\sigma_{F \text{ lim } b}^0$  — предел выносливости зубьев при изгибе (табл. 35.6);

$S_F$  — коэффициент безопасности ( $S_F = 1,7...2,2$ ;  $S_F > 2,2$  — для литых заготовок);

$K_{FC}$  — коэффициент, учитывающий влияние двустороннего приложения нагрузки ( $K_{FC} = 1,0$  — при одностороннем приложении нагрузки, изгибающий зуб;  $K_{FC} = 0,7...0,8$  — при двусторонней нагрузке);

$K_{FL}$  — коэффициент долговечности.

Коэффициент долговечности определяется из следующих выражений: при  $HB \leq 350$

$$K_{FL} = \sqrt[6]{N_{FO} / N_F};$$

при  $HB \geq 350$

$$K_{FL} = \sqrt[9]{N_{FO} / N_F}. \quad (35.22)$$

Здесь  $N_{FO}$  — база испытаний, соответствующая пределу выносливости зубьев при изгибе. Для всех сталей  $N_{FO} = 4 \cdot 10^6$ ;  $N_F$  — расчетная циклическая долговечность.

$$N_F = 60nct_{\Sigma}, \quad (35.23)$$

где  $n$  — частота вращения шестерни и колеса, об/мин;

$c$  — число колес, находящихся в зацеплении с рассчитываемым колесом;

$t_{\Sigma}$  — продолжительность работы зубчатой передачи за расчетный срок службы, ч.

Продолжительность работы зубчатой передачи за расчетный срок службы определяется из выражения

$$t_{\Sigma} = 365L_T C t_c k_T k_c, \quad (35.24)$$

где  $L_T$  — срок службы передачи, год;

$C$  — число смен;

$t_c$  — продолжительность смены, ч;

$k_T$  — коэффициент годового использования привода;

$k_c$  — коэффициент использования привода в смене.

Таблица 35.6

Приближенные значения пределов выносливости при изгибе зубьев  $\sigma_{F \lim}^0$

$\sigma_{F \lim}^0$ МПа	Твердость зубьев HRC		Сталь	Способ обработки
	поверхностная	сердцевина		
1,8HB <sub>ср</sub>	HB 180-300		Углеродистая или легированная	Отжиг, нормализация или улучшение
550...600	HRC 45-55		Легированная	Объемная закалка
750...850	48...58	30...45		Поверхностная закалка
750...850	56...62	32...45		Цементация и нитроцементация
300...1,2 HRC (сердцевина зуба)	50...60	24...40		Азотирование

*Расчет цилиндрической прямозубой передачи на контактную прочность.* Этот расчет основан на ограничении наибольших нормальных напряжений. При выводе формул приняты следующие допущения: зубья рассматривают как два находящихся в контакте цилиндра с параллельными образующими (радиусы этих цилиндров принимают равными радиусам кривизны профилей зубьев в полюсе зацепления). Нагрузку считают равномерно распределенной по длине зуба. Контактующие профили предполагают неразделенными масляной пленкой.

На основании этих допущений к расчету зубчатых колес можно применить результаты исследований цилиндрических роликов на контактную прочность. Наибольшие нормальные контактные напряжения возникают в точках, лежащих на очень малой глубине под линией контакта по формуле Герца—Беляева:

$$\sigma_H = \sqrt{gE_{\text{пр}}/(\rho_{\text{пр}} 2\pi(1-\mu^2))}, \quad (35.25)$$

где  $g$  — расчетная удельная нормальная нагрузка;

$E_{\text{пр}}$  — приведенный модуль упругости материалов зубьев;

$\rho_{\text{пр}}$  — приведенный радиус, кривизны профилей зубьев шестерни и колеса;

$\mu$  — коэффициент Пуассона.

Для прямозубых колес с учетом коэффициентов нагрузки

$$g = F_n / \ell_{\Sigma},$$

где  $F_n = F_t / \cos \alpha_w$  — нормальная сила, действующая на зуб (рис. 35.8);

$F_t$  — окружная сила;

$\ell_{\Sigma} = b_w K_{\varepsilon} \varepsilon_{\alpha}$  — суммарная длина контактной линии (для прямозубых передач  $\ell_{\Sigma} = b_w$  — ширина венца, так как  $K_{\varepsilon} \varepsilon_{\alpha} \approx 1,0$ ; здесь  $K_{\varepsilon} = 0,95$  — коэффициент, учитывающий непостоянство суммарной длины контактной линии).

Для учета неравномерности распределения нагрузки по длине контактных линий, а также для учета динамических нагрузок вследствие погрешности изготовления и деформации деталей передачи вводят коэффициент нагрузки  $K = K_{H\beta} K_{H\gamma}$  (см. табл. 35.2, 35.3).

$$\text{Тогда } g = F_t K_{H\beta} K_{H\gamma} / (b_w K_{\varepsilon} \varepsilon_{\alpha} \cos \alpha_w). \quad (35.26)$$

Приведенный модуль упругости  $E_{\text{пр}} = 2E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$ , где  $E_1$  и  $E_2$  — модули упругости материалов шестерни и колеса.

Зубья рассматриваются как цилиндры длиной  $b_w$  (ширина зубчатого колеса) и радиусов  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , где  $\rho_1 = (d_1/2) \sin \alpha_w$ ;  $\rho_2 = (d_2/2) \sin \alpha_w$ .

Приведенный радиус кривизны зубьев в полюсе  $\rho_{пр} = \rho_1 \cdot \rho_2 / (\rho_1 + \rho_2) = d_1 d_2 \sin \alpha_w / (2(d_1 + d_2)) = (d_1 \sin \alpha_w / 2)(u / (u \pm 1))$ .

Здесь знак «плюс» — для внешнего зацепления, знак «минус» — для внутреннего зацепления.

Подставляя значения  $\rho_{пр}$  и  $g$  в формулу (35.25) и заменив  $\sin \alpha_w = 0,5 \sin 2\alpha_w$ , получим

$$\sigma_H = \sqrt{(2 / \sin 2\alpha_w)(E_{пр} / 2\pi(1 - \mu^2))(2F_t K_{H\beta} K_{Hv}(u+1) / (b_w d_1 K_{\epsilon\alpha} u))}. \quad (35.27)$$

Обозначим в формуле (35.27) выражение  $\sqrt{(2 / \sin 2\alpha_w)}$  через  $z_H$  — коэффициент, учитывающий форму сопряженных поверхностей зубьев;  $\sqrt{E_{пр} / \pi(1 - \mu^2)} = Z_M$  — коэффициент, учитывающий механические свойства материалов сопряженных колес ( $Z_M = 275 \text{ МПа}^{1/2}$  — для стальных колес);  $\sqrt{1 / K_{\epsilon\alpha}} = Z_{\epsilon}$  — коэффициент, учитывающий суммарную длину контактных линий ( $Z_{\epsilon} \approx 1$  для прямозубых передач), получим расчетную формулу, аналогичную (35.27), рекомендуемую для проверочного расчета:

$$\sigma_H = Z_H Z_M Z_{\epsilon} \sqrt{F_t / (d_1 b_w)((u \pm 1) / u) \cdot K_{H\beta} K_{Hv}}. \quad (35.28)$$

После подстановки значений  $F_t = 2M_2 / d_1 u$ ;  $d_1 = 2\alpha_w / (u \pm 1)$  и  $b_w = \Psi_{ba} a_w$  в формулу (35.28) и некоторых преобразований получим удобную для расчета формулу:

$$\sigma_H = Z_H Z_M Z_{\epsilon} \sqrt{0,5 M_2 (u \pm 1)^3 / (\Psi_{ba} a^3 u^2) \cdot K_{H\beta} K_{Hv}} \leq [\sigma_H]. \quad (35.29)$$

Входящее в выражение (35.29) значение  $\Psi_{ba}$  определяют по формуле  $\Psi_{ba} = 2\Psi_{bd} / (u + 1)$ .

Рекомендуемые значения  $\Psi_{bd}$  приведены в табл. 35.5.

Формулу проектного расчета для определения межосевого расстояния прямозубых передач получим из (35.29), проведя некоторые преобразования:

$$a_w = (u \pm 1) \sqrt[3]{0,5 (Z_H Z_M Z_{\epsilon})^2 K_{Hv}} \sqrt[3]{M_2 K_{H\beta} / \left( \Psi_{ba} u^2 [\sigma_H]^2 \right)}.$$

Обозначим  $\sqrt[3]{0,5(Z_H Z_M Z_\varepsilon)^2 K_{Hv}}$  через вспомогательный коэффициент  $K_a$  (для прямозубых передач при  $K_{Hv} = 1,0$   $K_a = 49,5 \text{ МПа}^{1/3}$ ).

Формула для определения межосевого расстояния закрытых цилиндрических передач будет иметь вид

$$a_w = K_a (u \pm 1) \sqrt[3]{M_2 K_{H\beta} / (\psi_{ba} u^2 [\sigma_H]^2)}. \quad (35.30)$$

Допускаемые контактные напряжения при расчете рабочих поверхностей на усталостное выкрашивание рассчитываются по формуле

$$[\sigma_H] = (\sigma_{H \lim b} / S_H) Z_R K_{HL},$$

где  $\sigma_{H \lim b}$  — предел выносливости активных поверхностей зубьев (табл. 35.7), соответствующий базе испытаний перемены напряжений  $N_{HO}$  (база испытаний  $N_{HO}$  определяется по табл. 35.8);

$S_H$  — коэффициент безопасности ( $S_H = 1,1$  при нормализации, улучшении или объемной закалке; при поверхностной закалке и цементации  $S_H = 1,2$ );

$Z_R$  — коэффициент, учитывающий шероховатость сопряженных поверхностей зубьев ( $Z_R = 1$  при  $R_a = 1,25 \dots 0,63$ ;  $Z_R = 0,95$  при  $R_a = 2,5 \dots 1,5$ ;  $Z_R = 0,9$  при  $R_z = 40 \dots 10 \text{ мкм}$ );

$K_{HL}$  — коэффициент долговечности, который учитывает влияние срока службы, режима нагрузки передачи и возможность повышения допускаемых напряжений для кратковременно работающих передач.

При постоянной нагрузке  $K_{HL} = \sqrt[6]{N_{HO} / N_H}$ , где  $N_H = 60 n c t_\Sigma$  — циклическая долговечность. При переменной нагрузке расчет коэффициента долговечности  $K_{HL}$  определяется по эквивалентной циклической долговечности  $N_{HE}$ ,  $K_{HL} = \sqrt[6]{N_{HO} / N_{HE}}$ .

Таблица 35.7

**Пределы контактной выносливости  $\sigma_{H \lim b}$**

$\sigma_{H \lim b}$ , МПа	Материал	Твердость поверхностей зубьев (средняя)	Термическая обработка зубьев
2 HB+70 18 HRC+150 17 HRC+200	Сталь углеродистая и легированная	HB $\leq 350$ HRC 38—50 HRC 40—50	Нормализация, улучшение Объемная закалка Поверхностная закалка
23 HRC 1050	Сталь легированная	HRC $> 56$ HV 550—750	Цементация и нитроцементация Азотирование

С учетом формул (35.23) и (35.24)  $N_{HE} = 60nct_{\Sigma} K_{HE}$ , где  $K_{HE}$  — коэффициент приведения переменного режима нагрузки к постоянному эквивалентному.

$$K_{HE} = \sum [(M_i / M_{\max})^3 (t_i / t_{\Sigma}) (n_i / n_{\max})]. \quad (35.31)$$

Таблица 35.8

База испытаний  $N_{HO}$

Твердость поверхности зубьев НВ	До 200	250	300	350	400	450	500	550	600
$N_{HO}$ , млн циклов	10	17	26,4	38,3	52,7	70	90	113	140

В расчетные формулы (35.29) и (35.30) входит меньшее из допускаемых напряжений, установленных для шестерни и колеса. Поскольку материал колеса имеет обычно меньшую твердость, чем материал шестерни, в большинстве случаев  $[\sigma_H]$  для колеса меньше.

*Методические рекомендации к выполнению проекта — расчет цилиндрической прямозубой передачи.* Исходными данными для расчета передачи обычно являются мощность (или вращающий момент), угловые скорости (или скорость одного вала и передаточное число), условия работы (характер нагрузки) и срок службы передачи.

Поскольку проектный расчет зубьев в закрытых передачах выполняют на контактную прочность, а в открытых — на изгиб, то и порядок их расчета несколько различен.

*Расчет закрытой цилиндрической прямозубой передачи* выполняют в следующем порядке.

1. Определяют передаточное число  $u$ .
2. В зависимости от условий работы передачи выбирают материалы колес, назначают термическую обработку и значения твердости рабочих поверхностей зубьев.
3. Определяют базу испытаний  $N_{HO}$ , расчетную циклическую долговечность  $N_H$ , вычисляют коэффициенты и допускаемые напряжения изгиба.
4. Выбирают коэффициент длины зуба (ширину венца колеса) и рассчитывают  $\Psi_{ba}$ .
5. Определяют межосевое расстояние из условия контактной прочности по формуле (35.30) и округляют его значение до стандартного.

Для стандартных редукторов расчетное значение  $a_w$  округляют до ближайшего большего значения: 40, 50, 63, 80, 100, 125, (140), 160, (180), 200, (225), 250, (280), 315, (335), 400, (450), 500, (560), 630, (710), 800, (900), 1000 и т.д. до 25000 (в скобках значения по 2-му ряду стандарта для  $a_w$ ).

6. Задают модуль из соотношения  $m = (0,01...0,02)a_w$  и округляют его значение до ближайшего стандартного. При этом в силовых передачах желательно, чтобы модуль был не менее 1,5-2 мм.

7. Определяют суммарное число зубьев  $z_\Sigma$  передачи, число зубьев шестерни и колеса.

8. По табл. 35.4 выбирают коэффициенты формы зубьев  $Y_F$  для шестерни и колеса.

9. Проверяют прочность зубьев по напряжениям изгиба. При неудовлетворительных результатах необходимо соответствующим изменением числа зубьев и модуля при том же межосевом расстоянии добиться уменьшения напряжений изгиба, не нарушая при этом условия контактной прочности.

10. Выполняют геометрический расчет передачи.

11. Определяют окружную скорость колеса  $v$  и по табл. 35.9 назначают соответствующую степень точности зацепления.

Таблица 35.9

**Значения окружной скорости колес**

Вид передачи	Форма зубьев	Твердость поверхностей зубьев колеса (большого) НВ	Окружная скорость $v$ (м/с, не более) при степени точности			
			6	7	8	9
Цилиндрическая	Прямые	До 350	18	12	6	4
		Св. 350	15	10	5	3
	Не прямые	До 350	36	25	12	8
		Св. 350	30	20	9	6
Коническая	Прямые	До 350	10	7	4	3
		Св. 350	9	6	3	2,5

*Примечание.* Во избежание получения чрезмерно высоких значений коэффициентов нагрузки рекомендуется степень точности назначать на единицу выше, чем указано в таблице.

*Расчет открытых передач* выполняют в следующем порядке.

1. Определяют передаточное число  $u$ .

2. В зависимости от условий работы передачи выбирают материалы колес, назначают термическую обработку и значения твердости рабочих поверхностей зубьев.

3. Определяют базу испытаний, расчетную долговечность, вычисляют коэффициенты режима работы и определяют допускаемые напряжения изгиба.

4. Задают число зубьев шестерни  $z_1$  и по передаточному числу определяют число зубьев колеса  $z_2$ .

5. По таблице 35.4 определяют коэффициенты формы зуба  $Y_F$ .

6. Выбирают коэффициент длины зуба (ширину венца колеса  $\Psi_{bd}$ ).

7. Из условия прочности на изгиб определяют модуль передачи  $m$  и округляют его до ближайшего большего стандартного значения.



8. Выполняют геометрический расчет передачи.

9. Определяют окружную скорость колес и по табл. 35.9 назначают соответствующую ее степень точности зацепления.

### 35.8. Цилиндрические косозубые и шевронные зубчатые передачи

Косозубые зубчатые передачи, как и прямозубые, предназначены для передачи момента между параллельными валами. У косозубых колес оси зубьев располагаются не по образующей делительного цилиндра, а по винтовой линии, составляющей с образующей угол  $\beta$  (рис. 35.9). Угол наклона зубьев  $\beta$  принимают равным  $8\text{--}15^\circ$ , он одинаков для обоих колес, но на одном из сопряженных колес зубья наклонены вправо, а на другом влево. Передаточное число для одной пары  $u \leq 12$ . В прямозубых передачах линия контакта параллельна оси, в косозубых расположена по диагонали на поверхности зуба (контакт в прямозубых передачах осуществляется вдоль всей длины зуба, а в косозубых — сначала в точке увеличивается до прямой, «диагонально» захватывающей зуб, и постепенно уменьшается до точки) — рис. 35.10, а.

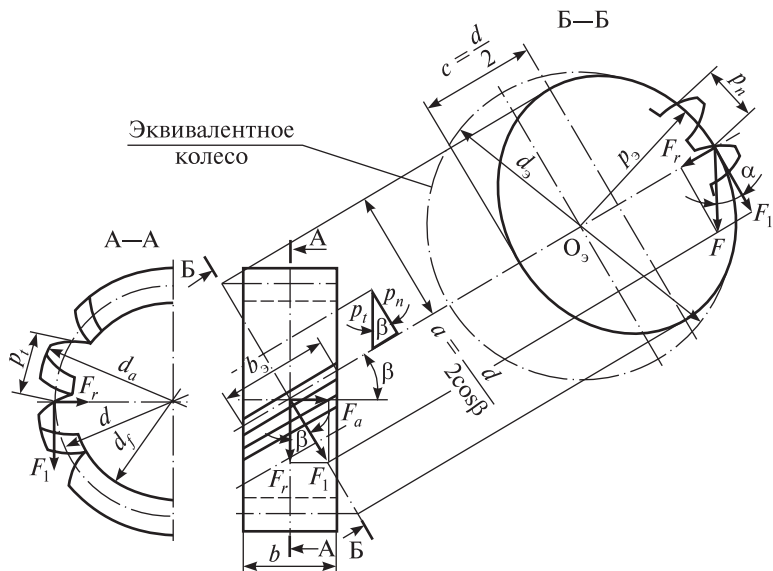


Рис. 35.9. К зависимости осевой силы от направления вращения колеса

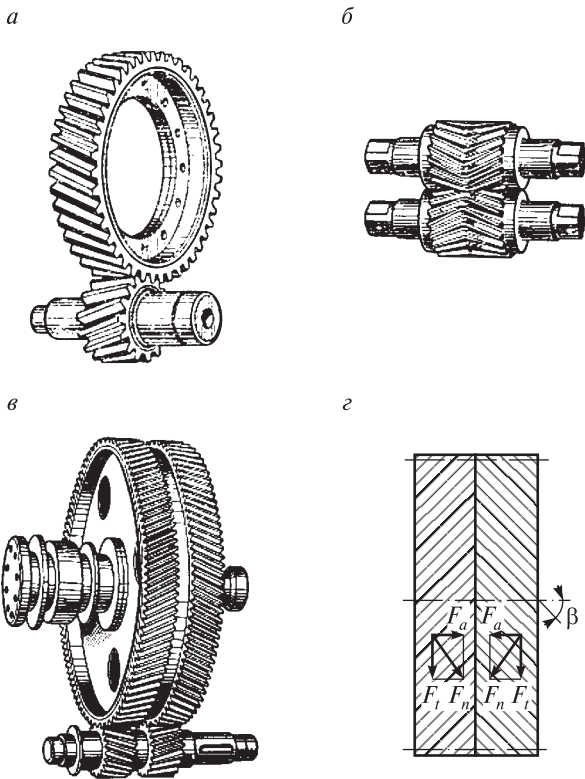


Рис. 35.10. Цилиндрические косозубые и шевронные зубчатые передачи: *a* — косозубая зубчатая передача; *б* — шевронное зубчатое колесо; *в* — шевронное колесо с жестким углом; *г* — схема действующих на шевронную передачу сил

Достоинства косозубых передач по сравнению с прямозубыми: меньше шума при работе; меньшие габаритные размеры; высокая плавность зацепления; большая нагрузочная способность; значительно меньшие дополнительные динамические нагрузки.

Направление осевой силы зависит от направления вращения колеса и направления винтовой линии зуба, а также от того, каким является колесо — ведущим или ведомым. Осевая сила дополнительно нагружает валы и опоры, что является недостатком косозубых передач.

*Шевронные зубчатые колеса* представляют собой разновидность косозубых колес (рис. 35.10, б, в).

Цилиндрическое зубчатое колесо, венец которого по ширине состоит из участков с правыми и левыми зубьями (см. рис. 35.10, б) называют шевронным колесом. Часть венца зубчатого колеса, в пределах которого линии зубьев имеют одно направление, называют *полушевроном*.

Бывают шевронные колеса с жестким углом (см. рис. 35.10, в), предназначенным для выхода режущего инструмента при нарезании зубьев. Шевронные передачи обладают всеми преимуществами косозубых, так как осевые силы (рис. 35.10, г) противоположно направлены и на подшипник не передаются. В этих передачах допускают большой угол наклона зубьев ( $\beta = 25...40^\circ$ ). Ввиду сложности изготовления шевронные передачи применяют реже, чем косозубые, т.е. в тех случаях, когда требуется передавать большую мощность и высокую скорость, а осевые нагрузки нежелательны.

Косозубые и шевронные колеса, в отличие от прямозубых, имеют два шага и два модуля: в нормальном сечении (см. рис. 35.9) по делительной окружности — нормальный шаг  $p_n$ , в торцевой плоскости — торцовый шаг  $p_t$ . Из условия, что модуль зацепления равен шагу, деленному на число  $\pi$ , имеем  $m_n = p_n/\pi$ ;  $m_t = p_t/\pi$ .

Для косозубых и шевронных колес значения нормального модуля  $m_n$  стандартизованы, так как профиль косоугольного зуба в нормальном сечении соответствует исходному контуру инструментальной рейки и, следовательно,  $m = m_n$  (косозубые и шевронные колеса нарезают тем же способом и инструментом, что и прямозубые). Нормальный модуль  $m_n$  является исходным при геометрических расчетах.

Геометрические параметры цилиндрической косозубой и шевронной передач с эвольвентным профилем зуба рассчитывают по формулам, приведенным в табл. 35.10. По торцовому модулю  $m_t$  рассчитывают делительные (начальные) диаметры, а до  $m_n$  — все остальные размеры зубчатых колес.

В косозубой передаче сила  $F$ , действующая на зуб косозубого колеса (рис. 35.9 и 35.11), направлена по нормали к профилю зуба, т.е. по линии зацепления эквивалентного прямозубого колеса, и составляет угол  $\alpha$  с касательной к эллипсу. Эту силу разложим на две составляющие: окружную силу на эквивалентном колесе  $F_1$  и радиальную (распорную) силу на этом колесе  $F_r$ . Если, в свою

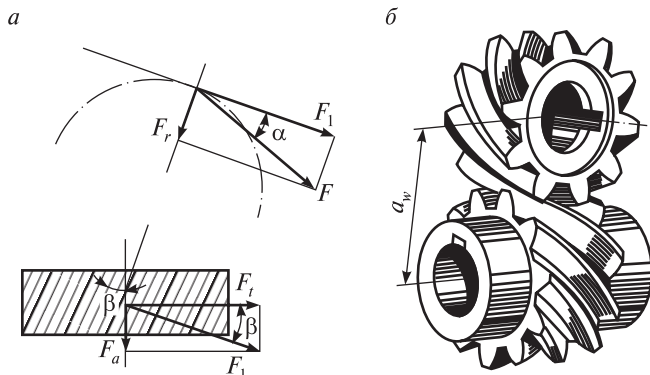


Рис. 35.11. К расчету косозубых передач:

*a* — расчетная схема; *б* — винтовая передача (разновидность косозубой)

очередь, силу  $F_1$  разложить по двум направлениям, то получим такие силы:  $F_t$  — окружная сила,  $F_a$  — осевая сила.

Для зубчатого колеса с шевронным зубом окружную силу  $F_t$  и распорную  $F_r$  определяют по тем же формулам, что и для косозубой передачи, т.е.  $F_t = P/v$ ,  $F_r = F_t \operatorname{tg} \alpha / \cos \beta$ . В шевронной передаче осевая сила  $F_a = 0$ .

Таблица 35.10

**Геометрические параметры цилиндрической косозубой передачи**

Параметр, обозначение	Расчетные формулы
Нормальный модуль $m_n$	$m_n = p_n / \pi$ ; $m_n = (d/z) \cos \beta$ ; $m_n = m \cos \beta$
Торцовый (окружной) модуль $m_t$	$m_t = p_t / \pi$ ; $m_t = (d/z)$ ; $m_t = m_n / \cos \beta$
Диаметр вершин зубьев $d_a$	$d_a = m_t z + 2m_n$ ; $d_a = m_n((z/\cos \beta) + 2)$
Делительный диаметр $d$	$d = m_t z = m_n z / \cos \beta$
Основной диаметр $d_b$	$d_b = m_t z \cos \alpha_t = m_t z \cos \alpha_t / \cos \beta$
Диаметр впадин зубьев $d_f$	$d_f = m_t z - 2,5m_n = m_n z / \cos \beta - 2,5m_n = m_n(z/\cos \beta - 2,5)$
Шаг нормальный $p_n$	$p_n = m_n \pi$ ; $p_n = p_t \cos \beta$
Шаг торцовый (окружной) $p_t$	$p_t = m_t \pi$ ; $p_t = p_n / \cos \beta$
Окружная толщина зубьев $s_t$	$s_t = m_n \pi / 2$
Ширина впадин зубьев $e$	$e = m_n \pi / 2$
Высота зуба $h$	$h = 2,25m_n$
Высота ножки зуба $h_a$	$h_a = m_n$

Параметр, обозначение	Расчетные формулы
Высота головки зуба $h_f$	$h_f = 1,25m_n$
Радиальный зазор $c$	$c = 0,25m_n$
Межосевое расстояние $a_w$	$a_w = m_t z_{\Sigma} / 2 = m_n z_{\Sigma} / 2 \cos \beta$
Длина зуба $b$	$b = m_n \Psi_m (\Psi_m = 10 \dots 20)$
Ширина венца $b_w$	$b_w = b_w \cos \beta$

*Примечание.* Угол профиля зуба рейки в торцовом сечении не равен углу профиля зуба рейки в нормальном сечении [ $\alpha_t \neq \alpha$  ( $\alpha_t > \alpha$ )].

Винтовая передача (разновидность косозубой) состоит из двух косозубых цилиндрических колес (рис. 35.11, б). Однако в отличие от передачи косозубыми цилиндрическими колесами с параллельными валами касание между зубьями здесь происходит в точке и при значительных скоростях скольжения. Поэтому при значительных нагрузках винтовые зубчатые передачи работать удовлетворительно не могут.

*Расчет зубьев цилиндрической косозубой и шевронной передач на изгиб* аналогичен расчету прямых зубьев. Поскольку в косозубой и шевронной передачах зубья значительно прочнее прямых зубьев, соответственно в расчетную формулу (35.20) вводят коэффициент, учитывающий повышение прочности при изгибе по сравнению с прямыми зубьями.

Коэффициент формы зуба  $Y_F$  выбирают по табл. 35.4 в зависимости от эквивалентного числа зубьев приведенного колеса (рис. 35.9):

$$z_{\Sigma} = z_v = z / \cos^3 \beta,$$

где  $z_v$  — число зубьев приведенного (эквивалентного) колеса в сечении  $B-B$  (рис. 35.9);

$z$  — фактическое число зубьев;

$\beta$  — угол наклона зубьев.

Если зубчатое колесо рассечь нормальной плоскостью (см. рис. 35.9), то в сечении начального цилиндра получим эллипс с полуосями  $a = d / (2 \cos \beta)$  и  $c = d / 2$ . Профиль зуба в этом сечении близок к профилю такого прямого зуба модуля  $m_n$ , который расположится на цилиндрическом колесе радиусом  $\rho_3 = d_3 / 2$ , равным радиусу кривизны эллипса. Это колесо называется эквивалентным (приведенным) колесом. Радиус кривизны эллипса  $\rho = d / (2 \cos^2 \beta)$ . Диаметр экви-

валентного колеса  $d_3 = 2\rho_3 = d/\cos^2 \beta$ . Если в последнее выражение подставить  $d = (2m_n z)/\cos \beta$ , то получится число зубьев эквивалентного колеса (эквивалентное или фиктивное число зубьев):

$$m_n z_3 = m_n z / \cos^3 \beta \text{ или } z_3 = z / \cos^3 \beta = z_v.$$

В заключении должен быть выполнен проверочный расчет, аналогичный расчету на условие прочности зубьев на изгиб цилиндрической косозубой передачи. Отличается он тем, что вводятся поправочные коэффициенты:

учитывающий перекрытие зубьев  $Y_\varepsilon = 1/(K_\varepsilon \varepsilon_\alpha)$ ;

учитывающий угол наклона зуба  $Y_\beta \approx \cos \beta$  (при  $\beta = 8...18^\circ$  среднее значение  $Y_\beta = 0,9$ );

учитывающий распределение нагрузки между зубьями  $K_{F\alpha}$ . Этот коэффициент выбирается по табл. 35.11.

Таблица 35.11

Значения коэффициентов  $K_{H\alpha}$ ,  $K_{F\alpha}$

Степень точности передачи	$K_{H\alpha}$ при окружной скорости $v$ , м/с			$K_{F\alpha}$
	5	10	15	
6	1,01	1,03	1,04	0,72
7	1,05	1,07	1,09	0,81
8	1,09	1/13	—	0,91

Приняв  $Y_\varepsilon Y_\beta = 0,9$ , формула проверочного расчета косозубых передач на изгиб примет вид

$$\sigma_F = 0,9 Y_F \left( \frac{2 M_2}{u z_1^2 m_n^3 \Psi_{bd}} \right) K_{F\beta} K_{Fv} K_{F\alpha} \leq [\sigma_F], \quad (35.32)$$

где  $M_2$  — вращающий момент на колесе, Н·мм;

$u$  — передаточное число;

$\Psi_{bd} = 0,2...1,4$  — коэффициент длины зуба (табл. 35.5);

$Y_F$  — коэффициент формы зуба, принимаемый по табл. 35.4. Этот коэффициент выбирают по эквивалентному числу зубьев шестерни  $z_v$ ;

$z$  — число зубьев;

$m_n$  — нормальный модуль, мм;

$K_{F\beta}$ ,  $K_{Fv}$  — коэффициенты расчетной нагрузки (назначаются по табл. 35.2 и 35.3);

$[\sigma_F]$  — допускаемое напряжение при изгибе, МПа.

Расчет косозубых передач на изгиб ведется по менее прочному зубу, у которого отношение  $[\sigma_F]/Y_F$  меньшее.

Из формулы (35.32) легко получить соотношение, определяющее проектный расчет косозубых передач:

$$m_n = K_m \sqrt[3]{M_2 K_{F\beta} Y_F K_{F\alpha} / (\psi_{bd} u z_1^2 [\sigma_F])}, \quad (35.33)$$

где  $K_m$  — вспомогательный коэффициент, примерно равный 11,2 (для косозубых передач этот коэффициент учитывает также  $Y_\epsilon$  и  $Y_\beta$ ).

*Расчет цилиндрической косозубой и шевронной передач на прочность* выполняют аналогично расчету прямозубых колес.

Расположение зубьев в косозубом зацеплении повышает коэффициент перекрытия зубьев, так как в зацеплении находится одновременно несколько пар зубьев, что уменьшает нагрузку на один зуб и повышает его контактную прочность, увеличивает прочность зубьев на изгиб, уменьшает динамические нагрузки. Для учета повышения контактной прочности косых зубьев по сравнению с прямыми в формулу (35.29) вводят поправочные коэффициенты.

Контактные напряжения, возникающие в поверхностном слое косых зубьев:

$$\sigma_H = Z_H Z_M Z_\epsilon \sqrt{0,5 M_2 (u \pm 1)^3 / (\psi_{bd} a^3 u^2) K_{H\beta} K_{H\gamma} K_{H\alpha}} \leq [\sigma_H], \quad (35.34)$$

где  $Z_H = 1,76 \cos \beta$  — коэффициент, учитывающий форму сопряжения поверхностей зубьев (среднее значение  $Z_H = 1,71$ );

$Z_M = 275 \text{ МПа}$  — коэффициент, учитывающий механические свойства материала сопряженных колес;

$Z_\epsilon$  — коэффициент, учитывающий суммарную длину контактных линий (для косозубых передач среднее значение  $Z_\epsilon = 0,8$ );

$K_{H\alpha}$  — коэффициент, учитывающий распределение нагрузки между зубьями (выбирается по табл. 35.11);  $K_{H\beta}$  (табл. 35.2),  $K_{H\gamma}$  (табл. 35.3) — коэффициенты режима работы;

$\Psi_{ba} = 2\Psi_{bd} / (u + 1)$  — коэффициент длины зуба ( $\Psi_{bd}$  — табл. 35.5);

$a_w$  — межосевое расстояние, мм;

$u \geq 1$  — передаточное отношение;

$M_2$  — момент на колесе, Н·мм;

$[\sigma_H]$  — допускаемое нормальное контактное напряжение, МПа.

*Проектный расчет на контактную прочность* аналогичен расчету прямозубой передачи на контактную прочность. Формула для определения межосевого расстояния косозубой передачи имеет вид

$$a_w = K_\alpha (u \pm 1) \sqrt[3]{M_2 K_{H\beta} / \left( \Psi_{ba} u^2 [\sigma_H]^2 \right)}, \quad (35.35)$$

где  $K_\alpha$  — вспомогательный коэффициент ( $K_\alpha = 43 \text{ МПа}^{1/3}$  с учетом  $K_{Ha}$ ).

Допускаемые нормальные контактные напряжения для расчета цилиндрической косозубой передачи определяют, как и для рассмотренных прямозубых передач. Часто материалы для шестерни и для колеса выбирают одинаковыми. Разные допускаемые контактные напряжения для шестерни и для колеса обеспечиваются их различной термической обработки.

В качестве допускаемого контактного напряжения (расчетного) для косозубых и шевронных цилиндрических передач принимают среднее арифметическое значение между значениями  $[\sigma_{H1}]$  и  $[\sigma_{H2}]$ , т.е.

$$[\sigma_H] = 0,45([\sigma_{H1}] + [\sigma_{H2}]), \quad (35.36)$$

где  $[\sigma_H]$  — допускаемое (расчетное) контактное напряжение;

$[\sigma_{H1}]$  — допускаемое контактное напряжение для материала шестерни;

$[\sigma_{H2}]$  — допускаемое контактное напряжение для материала колеса.

Расчетное контактное напряжение  $[\sigma_H]$  не может быть принято больше  $1,23[\sigma_{H2}]$ .

*Методические рекомендации к разработке проекта — расчет закрытой цилиндрической косозубой передачи.*

1. Определяют передаточное число  $u$ .
2. В зависимости от условий работы передачи выбирают материалы колес, назначают термическую обработку и твердость рабочих поверхностей зубьев.
3. Определяют базу испытаний  $N_{HO}$ , расчетную циклическую долговечность  $N_H$  и допускаемые напряжения изгиба и контактные напряжения.
4. Выбирают коэффициент  $\Psi_{ba}$  длины зуба (ширины венца колеса).
5. Определяют межосевое расстояние из условия контактной прочности по формуле (35.35).
6. Задают значение нормального модуля из соотношения  $m_n = (0,01 \dots 0,02) a_w$  и округляют его до ближайшего стандартного значения. При этом для силовых передач желательно иметь модуль не менее 1,5—2 мм.
7. Задают угол наклона зубьев  $\beta$  и определяют суммарное число зубьев  $z_\Sigma$  передачи, числа зубьев шестерни и колеса  $z_1$  и  $z_2$ .
8. Определяют эквивалентные число зубьев  $z_{v_1}$ ,  $z_{v_2}$  и коэффициенты формы зуба  $Y_{F_1}$  и  $Y_{F_2}$ .
9. По формуле (35.32) проверяют прочность зубьев по напряжениям изгиба. При неудовлетворительных результатах ( $\sigma_F > [\sigma_F]$  или  $\sigma_F = [\sigma_F]$ ) необходимо



соответствующим изменением числа зубьев и модуля при том же межосевом расстоянии добиться нужного изменения напряжения изгиба, не нарушая условия контактной прочности.

10. Выполняют геометрический расчет передачи (табл. 35.10). Определяют окружную скорость колес и по табл. 35.9 назначают соответствующую степень точности, выбирают  $K_{F\alpha}$  (табл. 35.11).

*Расчет открытой цилиндрической косозубой передачи* рекомендуется выполнять в следующем порядке.

1. Определить передаточное число  $u$ .
2. В зависимости от условий работы передачи выбрать материалы для колес, назначить их термическую обработку и твердость рабочих поверхностей зубьев.
3. Определить базу испытаний  $N_{HO}$ , расчетную циклическую нагрузку  $N_H$ , вычислить коэффициенты и определить допускаемые напряжения изгиба.
4. Задать угол наклона зубьев  $\beta$  и число зубьев шестерни  $z_1$ .
5. Определить число зубьев колеса  $z_2$ .
6. Определить числа зубьев эквивалентных колес, шестерни и колеса  $z_{v_1}$  и  $z_{v_2}$ .
7. По табл. 35.4 коэффициенты формы зуба  $Y_{F_1}$  и  $Y_{F_2}$ .
8. По табл. 35.4 коэффициенты формы зуба  $Y_{F_1}$  и  $Y_{F_2}$ .
9. Выбрать  $\Psi_{bd}$  — коэффициент длины зуба (ширины венца).
10. Из условия прочности на изгиб определить по формуле (35.33) значение нормального модуля  $m_n$  и округлить до ближайшего большего стандартного значения.
11. Выполнить геометрический расчет передачи (табл. 35.10).
12. Определить окружную скорость колес  $v$  и по табл. 35.9 назначить соответствующую ей степень точности.

## 35.9. Конические зубчатые передачи

Зубчатую передачу с пересекающимися осями, у которой начальные и делительные поверхности колес конические, называют *конической*. Коническая передача состоит из двух конических зубчатых колес (см. рис. 35.1 *е, ж, з*) и служит для передачи вращающего момента между валами с пересекающимися осями под углом  $\delta_1 + \delta_2 = \Sigma$ . Наиболее распространена в транспортном машиностроении коническая передача с углом между осями  $\Sigma = 90^\circ$  (рис. 35.12, *а*). Но могут быть передачи и с суммарным углом, большим или меньшим  $90^\circ$ . Колеса конических передач выполняют с прямыми (рис. 35.12, *б*), косыми (рис. 35.12, *в*) либо круговыми зубьями (рис. 35.12, *г*).

Передачу с коническими колесами для передачи вращающего момента между валами со скрещивающимися осями называют гипоидной (см. рис. 35.1, *и*). Эта передача широко используется

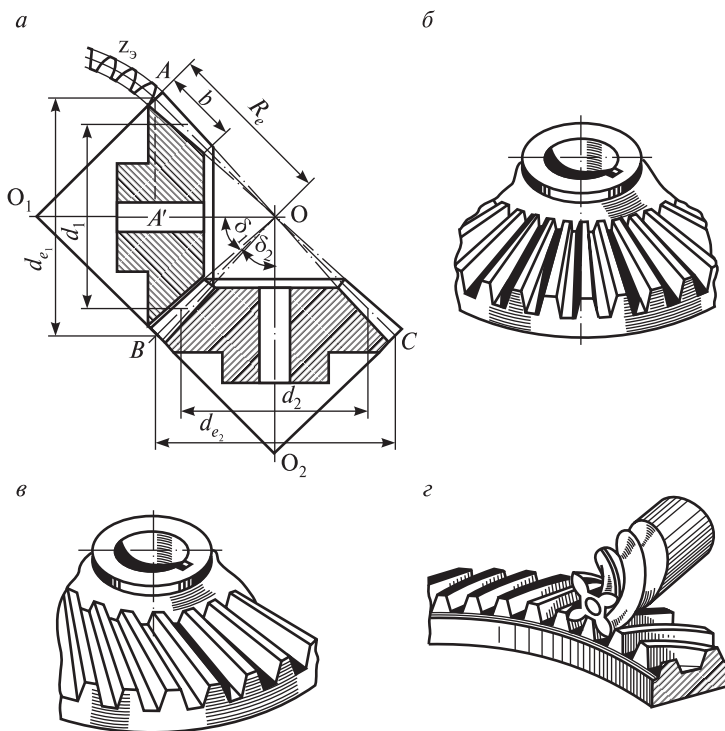


Рис. 35.12. Коническая зубчатая передача:

*a* — расчетная схема; *б* — с прямыми зубьями; *в* — косыми зубьями; *г* — с круговыми зубьями

на железнодорожном транспорте в подъемных механизмах и автомобилях.

При равных силовых параметрах конические передачи дороже цилиндрических. Их применение диктуется необходимостью передавать момент при пересекающихся осях валов. Передаточное число одной пары  $u \leq 6,3$ .

Вершины конусов конической передачи (рис. 35.13, *a*) находятся в точке пересечения осей валов  $O$ .

Геометрическими параметрами конической передачи (рис. 35.12, *a* и рис. 35.13, *a*) являются: делительный конус шестерни  $AOB$ ; то же колеса —  $BOC$ ; делительный дополнительный конус шестерни  $AO_1B$ ; то же колеса —  $BO_2C$ ; угол делительного конуса шестерни  $\delta_1$ ; то же колеса —  $\delta_2$ ; внешний делительный диаметр

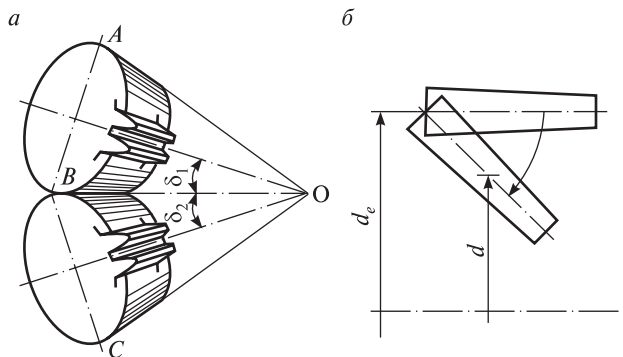


Рис. 35.13. Геометрические параметры конической зубчатой передачи: *а* — местоположение вершин конусов; *б* — к соотношению, определяющему внешний и средний делительные диаметры

шестерни —  $d_{e1}$ ; то же колеса —  $d_{e2}$ ; средний делительного диаметр шестерни —  $d_1$ ; то же колеса —  $d_2$ ; ширина зубчатого венца (длина зуба) —  $b$ ; внешнее делительное конусное расстояние (или длина дистанции) —  $R_e$ .

Передаточное число конической передачи

$$u = \omega_1/\omega_2 = n_1/n_2 = d_{e2}/d_{e1} = z_2/z_1 = 1/\operatorname{tg} \delta_1 = \operatorname{tg} \delta_2. \quad (35.37)$$

В конической передаче может быть бесчисленное множество делительных окружностей. Для расчета принимают только внешнюю и среднюю делительные окружности (см. рис. 35.12, *а*).

Из условия, что в конической передаче модуль и делительный диаметр связаны теми же соотношениями, что и в цилиндрических передачах, т.е.  $d = mz$  (рис. 35.13, *б*), определяют внешний  $d_e$  и средний  $d$  делительные диаметры:

$$d_e = m_e z; \quad d = m z, \quad (35.38)$$

где  $m_e$  — внешний окружной модуль;

$m$  — средний окружной модуль.

Внешний окружной модуль обычно выбирают из стандартного ряда. Округление внешнего модуля до стандартного значения не является обязательным требованием. Этот модуль называют *производственным* и по его значению определяют все геометрические параметры зубчатых колес (задают размеры зубьев на внешнем торце, на котором удобно производить измерения).

Средний окружной модуль  $m$  рассчитывают в зависимости от внешнего окружного модуля  $m_e$ . По среднему окружному модулю выполняют расчет передачи на прочность при изгибе.

Геометрические размеры прямозубой конической передачи с эвольвентным профилем зуба (рис. 35.14, *a*) определяют из следующих соотношений:

внешний диаметр вершин зубьев

$$d_{ae} = d_{ae} + 2AB = m_e z + 2m_e \cos \delta = m_e (z + 2\cos \delta); \quad (35.39)$$

внешний диаметр впадин зубьев

$$d_{fe} = d_e - 2AC = m_e z - 2,4m_e \cos \delta = m_e (z - 2,4\cos \delta). \quad (35.40)$$

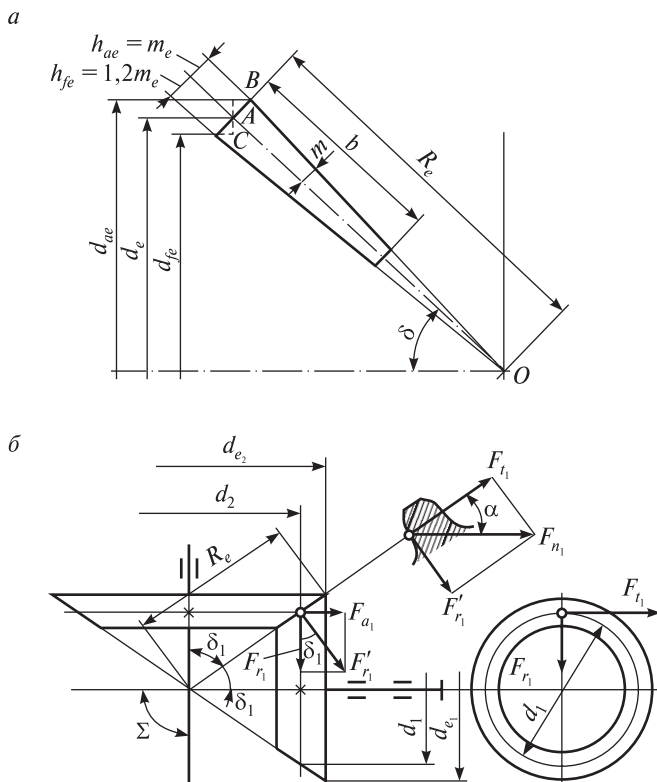


Рис. 35.14. К расчету конической зубчатой передачи:  
*a* — геометрические размеры; *б* — действующие на передачу силы

Длина зуба (ширина венца)

$$b = \Psi_{bd} d_1. \quad (35.41)$$

где  $d_1$  — средний делительный диаметр шестерни, значения  $\Psi_{bd}$  принимают в диапазоне 0,3...0,6 при условии  $\Psi_{bRe} = b/R_e \leq 0,3$  и  $b \leq 10m_e$ .

Ориентировочно длина зуба может быть выбрана также в зависимости от внешнего делительного конусного расстояния  $R_e$ :

$$R_e/4 \leq b \leq R_e/3. \quad (35.42)$$

В рассматриваемой передаче (рис. 35.14, б) действуют следующие силы: окружная  $F_t$ , радиальная  $F_r$  и осевая  $F_a$ . С учетом геометрических соотношений в конической передаче по нормали к зубу действует сила  $F_{n_1}$ , разложим эту силу на две составляющие  $F_{r_1}$  и  $F'_{r_1}$ . В свою очередь  $F'_{r_1}$  разложим на  $F_{a_1}$  и  $F'_{a_1}$ .

Запишем:

$$F_{t_1} = 2M_1/d_1; \quad F_{n_1} = F_{t_1}/\cos \alpha; \quad F'_{r_1} = F_{t_1} \operatorname{tg} \alpha;$$

$$F_{r_1} = F'_{r_1} \cos \delta_1 = F_{t_1} \operatorname{tg} \alpha \cos \delta_1;$$

$$F_{a_1} = F'_{r_1} \sin \delta_1 = F_{t_1} \operatorname{tg} \alpha \sin \delta_1.$$

Для колеса направление сил противоположное, тогда получим:

$$\overline{F}_{n_1} = -\overline{F}_{n_2}; \quad \overline{F}_{t_1} = -\overline{F}_{t_2}; \quad \overline{F}_{r_1} = -\overline{F}_{a_2}; \quad \overline{F}_{a_1} = -\overline{F}_{r_2}. \quad (35.43)$$

*Расчет зубьев прямозубой конической передачи на изгиб* ведут по аналогии с расчетом цилиндрической прямозубой передачи.

Опытным путем установлено, что нагрузочная способность конической передачи ниже, чем цилиндрической. В соответствии с этим в расчетные формулы для зубьев конической передачи вводят коэффициент  $K_{Fo}$ , учитывающий снижение их нагрузочной способности по сравнению с зубьями цилиндрических передач.

Расчет на прочность зубьев при изгибе выполняют по среднему значению модуля зубьев  $m$ . Коэффициент формы зуба  $Y_F$  выбирают по аналогии с цилиндрической прямозубой передачей, но в зависимости от числа зубьев эквивалентных колес  $z_\gamma = z/\cos \delta$ .

Под числом зубьев  $z_\gamma$  эквивалентных колес понимают такое число зубьев, которое может расположиться на длине окружности

(рис. 35.12, а) радиусом, равным длине образующей дополнительного конуса  $O_1A$ .

*Проверочный расчет* следует вести по аналогии с прямозубой передачей. Расчетные напряжения изгиба в зубьях конических колес и условие прочности выражаются формулой

$$\sigma_F = Y_F \left( \frac{2M_2}{uz_1^2 m^3 \Psi_{bd} K_{F\theta}} \right) K_{F\beta} K_{Fv} \leq [\sigma_F], \quad (35.44)$$

где  $\sigma_F$  — возникающее напряжение изгиба, МПа;

$M_2$  — вращающий момент на колесе, Н·мм;

$K_{F\beta} K_{Fv}$  — коэффициенты нагрузки (назначаются по табл. 35.2 и 35.3);

$\Psi_{bd}$  — коэффициент длины зуба;

$u$  — передаточное число;

$Y_F$  — коэффициент формы зуба принимается по табл. 35.4 в зависимости от  $z_v$ ;

$z_1$  — число зубьев шестерни;

$m = m_e - (b/z) \sin \delta$  — средний модуль, мм;

$K_{F\theta} = 0,85$  — опытный коэффициент снижения нагрузочной способности;

$[\sigma_F]$  — допускаемое напряжение изгиба.

*Проектный расчет*: средний модуль зубьев определяется по формуле

$$m_n = K_m \sqrt[3]{M_2 K_{F\beta} Y_F / (\Psi_{bd} u z_1^2 [\sigma_F])}, \quad (35.45)$$

где  $K_m$  — вспомогательный коэффициент, примерно равный 1,45 для стальных прямозубых конических колес;

$\Psi_{bd} = b/d_1$ , как правило, его принимают равным 0,3...0,6.

*Расчет конических прямозубых передач на контактную прочность* аналогичен расчету прямозубой передачи на контактную прочность, в основу принимается формула (35.28) и рассчитываются напряжения по среднему дополнительному конусу:

$$\sigma_H = Z_H Z_M \sqrt{F_t (u_v + 1) / (d_{v1} u_v \cdot b \cdot K_{H\theta} \cdot K_{H\beta} K_{Hv})} \leq [\sigma_H]. \quad (35.46)$$

После несложных преобразований и подстановки в исходную формулу значений  $d_{v1}$  и  $u_v$ , а также замены  $F_t = 2M_2/d_1 u$ ;  $b = \Psi_{bd} d_1$ , формула проверочного расчета для стальных прямозубых конических колес принимает вид

$$\sigma_H = Z_H Z_M \sqrt{2 M_2 \sqrt{(u^2 + 1))} / (d_1^3 u^2 \cdot K_{H\theta} \Psi_{bd} \cdot K_{H\beta} K_{Hv})} \leq [\sigma_H], \quad (35.47)$$

где  $\sigma_H$  — возникающее нормальное контактное напряжение, МПа;

$M_2$  — вращающий момент на колесе, Нмм;

$d_1$  — средний делительный диаметр шестерни, мм;

$Z_H = 1,76 \cos \beta$  — коэффициент, учитывающий формулу сопряжения поверхностей зубьев;

$Z_M = 275 \text{ МПа}^{1/2}$  — коэффициент, учитывающий механические свойства материала;

$\Psi_{bd}$  — коэффициент ширины (длины) зуба;

$u$  — передаточное отношение;

$K_{H\theta} = 0,85$  — коэффициент, учитывающий снижение контактной прочности конической передачи по сравнению с прямозубой;

$[\sigma_H]$  — допускаемое контактное напряжение.

*Проектный расчет.* Решая выражение (35.47) относительно  $d_1$ , получим формулу проектного расчета

$$d_1 = K_d \sqrt[3]{M_2 K_{H\beta} \sqrt{u^2 + 1} / (\Psi_{bd} u^2 [\sigma_H]^2 K_{H\theta})}, \quad (35.48)$$

где  $K_d = \sqrt[3]{(Z_M Z_H)^2 \cdot 2 K_{Hv}}$  — вспомогательный коэффициент (для стальных прямозубых конических колес  $K_d = 78 \text{ МПа}^{1/3}$ ).

*Методические рекомендации к разработке курсового проекта* — расчет закрытой конической зубчатой передачи.

1. Определяют передаточное число  $u$  и углы делительных конусов шестерни и колеса  $\delta_1$  и  $\delta_2$ .

2. В зависимости от условий работы передачи выбирают материалы колес, назначают термическую обработку и твердость рабочих поверхностей зубьев.

3. Определяют базу испытаний  $N_{HO}$ , расчетную циклическую долговечность  $N_H$  и допускаемые напряжения изгиба.

4. Выбирают коэффициент  $\Psi_{bd}$  длины зуба.

5. Определяют средний межосевое делительный диаметр из условия контактной прочности.

6. Задают число зубьев шестерни  $z_1$ , определяют число зубьев колеса  $z_2$ .

7. Рассчитывают внешний модуль  $m_e$  и округляют его до стандартного значения  $m = m_e - (b/z) \sin \delta$ .

8. Определяют число зубьев  $z_{v_1}$  и  $z_{v_2}$  и по табл. 35.4 — коэффициенты формы зуба шестерни  $Y_{F_1}$  и колеса  $Y_{F_2}$ .

9. Проверяют прочность зубьев по напряжениям изгиба. При неудовлетворительных результатах  $\sigma_F > [\sigma_F]$  необходимо соответствующим изменением

числа зубьев и модуля при том же конусном расстоянии добиться нужного изменения напряжения изгиба, не нарушая условия контактной прочности.

10. Выполняют геометрический расчет передачи.

11. Определяют окружную скорость колес и по табл. 35.9 назначают соответствующую степень точности.

*Расчет открытой конической зубчатой передачи.*

1. Определяют передаточное число  $u$  и углы делительных конусов шестерни и колеса  $\delta_1$  и  $\delta_2$ .

2. В зависимости от условий работы передачи выбирают материалы для колес, назначают их термическую обработку и твердость рабочих поверхностей зубьев.

3. Определяют базу испытаний  $N_{HO}$ , расчетную циклическую нагрузку  $N_H$ , вычисляя коэффициенты и определяют допускаемые напряжения изгиба.

4. Задают число зубьев шестерни  $z_1$  и по передаточному числу  $u$  определяют число зубьев колеса  $z_2$ .

5. Определяют число зубьев эквивалентных колес  $z_{v_1}$  и  $z_{v_2}$ , коэффициенты формы зуба  $Y_{F_1}$  и  $Y_{F_2}$  по табл. 35.4.

6. Выбирают коэффициент длины зуба (ширины венца)  $\Psi_{bd}$ .

7. Из условия прочности на изгиб (формула (35.45)) определяют средний модуль  $m_e$ , значение которого округляют до ближайшего большего стандартного значения.

8. Выполняют геометрический расчет передачи.

9. Определяют окружную скорость колес  $v$  и по табл. 35.9 назначают соответствующую ей степень точности.

### 35.10. Зубчатые передачи с зацеплением М.Л. Новикова

Передача с зацеплением Новикова состоит из двух цилиндрических косозубых (рис. 35.15, а) или конических колес (рис. 35.15, б) с винтовыми зубьями и служит для передачи момента между валами с параллельными или пересекающимися осями. Особенность зацепления Новикова состоит в том, что в этом зацеплении первоначальный линейный контакт (рис. 35.15, в) заменен точечным, превращающимся под нагрузкой в контакт с хорошим прилеганием (рис. 35.15, г), Простейшими профилями зубьев, обеспечивающими такой контакт, являются профили, очерченные по дуге окружности или близкой к ней кривой.

Обычно профиль зубьев шестерни делается выпуклым, а профиль зубьев колес — вогнутым или наоборот (рис. 35.15, д, е), но могут быть передачи и с профилем зубьев шестерни и колеса, показанным на рис. 35.15, ж. Такая конструкция зубьев увели-



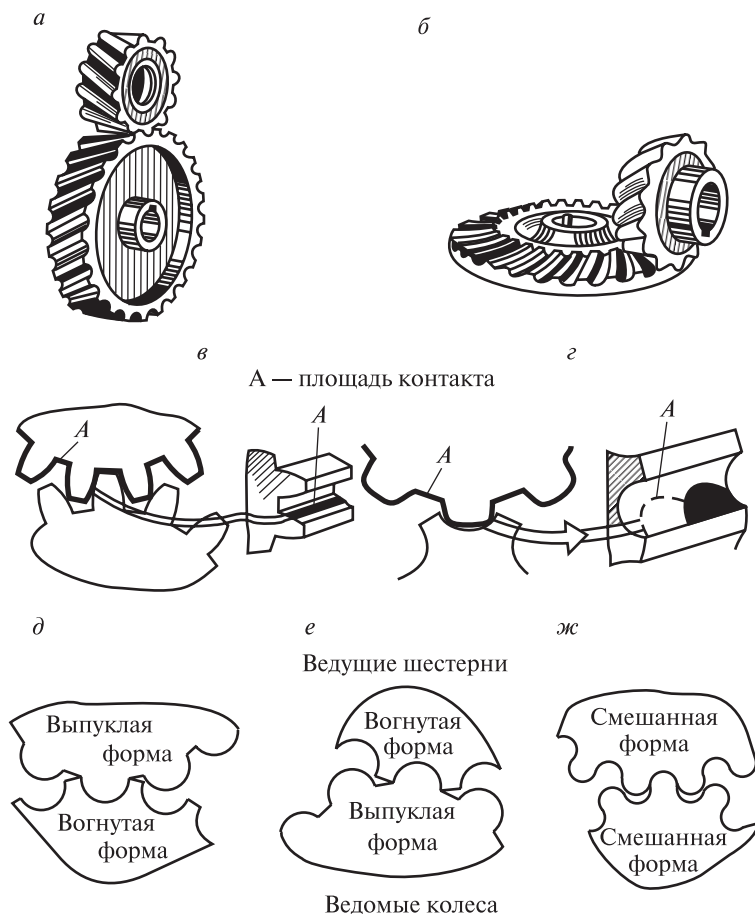


Рис. 35.15. Зубчатые передачи Новикова:

*а* — цилиндрические; *б* — конические; *в* — линейный контакт; *г* — точечный контакт; *д*, *е*, *ж* — профили зубьев шестерни и колеса

чивает нагрузочную способность данной передачи по сравнению с эвольвентной передачей при равных условиях. В зацеплении Новикова контакт зубьев теоретически осуществляется в точке, в эвольвентном зацеплении соприкосновение зубьев происходит по линии. Однако при одинаковых габаритных размерах передачи соприкосновение зубьев в зацеплении Новикова значительно лучше, чем соприкосновение в эвольвентном зацеплении.

Высокая нагрузочная способность является *основным достоинством* передач с зацеплением Новикова. При твердости рабочих поверхностей до НВ 350 можно принимать допускаемую нагрузку примерно в 2,5 раза больше допускаемой нагрузки для эвольвентных прямозубых передач тех же основных размеров, выполненных из тех же материалов, с той же термической обработкой.

Благодаря большей нагрузочной способности передачи с зацеплением Новикова более компактны, имеют почти в 2 раза меньшие габариты по сравнению с передачами с эвольвентным зацеплением при одинаковой передаваемой мощности.

Передачи с зацеплением Новикова допускают большее передаточное число, а вследствие хорошо удерживающейся масляной пленки между соприкасающимися зубьями уменьшается изнашивание зубьев, повышается КПД передачи (потери на трение в зацеплении Новикова примерно в 2 раза меньше, чем потери в эвольвентном зацеплении). Шум во время их работы значительно ниже.

*Недостатками* этого зацепления являются большая (чем в эвольвентных зацеплениях) чувствительность к изменению межосевого расстояния; с увеличением нагрузки в зацеплении возрастает осевая составляющая, что, в свою очередь, усложняет конструкцию применяемых подшипниковых узлов; при ухудшении контакта (например, в случае перекоса валов и изменения межосевого расстояния) вся нагрузка, действующая на зубья, может сосредоточиться на небольшом участке длины зубьев, в результате чего зубья могут оказаться сильно перегруженными; необходимость иметь две специальные фрезы для нарезания зубьев (для шестерни и колеса). На рис. 35.16, *а* показаны стандартные исходные контуры для цилиндрической зубчатой передачи с зацеплением Новикова для выпуклых (шестерня) и вогнутых (колесо) зубьев. Основные геометрические размеры этих передач (рис. 35.16, *б*) определяют в зависимости от значения модуля  $m_n$  (табл. 35.12, 35.13).

*Расчет передачи с зацеплением Новикова на контактную прочность.* Этот расчет выполняют по аналогии с расчетом на контактную прочность для косых зубьев эвольвентного зацепления, но несущая способность зубьев зацепления Новикова по контактной прочности принимают в 1,75—2 раза больше, чем для эвольвентного зацепления.

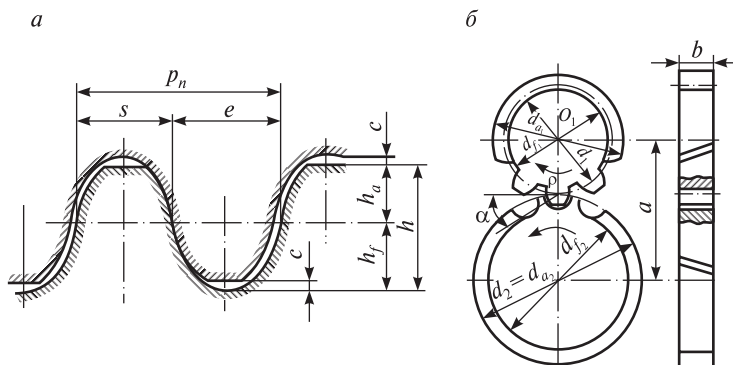


Рис. 35.16. Зацепление Новикова:

*a* — исходные контуры для цилиндрической зубчатой передачи; *б* — основные геометрические размеры

Таблица 35.12

Стандартные значения модулей для передачи с зацеплением Новикова

1-й ряд	2-й ряд	1-й ряд	2-й ряд	1-й ряд	2-й ряд
1,6	—	6,3	—	25	—
2,0	1,8	8	7,1	—	28
2,5	2,25	10	9	31,5	—
3,15	2,8	12,5	11,2	40	35,5
4	3,55	16	14	50	45
5	4,5	20	18	63	56
	5,6	—	22,4	—	—

Таблица 35.13

Геометрические параметры передачи с зацеплением Новикова

Параметр, обозначение	Расчетные формулы
1	2
Нормальный модуль $m_n$	$m_n = p_n / \pi$ ; $m_n = (d/z) \cos \beta$ ; $m_n = m_t \cos \beta$
Торцевой модуль $m_t$	$m_t = p_t / \pi$ ; $m_t = (d/z)$ ; $m_t = m_n / \cos \beta$
Диаметр вершин зубьев $d_a$	$d_a = m_t z + 1,8 m_n$
Делительный диаметр $d$	$d = m_t z$
Основной диаметр $d_b$	$d_b = m_t z \cos \alpha$
Диаметр впадин зубьев $d_f$	$d_f = m_t z - 2,1 m_n$

1	2
Нормальный шаг $p_n$	$p_n = m_n \pi$
Торцевой шаг $p_t$	$p_t = m_t \pi$
Осевой шаг $p_x$	$p_x = m_n \pi / \sin \beta$
Окружная толщина зубьев $s$	$s = 1,53 m_n$
Окружная ширина впадин зубьев $e$	$e = 1,6 m_n$
Высота зуба $h$	$h = 1,95 m_n$
Высота головки зуба $h_a$	$h_a = 0,9 m_n$
Высота ножки зуба $h_f$	$h_f = 1,05 m_n$
Радиальный зазор $c$	$c = 0,15 m_n$
Межосевое расстояние $a_w$	$a_w = m_t z_\Sigma / 2 \cos \beta = m_n z_\Sigma / 2$
Длина зуба $b$	$b = m_n \Psi_m (\Psi_m = 10 \dots 20)$
Ширина венца $b$	$b_w = k p_x + \Delta b$

*Примечание.*  $\beta$  — угол наклона зубьев;  $\beta = 10 \dots 30^\circ$ ;  $k$  — целое число осевых шагов  $p_x$  в ширине венца;  $\Delta b$  — часть ширины венца больше целого числа осевых шагов (ширину венца рекомендуется выбирать с учетом выполнения условия  $b \geq 1,25 p_x$ );  $z_\Sigma = z_1 + z_2$  — суммарное число зубьев.

Условия контакта в передачах с зацеплением Новикова отличаются от условий контакта по Герцу—Беляеву (малая разность  $r_1$  и  $r_2$ , большие значения  $\rho_1$  и  $\rho_2$ ). Контактные напряжения приближаются к напряжениям смятия. Расчет передач Новикова по контактным напряжениям применяют условно и ведут аналогично расчету с эвольвентным зацеплением.

В проектном расчете используют формулу (35.35), но расчетные коэффициенты принимают с учетом особенности зацепления Новикова:

$$a_w = K_a (u + 1) \sqrt[3]{M_2 K_{H\beta} / (\psi_{ba} u^2 [\sigma_H]^2)}, \quad (35.49)$$

где  $a_w$  — межосевое расстояние, мм;

$K_a$  — вспомогательный коэффициент ( $K_a = 33,6 \text{ МПа}^{1/3}$ );  $K_{H\beta} = 1,05 \dots 1,3$  — коэффициент, учитывающий распределения нагрузки по длине зуба;

$\psi_{ba}$  — коэффициент длины зуба (ширины венца);

$[\sigma_H]$  — допускаемое контактное напряжение, выбираемое по аналогии с эвольвентной передачей.

**Расчет зубьев на излом.** Для передач с зацеплением Новикова проверочный расчет на предупреждение излома зубьев проводят исходя из условия

$$n_{\text{и}} \geq [n_{\text{и}}], \quad (35.50)$$

где  $n_{\text{и}}$  — расчетный коэффициент запаса прочности зубьев на излом;

$[n_{\text{и}}] \geq 1,5$  — допускаемый коэффициент запаса прочности зубьев на излом.

Коэффициент запаса прочности для выпуклых зубьев шестерни

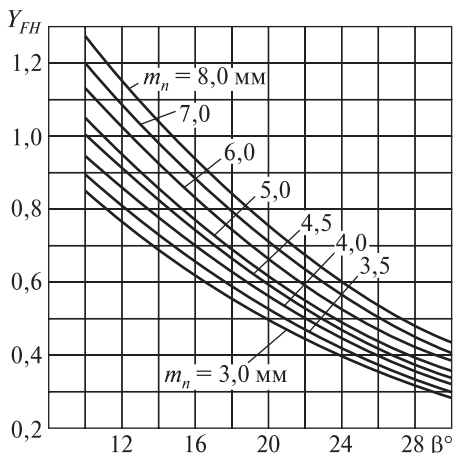


Рис. 35.17. Зависимость коэффициента формы зуба от угла наклона зубьев для зацепления Новикова

$$n_{\text{и}} = \sigma_{\text{в}} / \sigma_{\text{и}} = (\sigma_{\text{в}} Y_{\text{FH}} z_1 m_n^3 K_{\text{F}\beta}) / (2 M_{\text{p}} K_{\text{и}} \cos \beta), \quad (35.51)$$

где  $M_{\text{p}}$  — расчетный момент, Н·мм;

$K_{\text{F}\beta}$  — коэффициент повышения прочности для косых зубьев;

$K_{\text{и}}$  — коэффициент изнашивания (1,25...1,8 — для открытых передач; 1 — для закрытых передач);

$n_{\text{и}}$  — расчетный коэффициент запаса прочности зубьев на излом;

$m_n$  — нормативный модуль, мм;

$\sigma_{\text{в}}$  — предел прочности материала сердцевины зуба при растяжении, МПа;

$Y_{\text{FH}}$  — коэффициент формы зуба для зацепления Новикова (определяется по графику, рис. 35.17);

$z_1$  — число зубьев шестерни;

$\beta$  — угол наклона зубьев.

При необходимости прочность зубьев во избежание их излома может быть повышена увеличением нормального модуля  $m_n$ . Для сохранения в этом случае габаритных размеров зубьев следует уменьшить их число или подобрать улучшенную марки стали для их изготовления.

## 35.11. Планетарные зубчатые передачи

Передачи, имеющие зубчатые или фрикционные колеса с перемещающимися осями, называют *планетарными*. Наиболее распро-

странена зубчатая однорядная планетарная передача (рис. 35.18). Она состоит из центрального колеса  $1$  с наружными зубьями, неподвижного (центрального) колеса  $2$  с внутренними зубьями и водила  $h$ , на котором закреплены оси планетарных колес  $g$  (или сателлитов).

Водило вместе с сателлитами вращается вокруг центральной оси, а сателлиты обкатываются по центральному колесу и вращаются вокруг своих осей, совершая движения, подобные движению планет. При неподвижном колесе  $2$  движение передается от колеса  $1$  к водилу  $h$  или наоборот. Планетарную передачу, совершаемую подвижными звеньями (оба колеса и водило), называют *дифференциалом*. С помощью дифференциала одно движение можно разложить на два или два движения сложить в одно: от колеса  $2$  движение можно передавать одновременно колесу  $1$  и водилу  $h$  или от колес  $1$  и  $2$  к водилу  $h$ .

Основное достоинство планетарных передач — широкие кинематические возможности, позволяющие использовать передачу в качестве редуктора коробки скоростей, передаточное число в которой изменяется путем поочередного торможения различных звеньев, и как дифференциальный механизм. Планетарный принцип позволяет получать большие передаточные числа (до тысячи и больше) без применения многоступенчатых передач.

Эти передачи компактные и имеют малую массу. Переход от простых передач к планетарным позволяет во многих случаях сни-

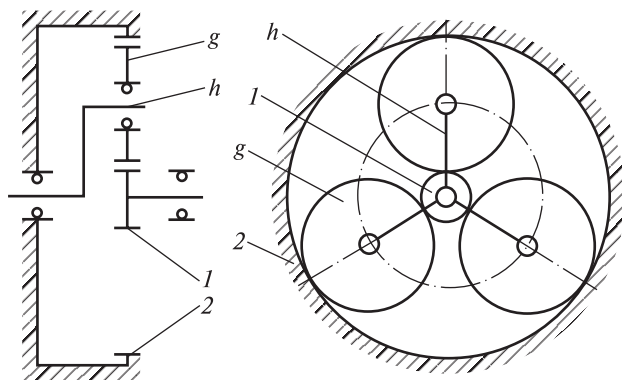


Рис. 35.18. Элементы планетарной передачи

зить их массу в 4 раза и более. Сателлиты в планетарной передаче расположены симметрично, а это снижает нагрузки на опоры (силы в передаче взаимно уравновешиваются), что приводит к снижению потерь и упрощает конструкцию опор. Эти передачи работают с меньшим шумом, чем обычные зубчатые.

*Передаточное отношение.* Для определения передаточного отношения планетарной передачи используется метод Виллиса — метод останова водила.

Введем понятие *обращенного механизма* — это обычная непланетарная передача, в которой геометрические оси всех колес неподвижны, а сателлиты при этом становятся промежуточными колесами, не влияющими на передаточное отношение механизма.

Передаточное отношение для обращенного механизма, планетарной передачи

$$u = (\omega_1 - \omega_h)/(\omega_2 - \omega_h) = -(z_1/z_2), \quad (35.52)$$

где  $\omega_1 - \omega_h$  и  $\omega_2 - \omega_h$  — угловые скорости колес 1 и 2 относительно водила  $h$ ;  $z_1$  и  $z_2$  — числа зубьев этих колес.

Для реальной планетарной передачи (колесо 2 закреплено неподвижно, колесо 1 — ведущее, водило  $h$  ведомое) при  $\omega_2 = 0$  из формулы (35.52) получим

$$(\omega_1 - \omega_h)/(-\omega_h) = -(z_1/z_2); \quad -(\omega_1/\omega_h) + 1 = -(z_1/z_2),$$

или

$$u = \omega_1/\omega_h = 1 + (z_1/z_2). \quad (35.53)$$

Расчет на контактную прочность зубьев планетарных передач проводится по аналогии с расчетом обыкновенных зубчатых передач отдельно для каждого зацепления (рис. 35.18): пара колес 1 —  $g$  (внешнее зацепление) и  $g$  — 2 — (внутреннее). Для таких передач достаточно рассчитать только внешнее зацепление.

Проектный расчет планетарной передачи на контактную усталость активных поверхностей зубьев проводится по формуле

$$d_1 = K_d \sqrt[3]{M_1 K_{H\beta} (u_{1-2} \pm 1) \Omega / ((\psi_{bd})_i u_{1-2} [\sigma_H]^2)}, \quad (35.54)$$

где  $d_1$  — делительный диаметр ведущего звена (шестерни), мм;

$K_d = 78 \text{ МПа}^{1/3}$  — вспомогательный коэффициент (рассматриваются стальные прямозубые колеса);

$M_1$  — вращающий момент на шестерне, Н·мм;

$K_{H\beta}$  — коэффициент нагрузки (табл. 11.2);  
 $\Omega = 1, 1, \dots, 1, 3$  — коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки среди сателлитов;  
 $u_{1-2}$  — передаточное отношение;  
 $[\Psi_{bd}]_i = 0,75$  — коэффициент длины зуба (ширины колеса);  
 $[\sigma_H]$  — допускаемое контактное напряжение.

При расчете планетарных передач выбор числа зубьев колес зависит не только от передаточного отношения  $i$ , но и от условий сборки передач. При этом сумма зубьев центральных колес должна быть кратной числу сателлитов (лучше три).

### 35.12. Волновые зубчатые передачи

Волновые передачи основаны на принципе передачи вращательного движения за счет бегущей волновой деформации одного из зубчатых колес. Кинематически эти передачи представляют собой разновидность планетарной передачи с одним гибким зубчатым колесом. На рис. 35.19, *а* изображены основные элементы волновой передачи: неподвижное колесо 1 с внутренними зубьями, вращающееся упругое колесо 2 с наружными зубьями и водило  $h$ . Неподвижное колесо закрепляется в корпусе и выполняется в виде обычного зубчатого колеса с внутренним зацеплением. Гибкое зубчатое колесо имеет форму стакана с легко деформирующейся тонкой стенкой: в утолщенной части (левой) нарезаются зубья, правая часть имеет форму вала. Водило состоит из овального кулачка и специального подшипника. Гибкое колесо деформируется так, что по оси овала I-I зубья зацепляются на полную рабочую высоту; по оси II-II зубья не зацепляются. Передача движения осуществляется за счет деформирования зубчатого венца гибкого колеса. При вращении водила волна деформации бежит по окружности гибкого зубчатого венца; при этом венец обкатывается по неподвижному жесткому колесу в обратном направлении, вращая стакан и вал. Поэтому передача и называется *волновой*, а водило — *волновым генератором*.

При вращении водила овальной формы образуются две волны. Такую передачу называют двухволновой. Бывают трехволновые передачи, на рис. 35.19, *б* показана схема такой передачи.

Волновые передачи обладают большой нагрузочной способностью (в зацеплении находится большое число пар зубьев) и



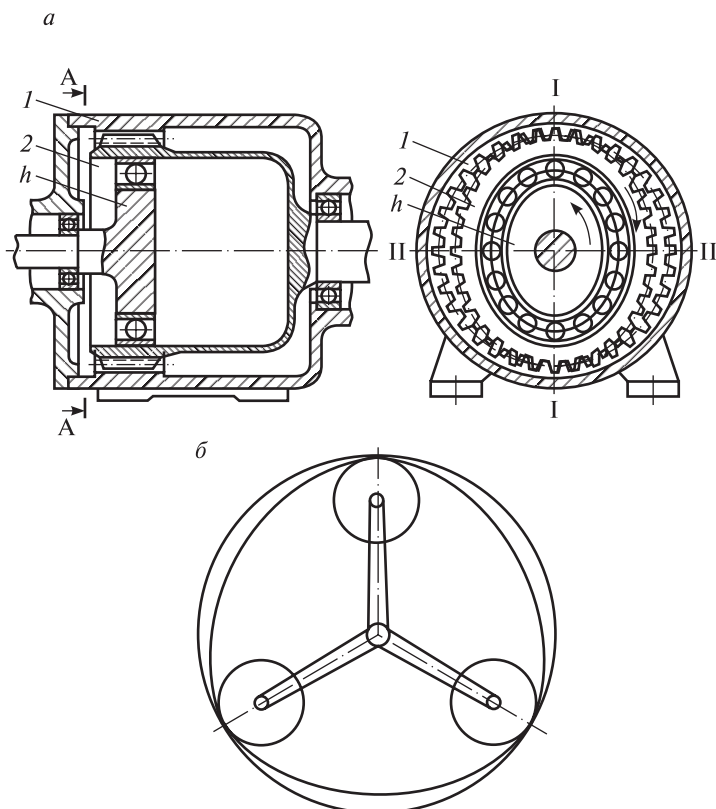


Рис. 35.19. Волновые передачи:

*а* — основные элементы волной передачи; *б* — трехволновая передача

высоким передаточным отношением ( $u = 300$  для одной ступени) при сравнительно малых габаритах. Это является основным достоинством указанных передач. Передача может работать, находясь в герметизированном корпусе, что очень важно для использования волновых передач в транспортном комплексе.

Недостаток волновой передачи: сложность изготовления гибкого колеса и волнового генератора; возможность использования этих передач только при сравнительно невысокой угловой скорости вала генератора.

Передаточное отношение волновых передач определяется методом остановки водила (метод Виллиса), по рис. 35.19, *а* передаточное отношение:

при неподвижном жестком колесе

$$u = \omega_h / \omega_2 = -z_2 / (z_1 - z_2) = -z_2 / C. \quad (35.55)$$

где  $\omega_h$  и  $\omega_2$  — угловые скорости волнового генератора и гибкого колеса;

$z_1, z_2$  — числа зубьев жесткого и гибкого колес;

$C$  — число волн;

при неподвижном упругом колесе

$$u = \omega_h / \omega_1 = z_1 (z_1 - z_2) = z_1 / C. \quad (35.56)$$

В формуле (35.55) знак «минус» указывает на разные направления вращения генератора и гибкого колеса.

*Расчет волновых передач.* В процессе работы этой передачи наблюдаются повышенные изнашивание зубьев, разрушение гибких колес и других деталей генератора волн. Расчет на прочность ведется по менее долговечному элементу передачи — гибкому колесу, которое испытывает переменные напряжения изгиба и кручения.

Внутренний диаметр гибкого колеса  $d$  рекомендуется определять по следующей формуле проектного расчета:

$$d = \sqrt[3]{0,456 M_2 / ([\sigma_{-1} / (K_\delta n_\sigma) - 3 E Y_z \psi_{sd} / u] \psi_{bd} \psi_{sd})}, \quad (35.57)$$

где  $M_2$  — вращающий момент на тихоходном валу, Н·мм;

$\sigma_{-1}$  — предел выносливости материала;

$K_\delta = 1,8 \dots 2,0$  — коэффициент концентрации напряжений;

$n_\sigma = 1,3 \dots 1,7$  — коэффициент запаса прочности;

$E$  — модуль упругости стали;

$Y_z = 1,2 \dots 1,5$  — коэффициент влияния зубьев;

$\psi_{sd} = \delta / d_1 = 0,012 \dots 0,014$  — коэффициент толщины зубчатого венца гибкого колеса;

$\psi_{bd} = 0,15 \dots 0,2$  — коэффициент длины зуба (ширины зубчатого венца).

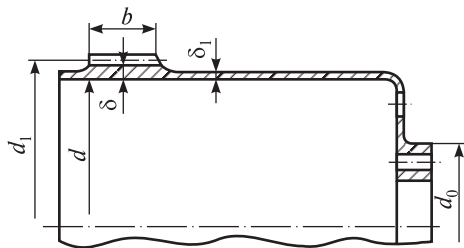


Рис. 35.20. К расчету гибкого колеса

Определив диаметр гибкого колеса  $d$ , находят ширину зубчатого венца  $b$  и толщину стенки зубчатого венца  $\delta$ , после чего рассчитывают  $z$  и другие параметры зубчатого венца (рис. 35.20). Модуль зубчатого зацепления вычисляют по формуле  $m \approx (d_{fg} + 2,5) / (2u)$ , его значение

округляют до ближайшего большего стандартного значения: 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 1,0. Здесь  $d_{fg} \approx (d + 2\delta)$  — диаметр окружности впадин зубчатого венца гибкого колеса. При расчете зацепления принимают:  $\delta \approx (0,005...0,015)d$ ;  $d_0 \approx 0,5d$ ;  $l \geq (0,8...1)d_1$ . Толщину  $\delta_1$  определяют расчетом на прочность.

Материалы, применяемые для изготовления гибких колес — стали 40ХНМА, 30ХГСА; 30ХГС; термическая обработка — улучшение HRC 26—32. Подробный расчет волновых передач рассматривается в работах специальной литературе.

## Глава 36. ВАЛЫ И ОСИ

### 36.1. Назначение, конструкции и материалы валов и осей

*Валом называют* деталь машины (как правило, гладкую или ступенчатой цилиндрической формы, рис. 36.1, а), предназначенную для поддержания установленных на ней шкивов, зубчатых колес и для передачи вращающего момента.

При работе вал испытывает изгиб и кручение, а в отдельных случаях валы могут испытывать, помимо изгиба и кручения, деформацию растяжения (сжатия).

Некоторые валы не поддерживают вращающиеся детали и работают только на кручение. Валы, передающие лишь вращающий момент от одной детали к другой, называют *торсионными*.

*Осью называют* деталь машины, предназначенная только для поддержания находящихся на ней деталей (рис. 36.1, б). В отличие от вала, ось не передает вращающий момент и работает только на изгиб. В машинах оси могут быть неподвижными или же

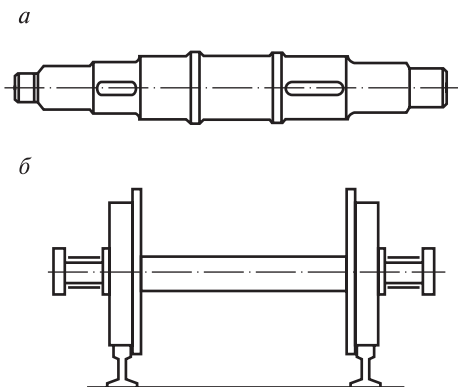


Рис. 36.1. Вал и ось машин:

а — вал ступенчатой цилиндрической формы; б — ось колесной пары локомотива (вагона)

могут вращаться вместе с находящимися на них деталями (подвижные оси).

*Классификация валов и осей.* По назначению валы делят на валы передач (на них устанавливают детали передач) и коренные валы (на них устанавливают дополнительно еще и рабочие органы машины).

По геометрической форме валы делят на прямые (рис. 36.1, *а*), коленчатые (рис. 36.2, *а*), кривошипные (рис. 36.2, *б*), телескопические (рис. 36.2, *в*), гибкие (рис. 36.2, *г*), карданные (рис. 36.2, *д*).

*Прямые валы и оси.* Конструктивная форма вала зависит от нагрузок на него и от способа соединения вала с насаживаемыми деталями. При вращающих моментах и повышенных требованиях к центрированию применяют шлицевые и шпоночные соединения (см. гл. 28).

Кривошипные и коленчатые валы используют для преобразования возвратно-поступательного движения во вращательное (поршневые двигатели) или наоборот (компрессоры).

Гибкие валы служат для передачи вращающего момента между узлами машин, меняющими свое положение в работе (транспортно-строительные механизмы и т.п.). Концы гибкого вала со-

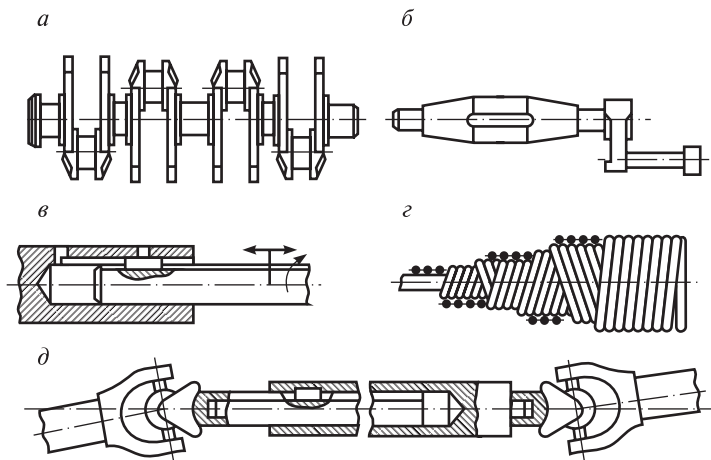


Рис. 36.2. Геометрические формы валов:

*а* — коленчатая; *б* — кривошипная; *в* — телескопическая; *г* — гибкая; *д* — карданная

единяют пайкой со специальной арматурой, имеющей резьбовые хвостовики. Эти хвостовики используют для соединения гибкого вала с жестким.

Телескопические соединения применяют при необходимости осевого перемещения одного вала относительно другого.

Карданное сочленение — это шарнирный механизм, позволяющий передавать вращение между соединяемыми им валами. Оси валов могут при этом пересекаться под переменным углом. Такие валы (оси) широко используют в транспортном машиностроении.

По типу сечения валы и оси бывают сплошные, полые и комбинированные (см. рис. 36.2, в).

*Элементы конструкции.* Участки 1 осей и валов (рис. 36.3, а), которыми они опираются на подшипники при восприятии осевых нагрузок, называют *пятами*. Опорами для пят служат подпятники 2.

Посадочные поверхности валов и осей под ступицы насаживаемых деталей выполняют цилиндрическими (рис. 36.3, б), коническими (рис. 36.3, в) или шаровыми (рис. 36.3, г). Широкое распространение на транспорте получили цилиндрические и конические цапфы; шаровые цапфы применяют редко.

*Переходные участки (галтели)* между ступенями валов и осей выполняют для снижения концентрации напряжений и увеличения долговечности. Конструктивные разновидности переходных участков между ступенями валов и осей следующие: канавка со скруглением для выхода шлифовального круга (рис. 36.4, а); галтель постоянного радиуса (рис. 36.4, б), галтель переменного радиуса (рис. 36.4, в). Торцы валов и осей делают с фасками, т.е. слегка обтачивают их на конце (рис. 36.4, а, г).

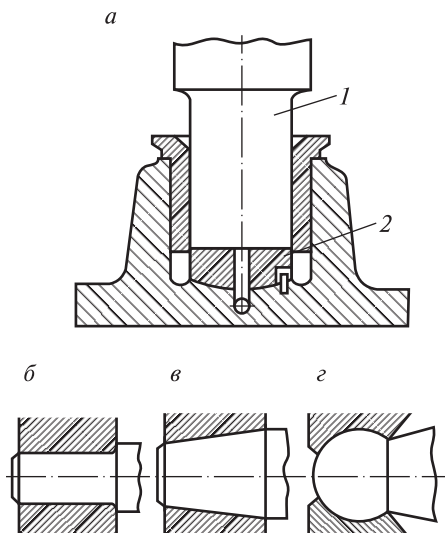


Рис. 36.3. Элементы конструкции осей и валов:

а — участок оси или вала, опирающийся на подпятник; б — цилиндрическая посадочная поверхность; в — то же коническая; г — то же шаровая

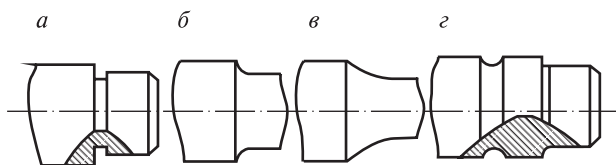


Рис. 36.4. Конструктивные разновидности переходных участков валов и осей:

*а* — канавка с округлением; *б* — галтель постоянного радиуса; *в* — галтель переменного радиуса; *г* — торцы валов, осей с фасками

*Материалы валов и осей* должны быть прочными, хорошо обрабатываться и иметь высокий модуль упругости. Чаще всего применяют углеродистые и легированные стали (прокат, поковка и, реже, — стальные отливки), а также высокопрочный модифицированный чугун. Без термической обработки применяют стали 35 и 40, Ст5, Ст6, 40Х, 40ХН, 30ХН3А, с термической обработкой — стали 45, 50 и др. Для неответственных мало нагруженных конструкций валов и осей используют углеродистые стали без термической обработки. Ответственные тяжело нагруженные валы изготавливают из легированной стали 40ХНМА, 25ХП и др.

В транспортном машиностроении коленчатые валы двигателей изготавливают также из модифицированного или высококачественного чугуна.

В процессе работы валы и оси испытывают нагрузки, постоянные или переменные по величине и направлению. Прочность валов и осей определяется величиной и характером напряжений, возникающих в них под действием нагрузок. Для обеспечения работоспособности валы и оси должны удовлетворять условиям прочности и жесткости.

## 36.2. Расчет и проектирование валов и осей на прочность

Основными расчетными нагрузками являются изгибающий  $M_{\text{и}}$  и крутящий  $M_{\text{к}}$  моменты. Влияние сжимающих или растягивающих сил обычно мало и они, как правило, в расчетах не учитываются.

*Проектировочный расчет.* Проектировочный расчет вала выполняют как условный расчет только на кручение для ориентировочного определения посадочных диаметров. В этих расчетах опре-

деляют диаметр выходного конца вала, который испытывает одно кручение:

$$d \geq \sqrt[3]{M_{\kappa} / (0,2[\tau_{\kappa}])}, \quad (36.1)$$

где  $M_{\kappa}$  — крутящий момент в расчетном сечении;  
 $[\tau_{\kappa}]$  — допускаемое напряжение при кручении.

Полученное значение  $d$  округляют до ближайшего большего размера из чисел ряда (см. табл. 25.1). По выбранному значению  $d$  с учетом удобства сборки и фиксации деталей в осевом направлении назначают остальные стандартные посадочные диаметры вала. Рекомендуется принимать такую разность диаметров ступеней вала, чтобы при сборке можно было насадить деталь, не вынимая шпонку, установленную в пазу ступени меньшего диаметра.

Диаметры вала под подшипники качения принимают с учетом размещения на них подшипников заданной долговечности и в соответствии со стандартными диаметрами их внутренних колец, которые должны оканчиваться на числа 0 или 5. Если выходной конец ведущего вала соединяется муфтой с валом электродвигателя диаметром  $d_3$ , то рекомендуется принимать  $d = (0,8 \div 1,0)d_3$ . Окончательно размеры вала определяют после подбора подшипников, когда выявятся необходимые размеры цапф. Как было установлено выше, оси, не испытывающие кручения, *рассчитываются только на изгиб*. По конструкции узла составляют расчетную схему, определяют силы, действующие на ось, строят эпюры изгибающих моментов. Диаметр оси определяют по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{M_{\text{и}} / (0,1[\sigma_{\text{и}}])}, \quad (36.2)$$

где  $M_{\text{и}}$  — максимальный изгибающий момент;  
 $[\sigma_{\text{и}}]$  — допускаемое напряжение изгиба.

Участок вала, работающий на совместное действие кручения и изгиба, рассчитывают по эквивалентному моменту:

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\kappa}^2}. \quad (36.3)$$

Тогда искомый диаметр

$$d \geq \sqrt[3]{M_{\text{экв}} / (0,1[\sigma_{\text{и}}])}. \quad (36.4)$$

Получив расчетным путем размеры, с учетом технологии изготовления проектируют конструктивную форму вала.

После предварительных расчетов и конструктивного оформления валов (осей), имеющих ряд ступеней, канавок кольцевых и шпоночных, выполняют уточненный расчет валов (осей) на выносливость (усталостную прочность).

Эквивалентное напряжение в точке нагруженного тела

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_{\text{и}}^2 + 3\tau_{\text{к}}^2}, \quad (36.5)$$

где  $\sigma_{\text{и}}$  и  $\tau_{\text{к}}$  — соответственно наибольшее напряжение от изгиба вала моментом  $M_{\text{и}}$  и кручения  $M_{\text{к}}$ .

Запас прочности по пределу текучести

$$n_{\text{Т}} = \sigma_{\text{Т}}/\sigma_{\text{экв}}. \quad (36.6)$$

Обычно принимают  $n_{\text{Т}} = 1,2 \dots 1,8$ .

Сечение, в котором следует определить запас  $n_{\text{Т}}$ , находят после построения эпюр изгибающих и крутящих моментов. Если нагрузки действуют на вал в разных плоскостях, то сначала силы проектируют на координатные оси и строят эпюры моментов в координатных плоскостях. Далее геометрически суммируют изгибающие моменты, очерчивая эпюру прямыми линиями, что идет в запас прочности.

Если угол между плоскостями действия сил не превосходит  $30^\circ$ , то для простоты считают, что все силы действуют в одной плоскости.

Расчет на сопротивление усталости также ведут в форме определения запаса прочности. Расчетный коэффициент запаса прочности

$$n = n_{\sigma} \cdot n_{\tau} / \sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}, \quad (36.7)$$

где  $n_{\sigma}$  и  $n_{\tau}$  — коэффициенты запаса прочности по нормальным и касательным напряжениям.

Эти коэффициенты определяются по формулам:

$$\begin{aligned} n_{\sigma} &= \sigma_{-1} / ((K_{\sigma} / \varepsilon_{\sigma}) \sigma_a + \Psi_{\sigma} \sigma_m); \\ n_{\tau} &= \tau_{-1} / ((K_{\tau} / \varepsilon_{\tau}) \tau_a + \Psi_{\tau} \tau_m), \end{aligned} \quad (36.8)$$

где  $\sigma_{-1}$ ,  $\tau_{-1}$  — пределы выносливости при изгибе и кручении для симметричного цикла;



$K_{\sigma}$ ,  $K_{\tau}$  — эффективные коэффициенты концентрации напряжений при изгибе и кручении (табл. 36.1);

$\varepsilon_{\sigma}$ ,  $\varepsilon_{\tau}$  — масштабные факторы соответственно для нормальных и касательных напряжений при изгибе и кручении (табл. 36.2);

$\Psi_{\sigma}$ ,  $\Psi_{\tau}$  — коэффициенты чувствительности материала к асимметрии цикла. Для среднеуглеродистых сталей обычно принимают  $\Psi_{\sigma} = 0,10$ ;  $\Psi_{\tau} = 0,05$ ; для легированных сталей  $\Psi_{\sigma} = 0,30$ ;  $\Psi_{\tau} = 0,10$ .

Таблица 36.1

Значения коэффициентов  $K_{\sigma}$  и  $K_{\tau}$

Концентратор напряжения	$K_{\sigma}$		$K_{\tau}$	
	для стали с $\sigma_B$ , МПа			
	до 700	св. 1000	до 700	св. 1000
Галтель: $h/r = 1$ и $r/d = 0,02$	1,49	1,60	1,37	1,39
$r/d = 0,05$	1,69	1,83	1,46	1,51
$r/d = 0,10$	1,55	1,72	1,42	1,46
Шпоночная канавка, выполненная торцевой фрезой	1,89	2,26	1,71	2,22
Прессовая посадка при $p \geq 20$ МПа	2,4	3,6	1,8	2,5
Резьба	2,2	2,61	1,0	1,0

Таблица 36.2

Значения коэффициентов  $\varepsilon_{\sigma}$  и  $\varepsilon_{\tau}$

Наименьший из примыкающих к зоне концентрации диаметр вала $d$ , мм	Углеродистые стали		Легированные стали	
	$\varepsilon_{\sigma}$	$\varepsilon_{\tau}$	$\varepsilon_{\sigma}$	$\varepsilon_{\tau}$
Св. 20 до 30	0,91	0,89	0,83	0,89
Св. 30 до 40	0,88	0,81	0,77	0,81
Св. 40 до 50	0,84	0,78	0,73	0,78

Расчет осей на усталостную прочность ведут аналогично расчету валов при  $M_K = 0$ .

### 36.3. Расчет вала (осей) на жесткость

Жесткость валов и осей оценивается величиной прогиба в местах установки деталей или углов закручивания сечений

Упругие перемещения валов оказывают неблагоприятное влияние на работу связанных с ними соединений (шлицевых, прессовых

и др.), подшипников, зубчатых колес и других деталей (узлов): увеличивают концентрацию контактных напряжений и износ деталей, снижают сопротивление усталости деталей и соединений, понижают точность механизмов и т.п.

Большие перемещения сечений вала от изгиба могут привести к выходу из строя конструкции вследствие заклинивания подшипников. Жесткость на изгиб и кручение валов существенно влияет на частотные характеристики системы при возникновении колебаний.

При проектировании валов следует проверять прогибы и углы поворота сечений:

$$f \leq [f] \text{ и } [\theta] \geq \theta, \quad (36.9)$$

где  $f$  и  $[f]$  — действительный и допускаемый прогибы вала (оси);  
 $\theta$  и  $[\theta]$  — действительный и допускаемый углы поворота сечений.

Их значения приведены в табл. 36.3.

Таблица 36.3

**Значения допускаемых прогибов и углов поворота сечений вала**

Прогиб, мм: для конструкций вала общего назначения ( $l$ — длина вала) для конструкции в месте установки зубчатых колес для конструкций валов червяков	$(0,0002...0,003)l$ $(0,01...0,03)t$ $0,005...0,01)t$ (здесь $t$ — модуль зуба)
Угол, рад: для конструкций с радиальными шарикоподшипниками для конструкций с подшипником скольжения для конструкций со сферическим шарикоподшипником	0,01 0,001 0,05

Допускаемые величины перемещений (прогибов и углов поворота) сечений вала зависят от требований, предъявляемых к конструкции, и особенностей ее работы.

## Глава 37. ПОДШИПНИКИ СКОЛЬЖЕНИЯ

### 37.1. Назначение, типы и область применения

Подшипники являются опорами валов и вращающихся осей. Они воспринимают нагрузки, приложенные к валу (оси), и передают их на корпус машины. Область применения подшипников скольжения разнообразна. Их применяют в высокоскоростных машинах, когда долговечность подшипников качения резко сокращается; в валах, воспринимающих ударные и вибрационные нагрузки; при близко расположенных валах, когда требуются малые радиальные размеры подшипников; в тихоходных малоответственных механизмах и машинах.

В *подшипниках скольжения* поверхность цапфы вала (оси) скользит по поверхности подшипника. При этом возникает трение скольжения, которое приводит к повышенному износу и нагреву. Для уменьшения трения между поверхностями скольжения вводят смазку.

Конструкции подшипников скольжения весьма разнообразны. Во многом они зависят от конструкции машины, в которой устанавливается подшипник. По воспринимаемой нагрузке различают: а) радиальные; б) упорные, воспринимающие осевые силы; в) радиально-упорные, воспринимающие радиальные и осевые нагрузки; обычно их функции выполняют упорные подшипники, совмещенные с радиальными.

*Цапфу*, передающую радиальную нагрузку, называют *шипом* при расположении ее в конце вала, и *шейкой*, если она находится в середине вала. Цапфу, передающую осевую нагрузку, называют *пятой*, а подшипник — *подпятником*.

Форма рабочей поверхности подшипников и цапф может быть не только цилиндрической, но и конической, и шаровой.

В большинстве случаев подшипники скольжения валов устанавливают в специальные корпуса, которые бывают двух видов: неразъемные (рис. 37.1) и разъемные (рис. 37.2). В *неразъемных* корпусах подшипников вкладыш 1 (см. рис. 37.1) обычно представляет собой втулку из антифрикционного материала, запрессованную в корпус. Они просты по конструкции и дешевы, однако имеют крайне ограниченное распространение, так как не дают возможности

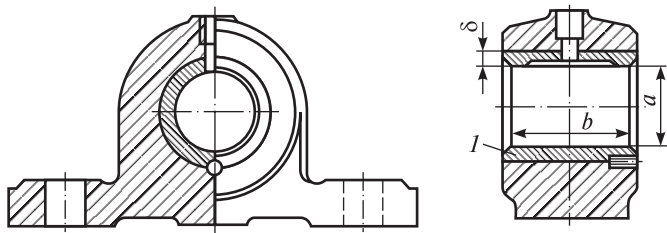


Рис. 37.1. Неразъемный подшипник скольжения

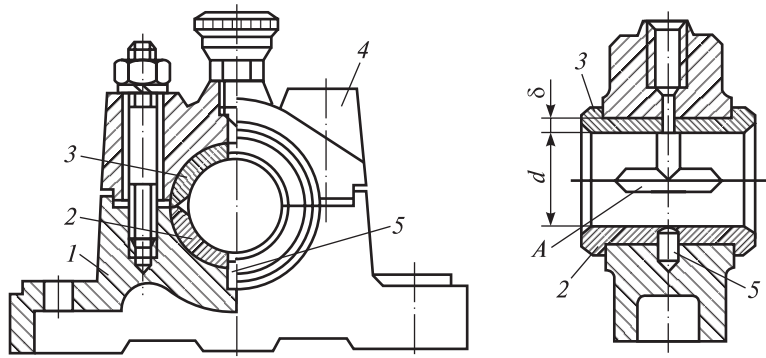


Рис. 37.2. Разъемный подшипник скольжения

компенсировать износ втулки. Применяют такие подшипники для опор тихоходных валов с небольшой нагрузкой (транспортёры).

*Разъемный корпус* (см. рис. 37.2) состоит из основания 1 и крышки 4, соединенных винтами, шпильками или болтами. Для повышения точности установки крышки стык ее с корпусом выполняют с уступом, имеющим два вкладыша 2 и 3 (втулка, разрезанная по диаметру), которые устанавливают в корпус и в крышку и предохраняют от проворачивания штифтом 5. Разъем облегчает монтаж или даже является необходимым условием сборки, позволяя регулировать зазор в подшипнике либо ремонтировать подшипник повторной расточкой вкладыша при износе. Корпуса подшипников могут быть выполнены либо заодно с какой-нибудь деталью машины — рамой, кожухом, шатуном, либо в виде отдельного изделия. Материалом для корпусов служит серый чугун, обладающий

хорошими литейными свойствами. Такие подшипники получили достаточное применение на железнодорожном транспорте.

*Встроенные подшипники* устанавливают непосредственно в корпусе машины. Такое устройство характерно для подшипников некоторых редукторов и металлорежущих станков, электрических машин и др.

*Подшипники с самоустанавливающимися вкладышами.* Для компенсации непараллельности осей вала и расточки в корпусе, вызванных погрешностями и деформациями, неточностью монтажа при большой длине цапфы, используют вкладыши со сферическими выступами, самоустанавливающиеся благодаря сопряжению с корпусом по сферической поверхности, обеспечивая тем самым равномерное распределение нагрузки в подшипнике.

*Вкладыш* — основная деталь подшипника скольжения, непосредственно воспринимающая передаваемую цапфой нагрузку. Наиболее просты по конструкции неразъемные вкладыши 1 (см. рис. 37.1) — втулки, изготовленные из антифрикционного чугуна или бронзы. Разъемные вкладыши (см. рис. 37.2) изготавливают из двух частей со стыком в плоскости разреза подшипника.

*Опорные подшипники* (подпятники) служат для поддержания вращающихся осей и валов при действии нагрузки, направленной вдоль оси вращения (т.е. при осевой нагрузке). Они могут быть с пятой плоской (рис. 37.3, а), с кольцевой пятой (рис. 37.3, б) или гребенчатой (рис. 37.3, в). Подпятник (рис. 37.3, д) состоит из стального или чугунного корпуса 1, крышки 2 и опорного вкладыша 3. Для возможности самоустановки опорный вкладыш может опираться на сферическую поверхность 4. Опорные вкладыши изготавливают из тех же антифрикционных материалов, что и вкладыши радиальных подшипников.

*Достоинства* подшипников скольжения: сохраняют работоспособность при очень высоких угловых скоростях валов; смягчают толчки, удары и вибрации вследствие демпфирующего действия масляного слоя; обеспечивают установку валов с высокой точностью; дают возможность изготавливать разъемные конструкции; имеют минимальные радиальные размеры; допускают работу с загрязненной смазкой; обеспечивают бесшумность работы.

*Недостатки* подшипников скольжения: сравнительно большие потери на трение, особенно при пуске; необходимость постоянного

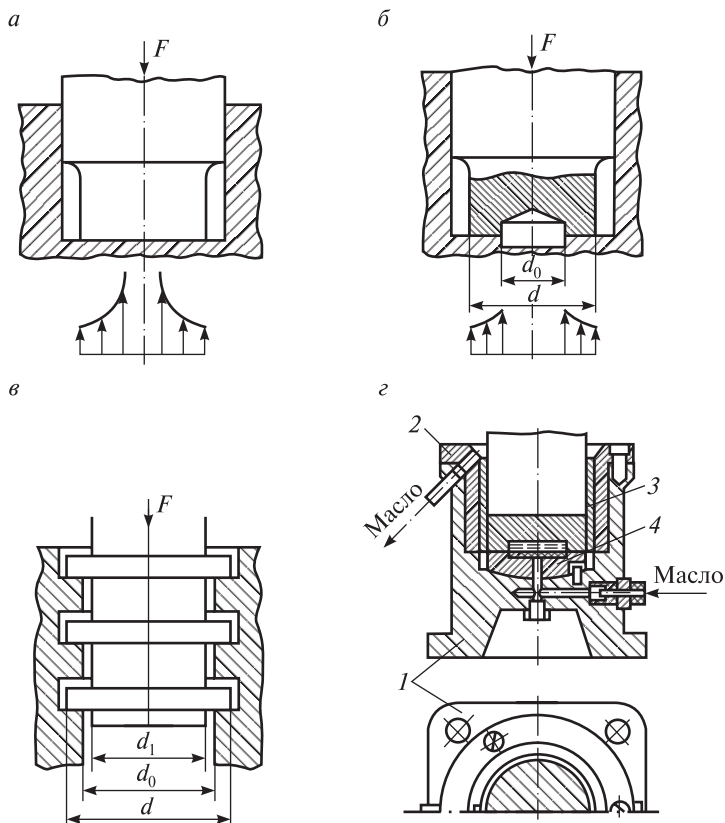


Рис. 37.3. Виды подпятников:

*а* — с плоской пятой; *б* — с кольцевой пятой; *в* — с гребенчатой пятой;  
*г* — составные части подпятника

ухода вследствие высоких требований к смазке и опасности перегрева; значительный расход смазки.

## 37.2. Виды разрушений и повреждений

Работа подшипников скольжения сопровождается, главным образом, *абразивным изнашиванием вкладышей и заеданием*. В случае действия кратковременных перегрузок ударного характера вкладыши подшипников могут хрупко разрушаться. Такому разрушению подвержены малопрочные антифрикционные материалы, такие как

баббиты и некоторые пластмассы. Усталостное выкрашивание поверхности вкладыша при действии переменных нагрузок (двигатели локомотивов, автомотрис и т.п.) наблюдается сравнительно редко.

*Абразивное изнашивание* вкладышей происходит вследствие попаданий на трущиеся поверхности вместе со смазочным материалом и абразивных частиц (пыли грязи) и неизбежного трения при пуске и остановке. Если износ превышает норму, вкладыш заменяют.

*Заедание* происходит при перегреве подшипника. Вследствие трения нагреваются цапфа, вкладыш и масло. С повышением температуры понижается смазочная способность масла, которая связана с прочностью тонкой масляной пленки на поверхностях трения. При повышении температуры в рабочей зоне подшипника до некоторого критического значения эта пленка разрушается. Возникает трение без смазки (металлический контакт), что влечет за собой дальнейшее повышение температуры и заедание (схватывание) поверхностей трения. Заедание приводит к выплавлению подшипника. Поскольку износ и заедание являются причинами выхода из строя подшипников, *основными критериями работоспособности и расчета подшипников скольжения являются износостойкость и теплостойкость.*

### **37.3. Расчет подшипников, их КПД и смазочные материалы**

Условный расчет подшипников скольжения проводят для подшипников, работающих в условиях граничного трения, когда трущиеся поверхности гарантированно не разделены слоем смазочного материала, а на рабочей поверхности вкладыша присутствует лишь тонкая масляная пленка, которая может разрушиться. Этот расчет проводят для обеспечения износостойкости и отсутствия заедания. Для подшипников жидкостного трения производят специальный расчет, основанный на гидродинамической теории смазывания.

Условный расчет подшипников скольжения производят по среднему давлению  $p_c$  между цапфой и вкладышем и по произведению этого давления на окружную скорость скольжения цапфы  $v$ , т.е. по параметру  $p_c v$ .

Расчет по среднему давлению  $p_c$  гарантирует невыдавливаемость смазочного материала и представляет собой расчет на износостой-

кость, а расчет по  $p_c v$  обеспечивает нормальный тепловой режим и отсутствие заеданий.

Условия нормальной работоспособности подшипников скольжения и подпятников в условиях граничного трения:

$$p_c \leq [p_c]; \quad (37.1)$$

$$p_c v \leq [p_c v], \quad (37.2)$$

где  $p_c$  — действительное среднее давление между цапфой и вкладышем (или пятой);

$v$  — окружная скорость цапфы;

$[p_c]$  — допускаемое давление и  $[p_c v]$  — допускаемое значение критерия (можно выбирать по табл. 37.1).

Условный расчет для подшипников, работающих в условиях граничного трения, является основным, его выполняют в большинстве случаев как проверочный, а для подшипников жидкостного трения — как ориентировочный.

Таблица 37.1

**Допускаемые значения давления  $[p_c]$  и критерия  $[p_c v]$  для подшипников скольжения и подпятников**

Материал цапфы и вкладыша	$[p_c]$ , МПа	$[p_c v]$ (Н·м)/(мм <sup>2</sup> ·с)
Сталь по чугуноу	2...4	1...3
Сталь по бронзе БрОЦС6-6-3	4...6	4...6
Сталь закаленная по бронзе БрАЖ9-4	15...20	18...12
Сталь по антифрикционному чугуноу	9	1,8
АЧС-1 при $v = 0,2$ м/с		
То же, при $v = 2$ м/с	0,05	0,1
Сталь по антифрикционному чугуноу	12	12
АЧК-1, АЧК-2 при $v = 1$ м/с		
То же, при $v = 5$ м/с	0,5	2,5
Сталь закаленная по баббиту	6...10	12...25

Среднее рабочее давление между цапфой и вкладышем

$$p_c = F_r / (dl), \quad (37.3)$$

где  $F_r$  — радиальная нагрузка на подшипник;

$d$  — диаметр цапфы;

$l$  — длина цапфы;

$(dl)$  — проекция опорной поверхности на диаметральную плоскость.



Расчетная окружная скорость цапфы

$$v = \omega d/2, \quad (37.4)$$

где  $\omega$  — угловая скорость цапфы;  
 $d$  — ее диаметр.

Определим среднее рабочее давление под пятой

$$p_c = F_a / (\pi/4(d^2 - d_0^2)K_\Psi), \quad (37.5)$$

где  $F_a$  — осевая нагрузка;

$d$  и  $d_0$  — диаметр пяты (рис. 37.6, б, в);

$K_\Psi = 0,8...0,9$  — коэффициент, учитывающий уменьшение опорной поверхности из-за наличия смазочных канавок.

Расчетная окружная скорость вала

$$v = \omega R_{\text{пр}}, \quad (37.6)$$

где  $\omega$  — заданная угловая скорость вала;

$R_{\text{пр}} = 1/3(d^3 - d_0^3)/(d^2 - d_0^2)$  — приведенный радиус;

$d$  и  $d_0$  — диаметры пяты.

Рассмотрим работу подшипников скольжения в условиях трения со смазочным материалом и выполним их расчет. Работа подшипника в этих условиях описывается гидродинамической теорией смазки, разработанной Н.П. Петровым.

При трении со смазочным материалом рабочие поверхности цапфы и подшипника полностью разделены слоем смазочного материала. При таком режиме работы создаются благоприятные условия работы: значительно уменьшаются потери энергии на определение вредных сопротивлений, цапфа и вкладыш практически не изнашиваются.

Для создания трения со смазочным материалом необходимо, чтобы в масляном слое возникало избыточное давление или от вращения вала (гидродинамическое), или от насоса (гидростатическое). Чаще применяют подшипники с гидродинамической смазкой (рис. 37.4, а). При вращении цапфа 2 увлекает масло 1 (цифра 3 показывает распределения гидродинамического давления в масляном клине). В образовавшемся масляном клине создается избыточное давление, обеспечивающее разделение цапфы и подшипника слоем масла.

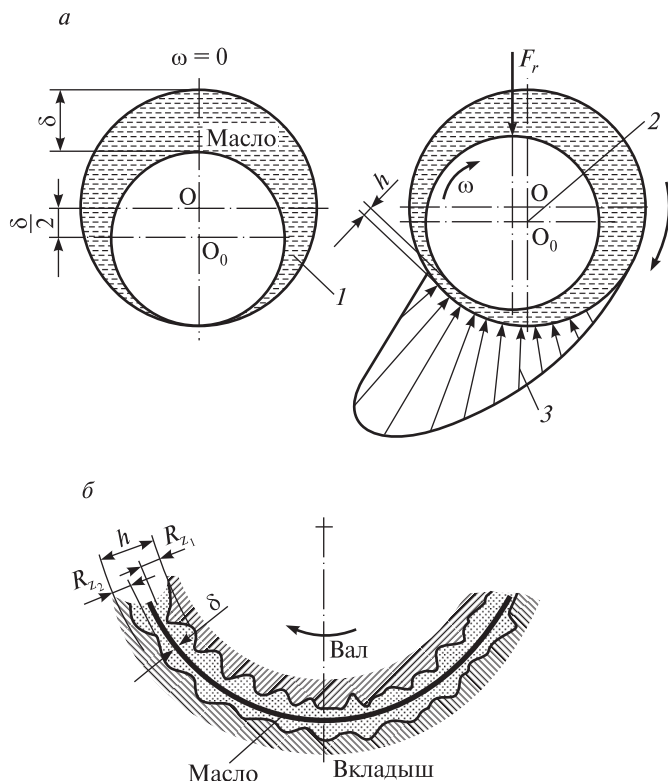


Рис. 37.4. Подшипник с гидростатической смазкой:

*a* — вращение цапфы в масляном клине; *б* — установившийся режим работы масляного слоя в цапфе и вкладыше

Расчет подшипников жидкостного трения выполняют на основе уравнений гидродинамики вязкой жидкости, связывающих давление, скорость и сопротивление смазочного материала вязкому сдвигу. Теория показывает, что гидродинамическое давление может развиваться только в клиновом зазоре (см. эпюру на рис. 37.4, *a*). Толщина масляного слоя  $h$  зависит от угловой скорости и вязкости масла. Чем больше эти параметры, тем больше  $h$ . Но с увеличением радиальной нагрузки  $F_r$  на цапфу 2 толщина масляного слоя  $h$  уменьшается. При установившемся режиме работы толщина  $h$  мас-

ляного слоя должна быть больше суммы микронеровностей цапфы  $Rz_1$  и вкладыша  $Rz_2$  (рис. 37.4, б):

$$h = K_h(Rz_1 + Rz_2), \quad (37.7)$$

где  $K_h$  — коэффициент запаса, учитывающий неточности изготовления цапф, ее сборки и т.п.

Для подшипников с трением со смазочным материалом предварительно производят условный расчет. При этом обычно диаметр цапфы  $d$ , радиальная нагрузка  $F_r$  и угловая скорость  $\omega$  должны быть известны. Для проверки выполнения условий жидкостного трения после выбора марки масла расчетным путем определяют радиальный зазор  $\delta$ , толщину масляного слоя  $h$  и исследуют температурный режим подшипников. Гидродинамический расчет выполняют как проверочный.

Значение КПД подшипников скольжения зависит от потерь на трение поверхностей скольжения. В условиях полужидкостной смазки КПД одной пары радиальных подшипников скольжения принимают значения  $\eta = 0,96...0,98$ .

## Глава 38. ПОДШИПНИКИ КАЧЕНИЯ

### 38.1. Классификация и область применения

Подшипники качения, как и подшипники скольжения, предназначены для поддержания вращающихся осей и валов.

Локомотивы, вагоны, металлорежущие станки, зубчатые редукторы и другие механизмы в настоящее время немыслимы без подшипников качения.

Эти подшипники (рис. 38.1) имеет наружное 1 и внутреннее 2 кольца, между которыми расположены тела качения 3 (шарики или ролики); во избежание соприкосновения тел качения они отделяются друг от друга сепаратором 4.

В зависимости от формы тел качения различают подшипники шариковые (рис. 38.2)

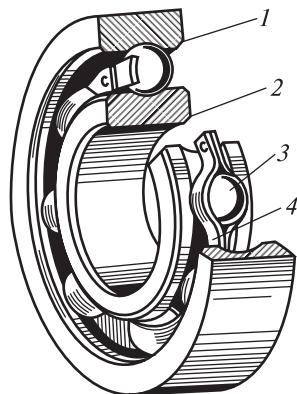


Рис. 38.1. Подшипник качения

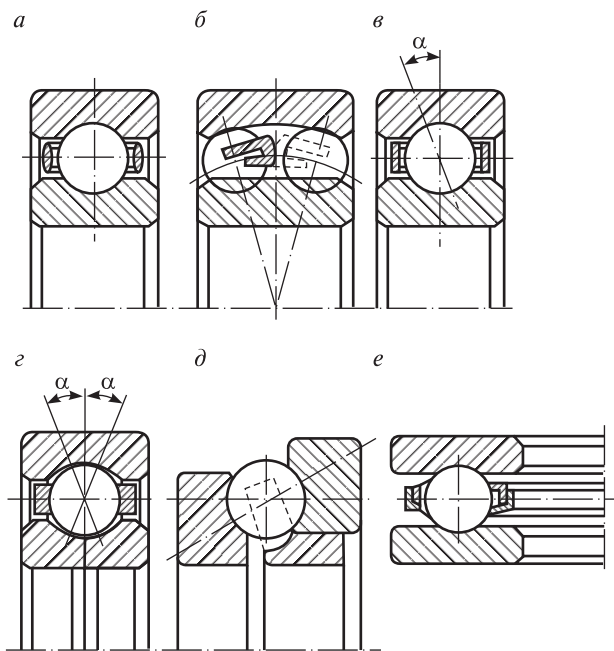


Рис. 38.2. Основные типы шарикоподшипников:

*а* — радиальный однорядный; *б* — двухрядный (несамоустанавливающий);  
*в, г* — радиально-упорные; *д* — упорно-радиальный; *е* — радиально-одно-  
 рядный

и роликовые (рис. 38.3). Последние, в свою очередь, делят по форме роликов на подшипники с цилиндрическими роликами короткими (рис. 38.3, *а*) и длинными (рис. 38.3, *д*), с коническими (рис. 38.3, *г*), бочкообразными (рис. 38.3, *б*), игольчатыми (рис. 38.3, *в*) и витыми (рис. 38.3, *е*).

По направлению воспринимаемых сил подшипники бывают:

- *радиальные*, воспринимающие преимущественно радиальные нагрузки, действующие перпендикулярно оси вращения подшипника (рис. 38.2, *а* и *б* и 38.3, *а, б, в, д*); .
- *радиально-упорные*, предназначенные для восприятия одновременно действующих радиальных и осевых нагрузок (рис. 38.2, *в* и *г* и 38.3, *г*);
- *упорно-радиальные*, служащие для восприятия осевой нагрузки при одновременном действии незначительной радиальной нагрузки (рис. 38.2, *д*);

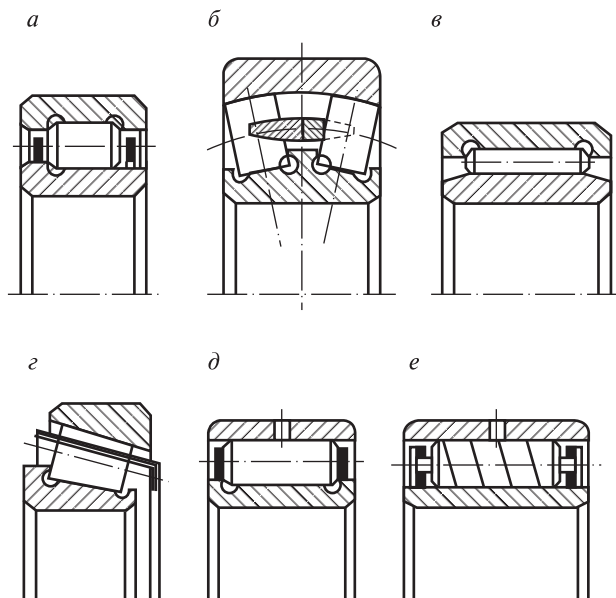


Рис. 38.3. Основные типы роликоподшипников: *а* — однорядные (с короткими роликами); *б* — с бочкообразными роликами (самоустанавливающиеся); *в* — игольчатыми роликами; *г* — конические; *д* — однорядные (с длинными роликами); *е* — однорядные (с витыми роликами)

- *упорные*, воспринимающие только осевую нагрузку (рис. 38.2, *е*).

По способности самоустанавливаться подшипники подразделяют на *несамоустанавливающиеся* и *самоустанавливающиеся* (рис. 38.2, *б* и 38.3, *б*), допускающие поворот оси внутреннего кольца по отношению к оси наружного кольца.

По числу рядов тел качения (расположенных по ширине) подшипники делят на однорядные (рис. 38.2, *а*, *в—е* и 38.3, *а*, *в—д*), двухрядные (рис. 38.2, *б* и 38.3, *б*) и четырехрядные.

Подшипники одного и того же диаметра отверстия подразделяют по габаритным размерам (наружный диаметр и ширина) на размерные серии: сверхлегкую, особо легкую, легкую, среднюю, тяжелую, особо узкую, узкую, нормальную, широкую и особо широкую.

Подшипники разных типов, размеров и серий имеют различную грузоподъемность и быстроходность. Подшипники более тяжелых

серий менее быстроходны, но имеют более высокую грузоподъемность. Подшипники шариковые радиальные и радиально-упорные, а также роликовые с короткими цилиндрическими роликами имеют наибольшую быстроходность по сравнению с подшипниками других типов.

Для особо высокой частоты вращения и в случае действия легких нагрузок целесообразно использовать подшипники сверхлегкой и особо легкой серий. Для восприятия повышенных и тяжелых нагрузок при высокой частоте вращения используют подшипники легкой серии, а при недостаточной их грузоподъемности размещают в одной опоре по два подшипника.

Наиболее часто на практике применяют подшипники легкой и средней серии нормальной ширины.

*Радиальные шарикоподшипники* могут воспринимать как радиальные, так и осевые нагрузки, действующие в обе стороны вдоль оси вращения подшипника, что обеспечивает возможность фиксирования вала в осевом направлении. При использовании этих подшипников к соосности опор и жесткости валов предъявляются менее высокие требования; стоимость их изготовления невысока, наиболее прост их монтаж и демонтаж, поэтому такие подшипники наиболее распространены.

*Роликовые подшипники* более грузоподъемны, чем шариковые. Однако роликподшипники с цилиндрическими роликами в наиболее распространенных конструкциях не могут воспринимать осевые нагрузки, а конические роликподшипники менее быстроходны. Все большее применение находят роликподшипники с выпуклой образующей роликов. Такая форма роликов позволяет снизить концентрацию напряжений на их кромках и повысить долговечность подшипников в два раза и более.

*Радиально-упорные подшипники* различают по величине угла контакта радиально-упорные подшипники могут воспринимать более тяжелые осевые нагрузки. Однако быстроходность подшипников с увеличением угла контакта снижается.

Радиальные и радиально-упорные шарикоподшипники могут быть использованы и в случае действия на них только осевой нагрузки, особенно при высокой частоте вращения, при которой нельзя применять упорные подшипники. Самоустанавливающиеся подшипники применяют в случае повышенной несоосности опор вала (до  $2-3^\circ$ ), а также при повышенной изгибной податливости вала.

Предельная частота вращения подшипников зависит от их конструкции и точности изготовления, от точности изготовления и монтажа, сопряженных с подшипниками деталей, а также от способа смазывания и свойств смазочных материалов.

*Точность изготовления.* ГОСТ устанавливает следующие классы точности подшипников качения: 0 — нормальный класс (как правило, 0 в обозначении не указывают); 6 — повышенный; 5 — высокий, 4 — особо высокий, 2 — сверхвысокий. Цифру, обозначающую класс точности, ставят слева от условного обозначения подшипника и отделяют от него знаком тире; например, 206 означает шариковый радиальный подшипник легкой серии с номинальным диаметром 30 мм, класса точности 0.

*Быстроходность подшипников* принято оценивать параметром  $d_m n$ , где  $d_m$  — диаметр окружности, соединяющей центры тел качения, мм;  $n$  — частота вращения кольца подшипника, об/мин. Для радиальных и радиально-упорных шарикоподшипников со стальными штампованными сепараторами (см. рис. 38.1) и роликоподшипников с короткими цилиндрическими роликами нормального класса точности (0)  $d_m n = 0,5 \cdot 10^6$  мм·об/мин; для тех же подшипников с массивными сепараторами, изготовленными из антифрикционных материалов (бронзы, алюминиевых сплавов, пластмасс), при интенсивной циркуляционной подаче масла параметр  $d_m n$  достигает  $2,8 \cdot 10^6$  мм·об/мин; для конических роликоподшипников  $d_m n \approx 0,3 \cdot 10^6$  мм·об/мин, а для упорных шарикоподшипников  $d_m n \approx 0,22 \cdot 10^6$  мм·об/мин.

*Материалы деталей подшипников.* Кольца и тела качения подшипников изготавливают в основном из шарикоподшипниковых высокоуглеродистых хромистых сталей ШХ15 и ШХ15СГ, а также цементируемых легированных сталей 18ХГТ, 20Х2Н4А и 20НМ. Твердость роликов и колец обычно HRC 60—65, шариков — HRC 62—66.

Кольца и тела качения подшипников, работающих в агрессивных средах, выполняют из сталей 12Х13 или 20Х13.

Сепараторы массовых подшипников изготавливают из мягкой углеродистой стали; сепараторы высокоскоростных подшипников выполняют массивными из бронз, латуни, текстолита и капрона.

Каждый подшипник, выпускаемый в России, имеет клеймо — номер, цифры которого характеризуют определенный признак под-

шипника. Первая и вторая цифры условно обозначают его номинальный внутренний диаметр  $d$  (диаметр вала). Для определения истинного размера  $d$  (в миллиметрах) необходимые указанные две цифры умножить на пять. Например, подшипник 04 имеет внутренний диаметр  $04 \cdot 5 = 20$  мм. Это правило распространяется на подшипники с цифрами 04 и выше, до 99; т.е. для  $d = 20 \dots 495$  мм. Подшипники с цифрами 00 имеют  $d = 10$  мм; 01 —  $d = 12$  мм; 02 —  $d = 15$  мм; 03 —  $d = 17$  мм.

Третья цифра обозначает серию подшипника, определяя его наружный диаметр: 1 — особо легкая, 2 — легкая; 3 — средняя, 4 — тяжелая; 5 — легкая широкая, 6 — средняя широкая.

Четвертая цифра обозначает тип подшипника. Если эта цифра 0, то это означает, что подшипник радиальный шариковый однорядный; 1 означает радиальный шариковый двухрядный сферический; 2 — радиальный с короткими цилиндрическими роликами; 3 — радиальный роликовый двухрядный сферический; 4 — игольчатый или роликовый с длинными цилиндрическими роликами; 5 — роликовый с витыми роликами; 6 — радиально-упорный шариковый; 7 — роликовый конический (радиально-упорный); 8 — упорный шариковый; 9 — упорный роликовый.

Пятая и шестая цифры характеризуют конструктивные особенности подшипника (неразборный, с защитной шайбой, с закрепительной втулкой и т.п.). Например: 50312 — радиальный однорядный шарикоподшипник средней серии состопорной канавкой на наружном кольце; 150312 — тот же подшипник с защитной шайбой; 36205 — радиально-упорный шариковый однорядный подшипник легкой серии, неразборный.

Седьмая цифра характеризует серию подшипника по ширине.

## **38.2. Виды разрушений подшипников качения и подбор подшипника**

*Абразивное изнашивание* наблюдается при недостаточной защите подшипников от пыли, грязи (абразивных частиц). Это основной вид разрушения подшипников, используемых на железнодорожном транспорте.

*Раскатывание колес и тел качения.* Этот вид разрушения связан с ударами и вибрационными перегрузками, неправильным монтажом,



вызывающим перекосы колец, заклинивание тел качения и т.п. При нормальной эксплуатации этот вид разрушения не наблюдается.

*Разрушение сепараторов* характерно для быстроходных подшипников. Оно дает значительный процент выхода из строя подшипников; происходит от действия центробежных сил и воздействия на сепаратор тел качения.

*Методика подбора подшипники качения.* При проектировании машин подшипники качения не конструируют и не рассчитывают, а подбирают из числа стандартных. Методика подбора подшипников стандартизована и описана в ГОСТ 18854-82 и ГОСТ 18854-82.

Различают подбор подшипников по базовой статической грузоподъемности для предупреждения остаточных деформаций; по базовой динамической грузоподъемности для предупреждения усталостного разрушения.

*Подбор подшипников по статической грузоподъемности.* Невращающиеся подшипники и вращающиеся с частотой  $n \leq 1$  об/мин (например, домкраты, нажимные устройства и др.) подбирают по базовой статической грузоподъемности.

Базовая статическая грузоподъемность подшипника — радиальная нагрузка, которая соответствует общей остаточной деформации шарика (ролика) и дорожки качения, равной 0,0001 диаметра шарика (ролика) в наиболее нагруженной зоне контакта. Такая остаточная деформация не оказывает заметного влияния на работу подшипника.

*Подбор подшипников по динамической грузоподъемности.* Под динамической грузоподъемностью для радиальных и радиально-упорных подшипников понимают постоянную радиальную нагрузку, которую может выдержать группа идентичных подшипников с неподвижным наружным и вращающимся внутренним кольцом до возникновения усталостного разрушения рабочих поверхностей колец и тел качения за 1 млн оборотов.

Условие для выбора подшипников качения

$$C \leq [C], \quad (38.1)$$

где  $C$  — требуемая динамическая грузоподъемность, Н;

$[C]$  — допускаемое значение грузоподъемности выбранного типоразмера подшипника.

Требуемое значение динамической грузоподъемности

$$C = F_E L^{1/\alpha}, \quad (38.2)$$

где  $F_E$  — приведенная (эквивалентная) нагрузка;

$L$  — требуемая долговечность вращающегося подшипника, млн об.;

$\alpha$  — коэффициент, зависящий от характера кривой усталости (для шариковых подшипников  $\alpha = 3,0$ ; для роликовых  $\alpha = 10/3$ ).

Эквивалентную динамическую нагрузку определяют из выражений:

для радиальных и радиально-упорных подшипников

$$F_E = (XVF_{r\pi} + YF_{a\pi})K_{\phi} K_T; \quad (38.3)$$

для упорных подшипников

$$F_E = F_{a\pi} K_{\phi} K_T, \quad (38.4)$$

В этих формулах  $F_{r\pi}$  — радиальная нагрузка, определяемая из выражения

$$F_{r\pi} = \sqrt{F_{r\pi_B}^2 + F_{r\pi_{\Gamma}}^2}, \quad (38.5)$$

где  $F_{r\pi_B}$  — радиальная реакция подшипника в вертикальной плоскости;

$F_{r\pi_{\Gamma}}$  — радиальная реакция подшипника в горизонтальной плоскости;

$F_{a\pi}$  — осевая реакция на подшипник;

$X$  и  $Y$  — коэффициенты радиальной и осевой нагрузок;

$V$  — коэффициент вращения (при вращении внутреннего кольца  $V = 1$ ; наружного  $V = 1,2$ );

$K_{\phi}$  — коэффициент безопасности;

$K_T$  — температурный коэффициент (вводится при температуре  $t > 100$  °С;

$K_T = 1,05$  при  $t$  до 125 °С;  $K_T = 1,1$  при  $t$  до 150 °С;  $K_T = 1,25$  при  $t$  до 200 °С).

Коэффициент радиальной и осевой нагрузок дан в табл. 38.1, а коэффициент безопасности — в табл. 38.2.

При действии на радиально-упорный подшипник радиальной нагрузки в нем возникает, помимо радиальной, также осевая реакция. Причину ее возникновения поясняет рис. 38.4, на котором показана такая реакция  $S_i$  для отдельного тела, качения.

Суммируя эти осевые реакции для всех нагруженных тел качения, получают полную осевую реакцию подшипника от действия на него радиальной силы. Эту реакцию обозначают  $S$  и определяют ее в функции от суммарной радиальной реакции  $F_{r_n}$  по формуле  $S = eF_{r_n}$  для шариковых подшипников;  $S = 0,83eF_{r_n}$  — для роликовых конических подшипников.

Таблица 38.1

Значения коэффициентов радиальной  $X$  и осевой  $Y$  нагрузок

Подшипники	Угол кон- такта $\beta$ , °	Относи- тельная нагрузка $F_{an}/[C_0]$	Однорядные подшипники				Двухрядные подшипники				$e$
			$F_{an}/VF_{rn} < e$		$F_{an}/VF_{rn} > e$		$F_{an}/VF_{rn} < e$		$F_{an}/VF_{rn} > e$		
			$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	$X$	$Y$	
			4	5	6	7	8	9	10	11	
1	2	3									12
Шариковые радиальные	0	0,014				2,30				2,30	0,19
		0,028				1,99				1,99	0,22
		0,056				1,71				1,71	0,26
		0,084				1,55				1,55	0,28
		0,11	1	0	0,56	1,45	1	0	0,56	1,45	0,30
		0,17				1,31				1,31	0,34
		0,28				1,15				1,15	0,38
Шариковые	12	0,42				1,04				1,04	0,42
		0,56				1,00				1,00	0,44
		0,014				1,81		2,08		2,94	0,30
		0,029				1,62		1,84		2,63	0,34
		0,057				1,46		1,69		2,37	0,37
		0,086				1,34		1,52		2,181	0,41
		0,11	1	0	0,46	1,22	1	1,39	0,74	1,98	0,45
Шариковые	12	0,17				1,13		1,30		1,84	0,48
		0,29				1,04		1,20		1,69	0,52
		0,43				1,01		1,16		1,64	0,54
		0,57				1,00		1,16		1,62	0,54

Окончание табл. 38.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Шариковые радиально-упорные	18...20	—	1	0	0,43	1,00	1	1,09	0,70	1,63	0,57
	24...26				0,41	0,87		0,92	0,67	1,44	0,68
	30				0,39	0,76		0,76	0,63	1,24	0,80
	35; 36				0,37	0,66		0,66	0,60	1,07	0,95
Роликовые конические	40	—	1	0	0,35	0,57	1	0,55	0,57	0,93	1,14
	—				0,4	0,4		0,45	0,67	0,67	1,5
Шариковые упорно-ради- альные	45	—	—	—	0,66	1	1	0,59	0,66	1	1,25
	60				0,92	1		0,54	0,92	1	2,17
	75				1,66	1		0,52	1,66	1	4,67
Роликовые упорно-ради- альные	—	—	—	—	—	1	1,5	0,67	—	1	1,5

Примечание. Для упорно-радиальных подшипников  $V = 1,0$ .

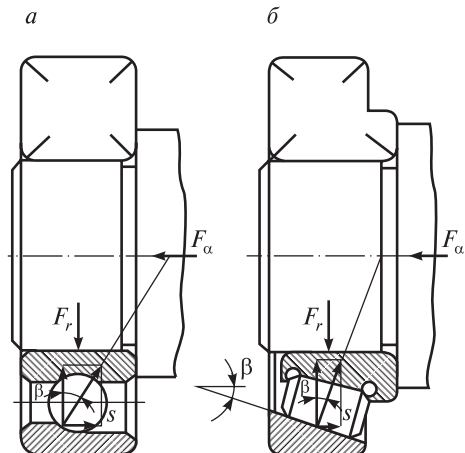
Значения коэффициента безопасности

Характер нагрузки на подшипник	$K_6$	Примечание
Спокойная, толчки отсутствуют	1	Подшипники передач трением и в машинах со спокойной внешней нагрузкой, ролики ленточных конвейеров
С легкими толчками, кратковременные перегрузки до 125 % от основной нагрузки	1...1,2	Подшипники передач зацеплением в машинах с относительно спокойной внешней нагрузкой, в станках с главным вращательным движением, в машинах для обработки волокна и т.д. Подшипники электродвигателей, конвейеров
С умеренными толчками, кратковременные перегрузки до 150 % от основной нагрузки	1,3...1,8	Подшипники железнодорожного подвижного состава, коробки передач тракторов и автомобилей, редукторов ( $K_6 = 1,3...1,5$ ), колес автомобилей и тракторов, двигателей внутреннего сгорания, строгальных и долбежных станков, вагонеток для угля и т.д. ( $K_6 = 1,5...1,8$ )
С сильными ударами, кратковременная перегрузка до 300 % от основной нагрузки	2...3	Подшипники ковочных машин, камнедробилок, копров, валков и роликовых конвейеров крупно- и среднесортных прокатных станков

В формулу (38.3) для определения приведенной (эквивалентной) нагрузки радиально-упорного подшипника следует подставлять суммарную осевую нагрузку, зависящую не только от внешней осевой силы, но и от осевых составляющих реакций подшипников (рис. 38.4).

Рис. 38.4. К определению суммарной осевой реакции для подшипников:

*a* — шариковых; *б* — роликовых



При составлении уравнений равновесия для определения радиальных реакций радиально-упорных подшипников следует иметь в виду, что радиальная реакция приложена не посередине подшипника (как это имеет место для радиальных подшипников), а смещена. Радиальная реакция приложена в точке пересечения нормали к середине поверхности контакта тела качения и наружного кольца и оси вала. Расстояние  $a$  определяют:

для однорядных радиально-упорных шарикоподшипников

$$a = 0,5(B + ((d + D)/2) \operatorname{tg} \beta);$$

для однорядных конических роликоподшипников

$$a = T/2 + (d + D)e/6.$$

Коэффициент  $e$  для конических роликоподшипников и для шариковых подшипников с большим углом контакта ( $\beta \geq 18^\circ$ ) указан в табл. 38.1; для шарикоподшипников с небольшим углом контакта коэффициент  $e$  может быть предварительно определен по формуле

$$\lg e = (\lg(F_{r\pi}/C_0) - 1,444)/4,729.$$

*Расчет подшипников на долговечность.* Под минимальной долговечностью (расчетным сроком службы) понимают срок службы подшипников, в течение которого не менее 90 % из данной группы при одинаковых условиях должны проработать без появления признаков усталости материала.

$$L = ([C]/F_E)^\alpha. \quad (38.6)$$

### 38.3. Смазывание подшипников качения и их КПД

Смазка подшипников качения предназначена для уменьшения потерь мощности на трение, демпфирования колебаний нагрузки, снижения износа и коррозии контактирующих поверхностей, уменьшения шума и лучшего отвода теплоты, заполнения зазоров в уплотнениях, обеспечивая этим герметичность подшипникового узла. Применяют *жидкие* и *пластичные* смазочные материалы.

На практике стремятся смазывать подшипники тем же маслом, которым смазывают детали передач. При картерной смазке колес подшипники качения смазываются брызгами масла.

При окружной скорости колес  $v > 1$  м/с брызгами масла покрываются все детали передачи и внутренние поверхности стенок корпуса. Масло, стекающее с колес, с валов и со стенок корпуса, попадает в подшипники.

Минимальный уровень масляной ванны ограничивают центром нижнего тела качения подшипника. В ряде случаев для обеспечения надежного смазывания зацепления шестерню или червяк и подшипник быстроходного вала погружают в масло. В этом случае во избежание попадания в подшипник продуктов износа зубчатых и червячных колес, а также излишнего полива маслом подшипники защищают маслозащитными шайбами.

Для смазки опор валов, далеко расположенных от уровня масляной ванны, например, для смазывания подшипника вала конической шестерни, удаленного от масляной ванны, применяют специальные устройства и насосы. Если применение их нежелательно, то подшипник смазывают пластичным смазочным материалом. В этом случае подшипниковый узел закрывают маслосбрасывающим кольцом.

Пластичные смазочные материалы применяют при окружной скорости колес  $v < 1$  м/с для смазывания опор машин, работающих в среде, содержащей вредные примеси. При использовании пластичных смазочных материалов не требуются специальные устройства для подачи их в узел; эти материалы закладывают при сборке узла и добавляют пресс-масленками через каждые 3 месяца, а заменяют полностью — через год.

Для отделения узла подшипника от общей системы смазки служат маслосбрасывающие кольца, предохраняющие пластичные смазочные материалы от вымывания.

*Недостатки* пластичной смазки: необходимость разборки узла при замене смазочного материала, чувствительность к изменению температуры, повышенное внутреннее трение; возможность применения только при сравнительно низких угловых скоростях вращающихся колец.

**КПД.** Потери в подшипнике складываются из потерь на трение качения между телами качения и кольцами, трение скольжения между телами качения и сепаратором, трение роликов о бортики, а также скольжение в уплотнениях и смазочном материале. Коэффициент полезного действия принимает следующие значения: для шариковых — 0,995; для роликовых цилиндрических — 0,99; для роликовых конических — 0,985.

## Глава 39. МУФТЫ

### 39.1. Общие сведения

*Муфтой* называют устройство, соединяющее концы двух валов и передающее вращающий момент с одного вала на другой без изменения его значения и направления.

Помимо соединительных функций, муфты выполняют одновременно и другие, например:

1) управление работой — включение и выключение исполнительного механизма при работающем двигателе или облегчение запуска машины, реализуемое с помощью управляющих муфт;

2) регулирование параметров — ограничение частоты вращения валов, предохранение деталей и машин от случайных перегрузок;

3) компенсация погрешностей монтажа и связанных с ними отрицательных последствий — компенсация неточностей в относительном расположении валов (продольном, поперечном, угловом), возникающих при монтаже оборудования; ослабление вибраций, толчков и ударов — с помощью компенсирующих муфт.

По характеру соединения валов муфты подразделяют на *нерасцепляемые* и *сцепные*.

Муфты разнообразны по конструкции. При проектировании муфт конструктивные их размеры элементов определяют расчетом. Стандартизованные муфты не рассчитывают. Их, как правило, выбирают, как и подшипники качения.

### 39.2. Нерасцепляемые муфты

Нерасцепляемые муфты — это такие, в которых ведущая и ведомая полумуфты соединены между собой постоянно. Они широко распространены на железнодорожном транспорте и подразделяются на глухие (жесткие), компенсирующие и упругие.

*Глухие (жесткие) муфты* практически не допускают компенсации радиальных, осевых и угловых смещений валов. Наибольшее применение получили *втулочная* и *фланцевая* муфты.

*Втулочная муфта* — это цельная стальная втулка, закрепленная на концах валов шпонками или штифтами либо шлицами. Имеет простую конструкцию, малые габариты и низкую стоимость.



Недостатком таких муфт является необходимость при монтаже и демонтаже раздвигать концы валов на полную длину муфты либо сдвигать втулку вдоль вала не менее чем на половину ее длины.

Втулочная муфта нашла применение в тихоходных машинах при диаметре валов  $d \leq 70$  мм. Втулочные муфты выбирают по ГОСТ 24246-80.

*Фланцевая муфта* состоит из двух полумуфт, насаживаемых на концы валов и соединенных между собой болтами. Для передачи вращающего момента используют шпоночные или шлицевые соединения. Эти муфты иногда называют поперечно-свертными. Для лучшего центрирования фланцев на одной полумуфте делают круговой выступ, на другой — выточку того же диаметра (рис. 39.1, *а*) или предусматривают центрирующее кольцо *1* (рис. 39.1, *б*).

Фланцевые муфты просты по конструкции, надежны в работе, могут воспринимать большие нагрузки, в том числе и ударного действия. Они широко распространены на железнодорожном транспорте (особенно муфты с болтами без зазора). Используются для валов диаметром  $d \leq 350$  мм.

Достоинство этих муфт — простота конструкции и легкость монтажа.

Недостаток фланцевых муфт — необходимость точного совмещения валов и точного соблюдения перпендикулярности соприкасающихся торцовых поверхностей полумуфт к оси вала. Муфты подбирают по ГОСТ 20761-80.

*Продольно-свертная муфта* (рис. 39.2) отличается от фланцевых муфт тем, что линия разъема полумуфт, выполненных в виде разрезной втулки, располагается вдоль оси вала. Эти муфты обеспечивают наиболее удобный

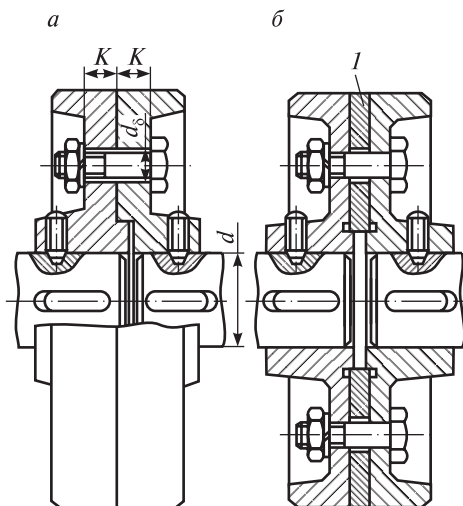


Рис. 39.1. Муфта фланцевая:  
*а* — с круговым выступом и выточкой;  
*б* — с центрирующим кольцом

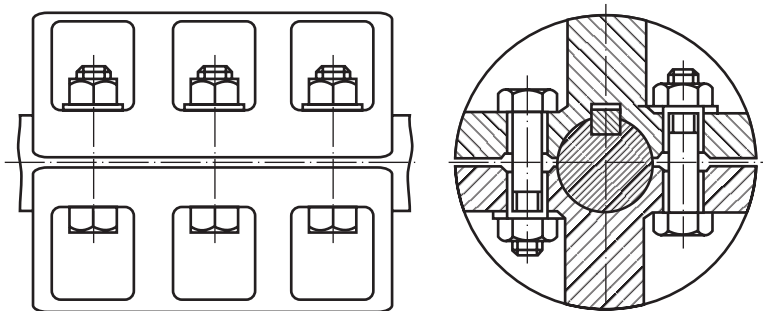


Рис. 39.2. Муфта продольно-свертная

монтаж и демонтаж без осевого смещения валов. Вращающий момент передается за счет шпоночных соединений, а также сил трения, возникающих от затяжки болтов. Иногда эти муфты выполняют без шпонок, что позволяет производить их быструю сборку и регулировать взаимное расположение валов по углу поворота.

*Компенсирющие муфты* применяют при необходимости компенсировать отклонения от неправильного взаимного расположения валов. Благодаря компенсации происходит разгрузка привода и агрегатов от дополнительных нагрузок на валы и опоры.

Распространение получили кулачково-дисковые, зубчатые, втулочно-пальцевые, малогабаритные шарнирные муфты, с торообразной упругой оболочкой и др.

*Кулачково-дисковая муфта* (рис. 39.3) состоит из двух полумуфт 1 и 3 с диаметрными пазами на торцах и промежуточного плавающего диска 2 (рис. 39.3, а) со взаимно перпендикулярными выступами. В собранной муфте выступы диска располагаются в пазах полумуфт (рис. 39.3, б). Трущиеся поверхности периодически смазывают пластичной смазкой (один раз в смену). Кулачково-дисковая муфта применяется для соединения тихоходных валов (до 250 об/мин). Допустимые радиальные смещения валов — до  $0,04d$ , угловое — до  $30^\circ$ . Недостаток этих муфт — повышенная чувствительность к перекосам валов. Эти муфты предназначены, главным образом, для компенсации относительно параллельного смещения осей валов. Теоретически при любом смещении передаточное отношение между валами постоянное. При вращении ведущего вала без угловых ускорений ведомый вал также будет

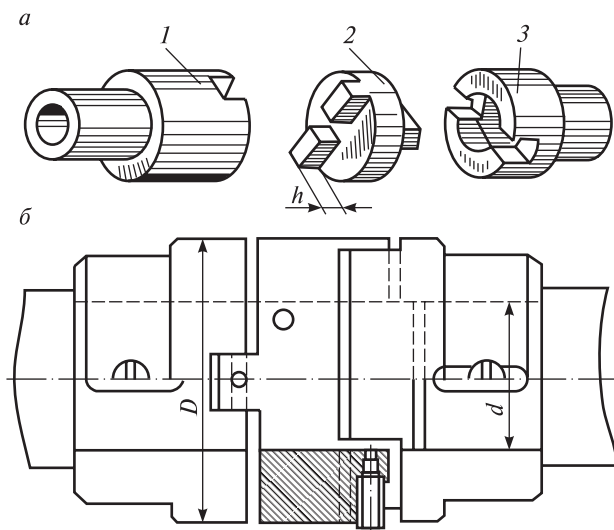


Рис. 39.3. Муфта кулачково-дисковая:  
 а — составные части муфты; б — общий вид собранной муфты

вращаться равномерно. Полумуфты и диски рекомендуется изготавливать из стали 45Л.

*Муфта зубчатая* (рис. 39.4) состоит из двух полумуфт 1 и 4 с наружными зубьями эвольвентного профиля и разъемной обоймы 3 с двумя рядами внутренних зубьев, которые зацепляются с зубьями полумуфт, насаживаемых на концы валов. Разъемная обойма соединена болтами, поставленными в отверстия без зазора.

Муфта компенсирует все виды смещения валов. С этой целью зубья венцов полумуфт обрабатывают по сфере радиусом  $r$ , а в продольном сечении зубьям придают бочкообразную форму (вид В). При такой форме зубьев муфты допускают смещения осей валов:  $\Delta_l = 1...8$  мм;  $\Delta_r = 0,2...0,6$  мм и  $\Delta_\alpha \leq 1^\circ$ . Компенсация смещений валов при работе муфты сопровождается скольжением зубьев и их изнашиванием. Для уменьшения износа в обойму через отверстие 2 заливают большой вязкости масло, а стальные зубья подвергают термообработке до высокой твердости — не ниже 45HRC<sub>3</sub>.

Зубчатые муфты получили широкое распространение в транспортных и стационарных машинах благодаря следующим досто-

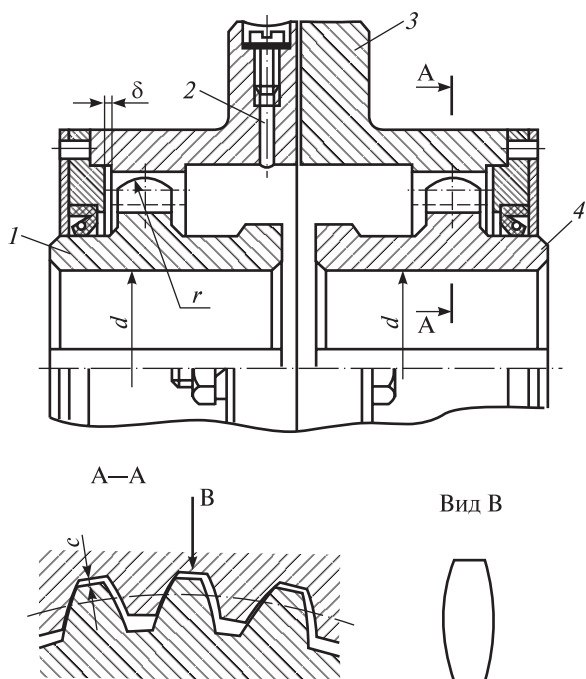


Рис. 39.4. Муфта зубчатая

инствам: высокая нагрузочная способность при малых габаритах, обусловленные передачей нагрузки большим числом одновременно работающих пар зубьев; технологичность изготовления и возможность использования в широких диапазонах частот вращения и передаваемых моментов. Муфты подбирают по ГОСТ 5006-83 в диапазоне диаметров валов  $d = 40 \dots 200$  мм.

*Втулочно-пальцевые* муфты (рис. 39.5) применяют в приводе от электродвигателя и в других случаях для валов диаметрами  $9 \dots 160$  мм при вращающих моментах  $6,3 \dots 16\,000$  Н·м. Рассматриваемая муфта по конструкции аналогична фланцевой муфте, вместо соединительных болтов у упругой муфты имеются стальные пальцы 1, на которые установлены эластичные (резиновые, кожаные и т.п.) втулки 2. Эластичные элементы позволяют компенсировать незначительные осевые ( $1 \dots 5$  мм; для больших муфт  $2 \dots 15$  мм), радиальные ( $0,2 \dots 0,6$  мм) и угловые (до  $1^\circ$ ) смещения валов. Упругие втулочно-

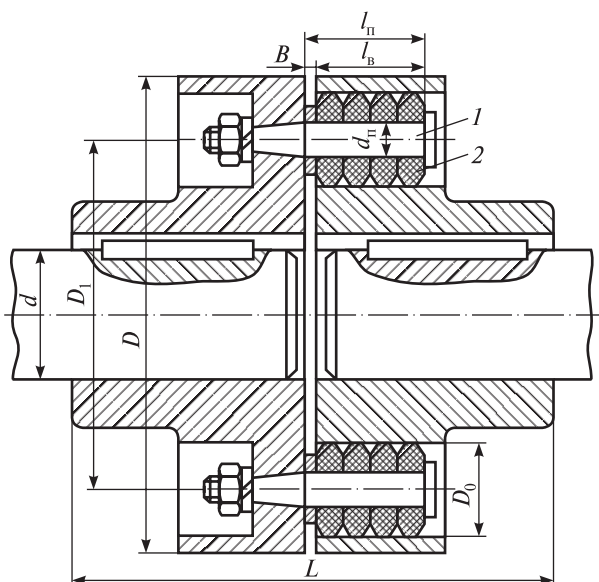


Рис. 39.5. Муфта втулочно-пальцевая

но-пальцевые муфты обладают хорошей эластичностью, высокой демпфирующей и электроизоляционной способностью, простотой в изготовлении, надежностью в работе. Материал полумуфт — сталь 35, 35Л или чугун СЧ 25; пальцы изготавливают из стали 45.

*Муфта упругая с торообразной оболочкой* (рис. 39.6) состоит из двух полумуфт, упругой оболочки, по форме напоминающей автомобильную шину, и двух прижимных колец, которые с помощью винтов закрепляют оболочку на полумуфтах. Вращающий момент с полумуфт

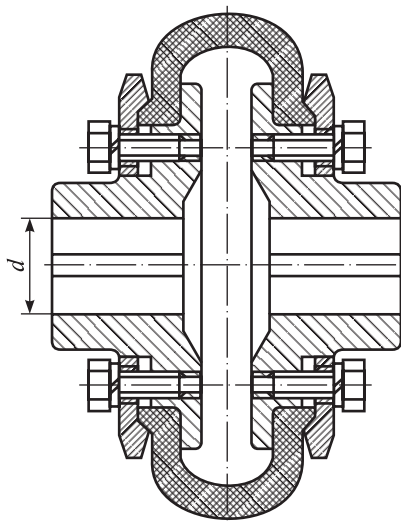


Рис. 39.6. Муфта с торообразной оболочкой

на оболочку передается силами трения, создаваемыми при затяжке винтов. Применяется при переменных и ударных нагрузках.

*Достоинства:* высокая надежность в эксплуатации; легкость сборки, разборки и замены упругого элемента; высокая упругость и демпфирующая способность, позволяющая компенсировать смещения валов:  $\Delta_l = 1...5$  мм;  $\Delta_r = 1...4$  мм и  $\Delta_\alpha \leq 1^\circ 30'$ . Применяется для соединения валов диаметром  $d = 14...240$  мм. Муфты подбирают по ГОСТ 20884-82.

*Муфта со змеевидной пружиной* (рис. 39.7) имеет наибольшее распространение из муфт с металлическим упругим элементом. Состоит из двух полумуфт 1 и 5 с зубьями 2 специального очертания, во впадины между которыми свободно заложены секции ленточной змеевидной пружины 3 прямоугольного сечения. Зубья и пружина закрываются снаружи кожухом 4, состоящим из двух половин, соединенных между собой болтами или резьбой. Кожух удерживает пружину в рабочем положении и предохраняет ее от

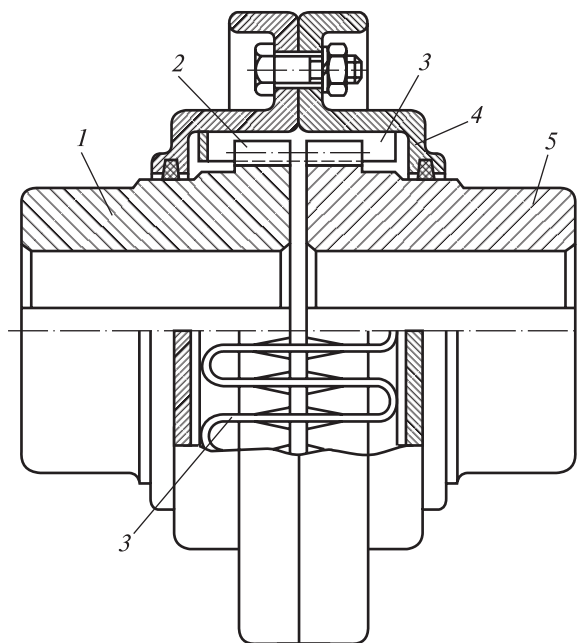


Рис. 39.7. Муфта со змеевидной пружиной

выпадения, служит резервуаром для пластичного смазочного материала и защищает муфту от пыли.

*Достоинства:* высокая надежность в работе, долговечность и малые габариты. Эти свойства и обусловили довольно широкое распространение их главным образом в транспортном машиностроении, где требуется передавать большие вращающие моменты. Муфты достаточно податливы. В зависимости от размеров они допускают смещения валов: осевые  $\Delta_l = 4 \dots 20$  мм; радиальные  $\Delta_r = 0,5 \dots 3$  мм и угловое  $\Delta_\alpha \leq 1^\circ 15'$ . Размеры этих муфт принимают по нормальям станкостроения для соединения диаметров валов  $d = 15 \dots 305$  мм при частоте вращения  $n = 15000 \dots 450$  об/мин.

*Муфта дисковая полужесткая одинарная* (рис. 39.8) состоит из двух полумуфт 1 и 3 и пакета гибких дисков 2 (упругий элемент муфты), соединенных между собой болтами. Диски изготавливают из пружинной стали. Ширина пакета дисков — от 4 до 14 мм, зависит она от значения передаваемой мощности. Пакетные упругие элементы вследствие трения между пластинами обладают высокой демпфирующей способностью. Вследствие гибкости упругих дисков муфта допускает смещение осей валов: осевое  $\Delta_l = 0,5 \dots 2,5$  мм и угловое  $\Delta_\alpha = 0^\circ 45' \dots 1^\circ$ . Радиального смещения муфты не допускают.

*Достоинства:* высокая надежность в эксплуатации; простота конструкции; удобство монтажа и демонтажа, высокая технологичность. Получили применение описываемые муфты для соеди-

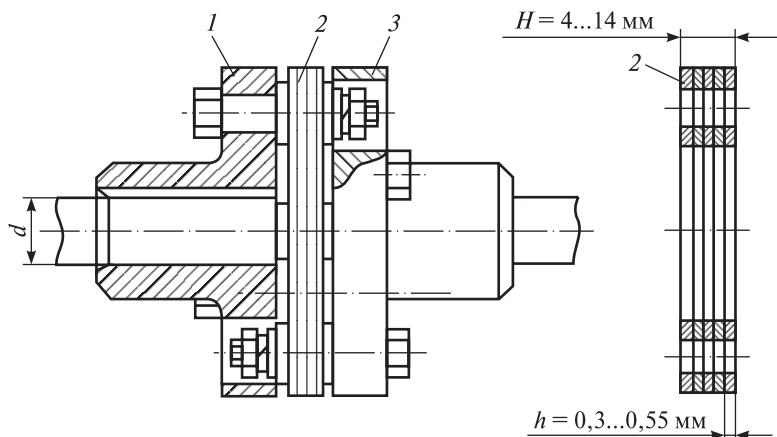


Рис. 39.8. Муфта дисковая полужесткая одинарная

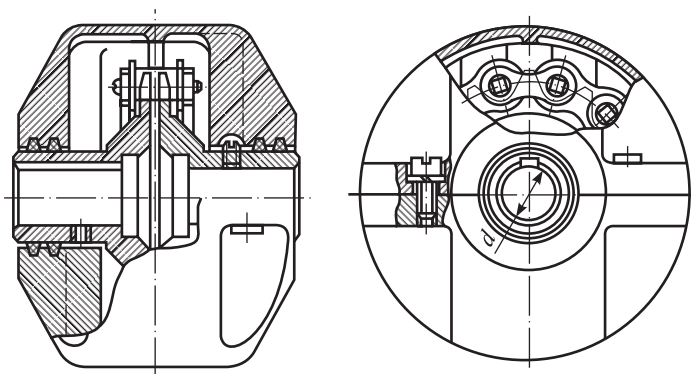


Рис. 39.9. Муфта цепная

нения валов диаметром  $d = 11...130$  мм с частотой вращения  $n = 2000...600$  об/мин. Муфты подбирают по ГОСТ 26455-85.

*Муфта цепная* (рис. 39.9) состоит из двух полумуфт-звездочек с одинаковым числом зубьев, охватывающих их однорядной, двухрядной роликовой или зубчатой цепью, и защитного кожуха, заполненного пластичным смазочным материалом. Поскольку в шарнирах самой цепи и в сопряжении ее со звездочками имеются зазоры, эти муфты не применяют в реверсивных приводах (реверс будет сопровождаться ударами), а также в высокоскоростных приводах (увеличиваются динамические нагрузки).

Несоосность осей соединяемых валов компенсируется относительной податливостью деталей цепи и их деформацией. Муфты допускают смещения осей валов: угловые  $\Delta_\alpha \leq 1^\circ$  (за счет выбора зазоров), а также радиальные  $\Delta_r = 0,15...0,7$  мм при значении передаваемых моментов от 63 до 8000 Н·м.

*Достоинства* цепных муфт: простота конструкции и обслуживания; удобство монтажа и демонтажа; технологичность изготовления и малые габариты. Муфты подбирают по ГОСТ 20742-81 в диапазоне диаметров валов  $d = 20...140$  мм при частоте вращения  $n = 1600...500$  об/мин.

### 39.3. Управляемые (сцепные) муфты

*Управляемые, или сцепные, муфты* служат для быстрого соединения и разъединения валов при работающем двигателе, для этого



они снабжены механизмом принудительного управления (ручным или автоматическим); применяются при строгой соосности валов; по принципу работы делятся на две группы: муфты, основанные на зацеплении (кулачковые и зубчатые), и муфты, основанные на трении (фрикционные).

*Муфта кулачковая сцепная* (рис. 39.10) состоит из двух полумуфт 1 и 2, на торцах которых имеются кулачки. При включении кулачки одной полумуфты входят во впадины другой, создавая жесткое сцепление. Включение муфты осуществляется за счет полумуфты 2, которая может передвигаться вдоль вала по направляющей шпонке или по шлицам. Во избежание повреждений кулачков включение муфты на ходу допускается без нагрузки при весьма малой разности угловых скоростей валов. Выключение допускается на ходу. Достоинство кулачковых муфт — простота конструкции и малые габаритные размеры; недостаток — невозможность, как правило, включения на ходу. Рекомендуемый материал кулачковых полумуфт — легированная сталь 20Х или 20ХН (с цементацией и закалкой).

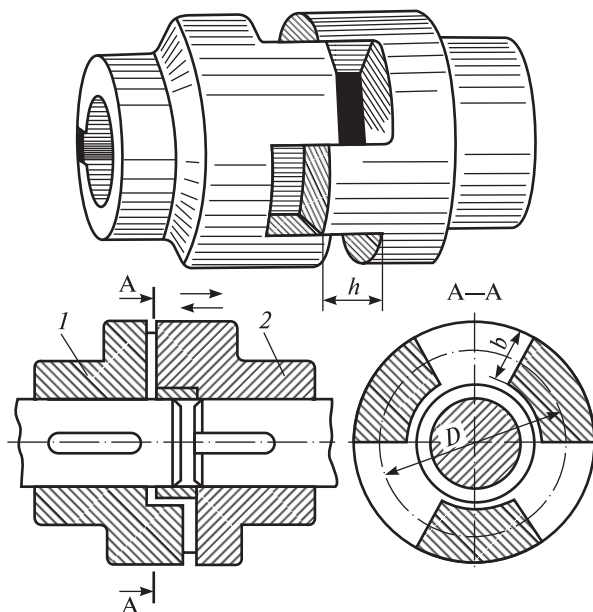


Рис. 39.10. Муфта кулачковая

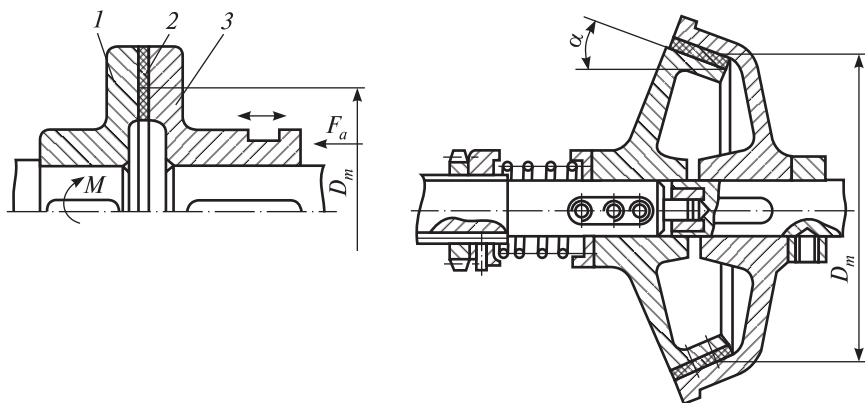


Рис. 39.11. Муфты фрикционные сцепные:  
 а — дисковые; б — конические

*Фрикционные сцепные муфты* передают вращающий момент между полумуфтами 1, 3 и дисками 2 за счет сил трения на рабочих поверхностях (рис. 39.11, а). Применяют также конусные муфты (рис. 39.11, б). Давление на поверхностях контакта (смазываемых или сухих) создают с помощью устройств и механизмов включения различного типа (пружинно-рычажных механизмов, электрических, гидравлических и пневматических устройств).

При включении фрикционных муфт вращающий момент нарастает с увеличением усилия нажатия  $F_a$  (контактных давлений на поверхностях трения). Благодаря этому можно соединять валы под нагрузкой. Пробуксовывание муфты в процессе включения обеспечивает плавный разгон ведомого вала.

Фрикционные муфты должны обладать надежностью сцепления, высокой износостойкостью и теплостойкостью контактирующих поверхностей. Материал для фрикционных муфт — конструкционные стали, чугун СЧ30. Фрикционные материалы (прессованная асбестопроволочная ткань — ферродо, фрикционная пластмасса, порошковые материалы и др.) применяют в виде накладок.

### 39.4. Самоуправляемые муфты

Эти муфты обеспечивают автоматическое соединение и разъединение валов при изменении режима работы. *Муфты свободного хода*

(рис. 39.12) предназначены для передачи вращающего момента в одном направлении (например, для вращения втулки заднего колеса велосипеда). Ролики 3 муфты свободного хода за счет сил трения заклиниваются между поверхностями полумуфт 1 и 2. При уменьшении скорости вращения полумуфты 1 вследствие обгона ролики выкатываются в широкие участки вырезов, и муфта автоматически размыкается. Муфты свободного хода работают бесшумно, допускают большую частоту включений.

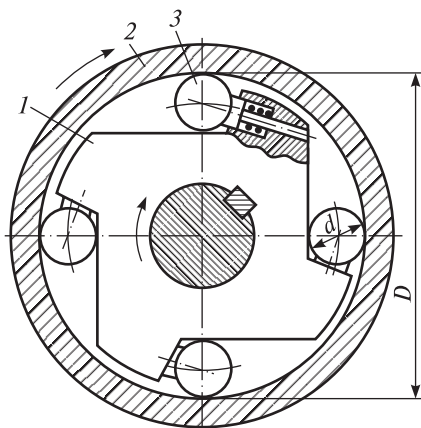


Рис. 39.12. Муфта свободного хода самоуправляемая

В качестве материалов для муфт свободного хода рекомендуется применять стали ШХ15, 20Х, а также высокоуглеродистые инструментальные стали.

*Центробежные муфты* (рис. 39.13) служат для автоматического включения (выключения) валов при заданных угловых скоростях.

Центробежная муфта состоит из ведущей и ведомой полумуфт 1 и 2, в пазы которых устанавливают фрикционные грузы — колодки 3. При достижении ведущей полумуфтой заданной угловой скорости колодки 3 за счет центробежных сил прижимаются к ведомой полумуфте, и муфта включается. В показанной на рис. 39.13 конструкции любая из полумуфт (1 или 2) может быть ведущей. Передача вращающего момента осуществляется силами трения, значение которых пропорционально

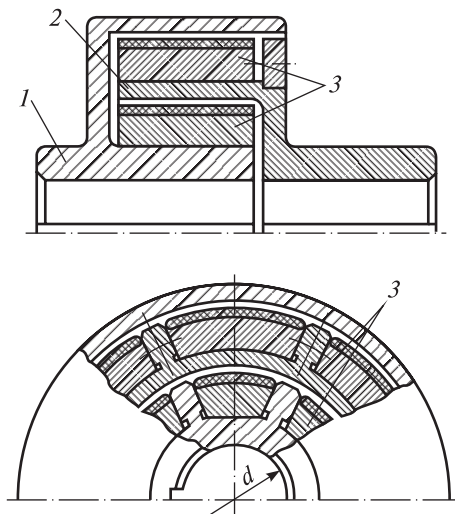


Рис. 39.13. Муфты центробежные

квадрату угловой скорости. Центробежная муфта допускает частые включения, обеспечивает плавное включение и имеет сравнительно небольшие габаритные размеры.

### 39.5. Предохранительные муфты

Эти муфты допускают ограничение передаваемого вращающего момента, что предохраняет машины от поломок при перегрузках.

Наибольшее распространение получили предохранительные кулачковые, шариковые и фрикционные муфты (рис. 39.14). От сцепных и других муфт они отличаются отсутствием механизма включения. Предохранительные кулачковые и шариковые (рис. 39.14, *а*) муфты постоянно замкнуты, а при перегрузках кулачки или шарики полумуфты 2 выдавливаются из впадин полумуфты 1, и муфта размыкается.

Иначе работает предохранительная фрикционная муфта (рис. 39.14, *б*). При перегрузке вследствие проскальзывания происходит пробуксовывание этой муфты (останавливается ведомый вал). Показанные на рис. 39.14 предохранительные муфты применяют при частых перегрузках.

При маловероятных перегрузках применяют предохранительные муфты с разрушающимся элементом, например со срезным штифтом (рис. 39.15). Они просты по конструкции и малогабаритны. Для изготовления деталей предохранительных муфт в зависимости от типа муфты применяют конструкционные стали, чугун СЧ30,

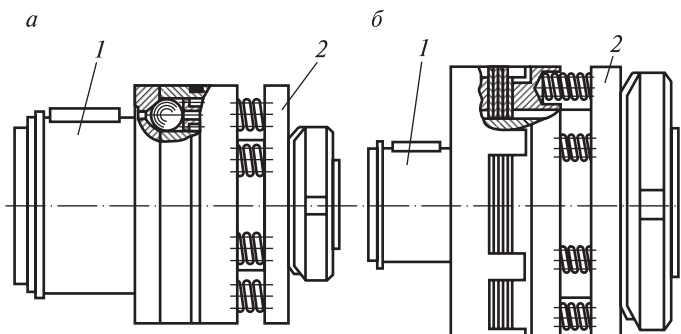


Рис. 39.14. Муфты предохранительные:  
*а* — шариковая; *б* — фрикционная

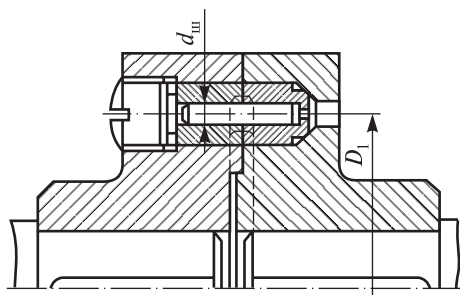


Рис. 39.15. Муфта со срезанным штифтом предохранительная

фрикционные материалы, сталь ШХ12. Штифты для муфт с разрушающимся элементом изготавливают из стали 45, втулки — из стали 40Х с закалкой.

### 39.6. Сведения о выборе и расчете муфт

Применяемые в транспортном машиностроении муфты стандартизованы. Основным критерием при выборе стандартных муфт является передаваемый вращающий момент.

При проектировании новых муфт конструктивные размеры элементов муфты определяют расчетом.

Стандартизованные муфты не рассчитывают, их выбирают, как и подшипники качения, по соответствующим стандартам или таблицам справочников.

*Выбор стандартных муфт.* Муфты выбирают по таблицам ГОСТа или справочников. Отдельные детали выбранной муфты проверяют на прочность.

Основной характеристикой при выборе муфт является передаваемый расчетный момент

$$M_p = K_p M \leq [M_p], \quad (39.1)$$

где  $K_p$  — коэффициент режима работы;

$M$  — номинальный вращающий момент при установленном режиме работы.

Значения коэффициента режима работ  $K_p$  приведено в табл. 39.1.

В табл. 39.2 и 39.3 приведены геометрические размеры втулочных и втулочно-пальцевых муфт и допускаемый передаваемый вращающий момент.

Таблица 39.1

Значение коэффициента режима работ  $K_p$ 

Механизм или машина	$K_p$
Конвейеры:	
ленточные	1,25...1,50
цепные, скребковые и винтовые (шнеки)	1,50...2,0
Воздуходувки и вентиляторы центробежные	1,25...1,50
Насосы:	
центробежные	1,50...2,0
поршневые компрессоры	2,0...3,0
Станки металлообрабатывающие:	
с непрерывным движением	1,25...1,50
с возвратно-поступательным движением	1,50...2,50
Станки деревообделочные	1,50...2,0
Мельницы шаровые, дробилки, молоты, ножицы	2,0...3,0
Краны, подъемники, элеваторы	3,0...4,0

Таблица 39.2

## Муфты втулочные со шпонками, размеры, мм

$d$	$D$	$L$	$[M_p],$ Н·м	$d$	$D$	$L$	$[M_p],$ Н·м
20	35	60	70	(45)	70	140	710
(22)	35	65	90	50	80	150	850
25	40	75	125	(55)	90	160	1060
(28)	45	80	170	60	100	180	1500
30	45	90	210	(70)	110	200	2240
(35)	50	105	350	80	120	220	3150
40	60	120	450	(90)	130	240	4000
				100	140	280	5600

*Примечание.* Значения, указанные в скобках, по возможности не принимать.

*Расчет на прочность глухих муфт.* Прочность втулочных, фланцевых и продольно-свертных муфт проверяют по условию прочности на кручение:

$$\tau_k \leq [\tau_k], \quad (39.2)$$

где  $[\tau_k]$  — допускаемое напряжение на кручение.

$$\tau_k = M_p / W_k = M_p D / 0,2(D^4 - d^4), \quad (39.3)$$

где  $\tau_k$  — расчетное напряжение на кручение;

$M_p$  — расчетный момент;

$d$  и  $D$  — размеры муфты (см. рис. 39.1).

Таблица 39.3

Муфты упругие втулочно-пальевые (МУВП), размеры даны в миллиметрах (рис. 39.5)

$d$	$[M_p]_H \cdot M$	$\omega_{\text{max}}$ , рад/с	$D$	$L$	$B$	$D_1$	Палец				Втулка упругая	
							$d_n$	$l_n$	Резьба	$z^*$	$D_p$	$l_b$
16...18	32	670	90	84	1...4	58	10	19	M8	4	1	15
20...22	55	590	100	104	1...4	68	10	19	M8	6	19	15
25...28	130	500	120	125	1...5	84	14	33	M10	4	27	28
30...28	240	420	140	165	1...5	100	14	33	M10	6	27	28
40...45	450	350	170	226	2...6	120	18	42	M12	6	35	36
48...55	700	314	190	226		140	18	42	M12	8	35	36
60...65	1100	286	220	286		170	18	42	M12	10	35	36
70...75	2000	234	250	288	2...8	190	24	52	M16	10	45	44
80...95	4000	178	320	350	2...10	242	30	66	M24	10	56,5	56
100...120	8000	146	400	452	2...10	300	38	84	M30	10	70,5	72

*Расчет на прочность компенсирующих муфт.* Проверочный расчет на прочность (износостойкость) кулачково-дисковых муфт ведут по формуле

$$p = 12M_p / (2D + d)(D - d)h \leq [p], \quad (39.4)$$

где  $p$  — максимальное давление, возникающее на рабочей поверхности сопряженных деталей муфты;

$D, d, h$  — размеры муфты (рис. 39.4);

$[p]$  — допускаемое давление (для муфт с закаленными поверхностями трения  $[p] = 15 \dots 30$  МПа).

Проверочный расчет зубчатых муфт не производят. Их выбирают по стандарту. Для зубчатых муфт расчетный момент

$$M_p = K_\phi K_p M, \quad (39.5)$$

где  $K_\phi$  и  $K_p$  — коэффициенты безопасности и режима работы (даны в табл. 39.4);

$M$  — номинальный вращающий момент.

Таблица 39.4

**Коэффициенты безопасности  $K_\phi$  и режимы работы  $K_p$**

Степень ответственности передачи	$K_\phi$
Поломка муфты вызывает:	1,0
остановку машины	1,2
аварию машины	1,5
аварию ряда машин	
может привести к человеческим жертвам	1,8
Условия работы машины	$K_p$
Спокойная	1,0
Неравномерная	1,1...1,3
Тяжелая, с ударами	1,3...1,5

Для упругих втулочно-пальцевых муфт проверочный расчет для пальцев производят на изгиб:

$$\sigma_{и.п} = M_{и.п} / W = M_p l_{п.п} / (0,1 d_{п.п}^3 D_1 z) \leq [\sigma_{и.п}]; \quad (39.6)$$

для втулок — на смятие

$$\sigma_{см.в} = F_p / (d_{п.в} l_{в.п}) = 2M_p / (l_{в.п} d_{п.п} D_1 z) \leq [\sigma_{см.в}], \quad (39.7)$$

где  $M_p$  — расчетный момент;

$d_{п.п}, l_{п.п}, l_{в.п}, D_1$  — размеры пальца втулки и полумуфты;



$z$  — число пальцев;

$[\sigma_{и.п}]$  — допускаемое напряжение изгиба (для пальцев);

$[\sigma_{см.в}]$  — допускаемое напряжение смятия втулки (для резины).

**Расчет сцепных муфт.** Расчеты кулачковых муфт принимают в зависимости от конструкции. Кулачки муфты проверяют расчетом на износостойкость по давлению на рабочих поверхностях и на прочность по напряжениям изгиба у основания кулачка:

$$p = F_p/A = 2M_p/(0,75bhD_1z) \leq [p]; \quad (39.8)$$

$$\sigma_{и} = M_{и}/W = 12M_p/(0,75a^2bD_1z) \leq [\sigma_{и}], \quad (39.9)$$

где  $M_p$  — расчетный момент;

$a, b, h, D_1$  — размеры муфты;

$z$  — число кулачков;

$[p]$  — допускаемое давление (для закаленных кулачков);

$[\sigma_{и}]$  — допускаемое напряжение изгиба.

**Расчет фрикционных сцепных муфт.** Как уже указывалось, фрикционные муфты должны обладать высокой износостойкостью контактирующих поверхностей.

Материал трущихся деталей (накладок) выбирают в зависимости от среднего контактного давления:

$$p = 2Mk/(D_m f z F) \leq [p], \quad (39.10)$$

где  $M$  — вращающий момент;

$k = 1,3...1,5$  — коэффициент сцепления;

$D_m$  — средний диаметр контакта;

$f$  — коэффициент сцепления (трения покоя);

$z$  — число пар поверхностей трения;

$F$  — площадь поверхности трения;

$[p]$  — допускаемые давления (табл. 39.5).

Площадь поверхности соприкосновения (контакта)

$$F \cong \pi D_m b,$$

где  $b$  — ширина поверхности трения, ее принимают в зависимости от диаметра  $D_m$ ;

$\Psi = 0,2...0,3$  — для цилиндрических муфт.

Если принять фрикционный материал и задаться величиной  $\Psi$ , то

$$D_m \geq \sqrt[3]{2kM/(\pi \Psi f z [p])}.$$

Таблица 39.5

Допускаемые давления  $[p]$  и коэффициенты трения  $f$  между стальным диском и дисками из различных материалов при скорости скольжения  $v_{\text{ск}} < 2,5$  м/с

Расчетные параметры	Материалы одного из дисков				
	Металло-керамика*	Сталь	Чугун	Феродо*	Текстолит
$[p]$ , МПа	$\frac{2,5...3,0}{1,0...1,5}$	0,4...0,6	0,4...0,6	$\frac{-}{0,2...0,3}$	0,4...0,6
$f$	$\frac{0,15}{0,25}$	0,12	0,15	0,35	0,12

\* В числителе — значения параметров при смазанных дисках, в знаменателе — для дисков без смазывания.

*Примечание.* Допускаемые давления следует снижать: на 15 % при  $v_{\text{ск}} \approx 5$  м/с; на 30 % при  $v_{\text{ск}} \approx 10$  м/с и на 35 % при  $v_{\text{ск}} \approx 15$  м/с.

Осевое усилие, необходимое для создания нормального усилия в дисковой ( $\alpha = 90^\circ$ ) или конической муфте:

$$F_a = (2M/(fD_m \sin \alpha).$$

Интенсивность изнашивания муфт зависит от мощности, расходуемой на трение:

$$P = p f v_{\text{ск}} \leq [P],$$

где  $v_{\text{ск}} = 0,5\omega D_m$  — средняя скорость скольжения;

$[P]$  — допускаемая мощность трения.

Из формулы (39.10) несложно заключить, что для повышения передаваемого вращающего момента можно увеличить число пар поверхностей трения. При этом осевая сила, сжимающая детали, остается неизменной. Это обстоятельство реализуют на практике, применяя многодисковые муфты.

*Расчет самоуправляемых и предохранительных муфт.* Самоуправляемые роликовые муфты свободного хода выбирают по нормальям. На контактную прочность проверяют только ролики и рабочие поверхности полу муфт (рис. 39.12):

$$\sigma_k = 0,418 \sqrt{8M_p E_{пр} / (dl\alpha Dz)} \leq [\sigma_k], \quad (39.11)$$

где  $M_p$  — расчетный момент;

$E_{пр}$  — приведенный модуль упругости;

$d$  и  $l$  — диаметр и длина роликов;

$\alpha \approx 7^\circ$  — угол заклинивания роликов;

$D$  — диаметр рабочей поверхности обоймы;

$z$  — число роликов;

$[\sigma_k]$  — допускаемое контактное напряжение.

Размеры центробежных муфт принимают конструктивно. Рабочие поверхности трения грузов проверяют на износостойкость аналогично фрикционным муфтам. Массу груза подбирают по создаваемой им центробежной силе.

Фрикционные предохранительные муфты выбирают по стандарту. Их расчетная проверка аналогична расчету сцепных фрикционных муфт.

Предохранительные муфты с разрушающимся элементом выбирают по нормам станкостроения, после чего штифт проверяют на срез:

$$M_{пред} = \pi d_{ш}^2 / (8zD_1 \tau_{ср}) \leq M_p, \quad (39.12)$$

где  $M_{пред}$  — предельный момент, при котором происходит разрушение штифтов;

$D_1$  — диаметр расположения штифтов (рис. 39.15);

$\tau_{ср}$  — предел прочности на срез;

$M_p$  — расчетный момент;

$d_{ш}$  — диаметр штифтов;

$z$  — число штифтов.

На основании изложенного делаем вывод, что муфты разрабатывают конструктивно, а затем рассчитывают на прочность.

## Механические характеристики углеродистых конструкционных сталей

Марка стали	$\sigma_B$	$\sigma_T$	$\tau_T$	$\delta, \%$	$\sigma_{-1}^\mu$	$\sigma_{-1}^p$	$\tau_{-1}$
	МПа				МПа		
10	340	210	140	31	160...220	120...150	80...120
30	500	300	170	21	200...270	170...210	110...140
45	610	360	220	16	250...340	190...250	150...200
60	690	410	—	12	310...380	220...280	180...220
20Г	460	280	—	24	—	—	—
50Г	660	400	—	13	290...360	—	—
20Х	800	650	—	11	380	—	170...230
40Х	1000	800	—	10	350...380	250	225
45Х	1050	850	—	9	400...500	—	—
30ХМ	950	750	—	11	310...410	370	230
35ХМ	1000	850	—	12	470...510	—	—
40ХН	1000	800	390	11	400	290	240
50ХН	1100	900	—	9	550	—	—
40ХФА	900	750	—	10	380...490	—	—
38ХМЮА	1000	850	—	14	420...550	—	—
20ХНЗА	950	750	—	12	430...450	300...320	245...255
30ХНЗА	1000	800	—	10	520...700	—	320...400
40ХНМА	1000	950	—	12	500...700	—	270...380
30ХТСА	1000	850	—	10	510...540	500...535	220...245

## Модули упругости и коэффициент Пуассона некоторых материалов

Материал	Модуль упругости, ГПа		Коэффициент Пуассона $\mu$
	$E$	$G$	
Сталь:			
углеродистая	200...210	81	0,24...0,28
легированная	210	81	0,25...0,33
литье	175	—	0,25...0,33
Чугун:			
серый, белый	115...160	45	0,23...0,27
ковкий	155	—	—
Медь:			
прокатная	110...150	40	0,31...0,34
холоднотянутая	130	49	—
литье	84	—	—
Алюминий катаный	59...69	26...27	0,32...0,36
Платина	170	—	0,39
Бронза:			
фосфористая катаная	115	42	0,32...0,35
марганцовистая	110	40	0,36
алюминиевая, литье	105	42	—
Латунь:			
холоднотянутая	90...100	35...37	0,32...0,42
корабельная, катаная	100	—	0,36
Сплавы:			
алюминиевый	70...72	27	0,32
магниевый	40...45	—	0,34
Дюралюминий, катаный	71	27...37	—
Сплавы титана	105...115	—	0,30

## Рекомендуемая литература

1. *Олофинская В.П.* Техническая механика: курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий: учеб. пособие. — 2-е изд. — М.: Форум: Инфра-М, 2008. — 349 с.
2. *Аркуша А.И.* Руководство к решению задач по теоретической механике. — М.: Высшая школа, 2009. — 376 с.
3. *Мещеряков В.Б.* Курс теоретической механики. — М.: Магистраль, 2012. — 260 с.
4. *Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П.* Сопротивление материалов: учебник. — 8-е изд., испр. — М.: Студент, 2012. — 560 с.
5. *Лукьянов А.М.* Сопротивление материалов. — М.: Магистраль, 2008. — 560 с.
6. *Ицкович Г.М., Минин Л.С., Винокуров А.И.* Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие. — М.: Высшая школа, 2001. — 592 с.
7. *Грес П.В.* Руководство к решению задач по сопротивлению материалов: учеб. пособие. — М.: Высшая школа, 2004. — 135 с.
8. *Анурьев В.И.* Справочник конструктора-машиностроителя. Т. 1. — М.: Машиностроение, 2001. — 920 с.

## Оглавление

Предисловие .....	3
<b>Раздел 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА .....</b>	<b>5</b>
Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И АКСИОМЫ .....	5
1.1. Задачи теоретической механики .....	5
1.2. Механическое взаимодействие материальных тел .....	7
1.3. Понятие силы и системы сил. Равнодействующая .....	8
1.4. Аксиомы статики .....	9
1.5. Простейшие теоремы статики .....	10
1.6. Механические связи и их реакции. Аксиома связей .....	11
Глава 2. ПЛОСКАЯ СИСТЕМА СИЛ .....	14
2.1. Момент силы относительно точки .....	15
2.2. Аналитический способ задания сил .....	16
2.3. Теорема о моменте равнодействующей .....	17
2.4. Пара сил и ее свойства .....	17
2.5. Теорема о параллельном переносе силы .....	19
2.6. Приведение произвольной плоской системы сил к одному центру .....	21
2.7. Равновесие твердого тела под действием плоской системы сил .....	22
2.8. Равновесие системы твердых тел .....	26
Глава 3. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ .....	28
3.1. Центр системы параллельных сил .....	28
3.2. Центр тяжести твердого тела .....	30
3.3. Способы определения положения центра тяжести .....	30
Глава 4. ТРЕНИЕ .....	34
4.1. Основные замечания .....	34
4.2. Трение при скольжении .....	34
4.3. Трение качения .....	38
Глава 5. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ .....	41
5.1. Основные понятия .....	41
5.2. Скорость и ускорение точки при векторной и координатной формах выражения закона движения .....	41
5.3. Скорость и ускорение точки при естественной форме выражения закона движения .....	44

Глава 6. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА .....	47
6.1. Поступательное движение.....	47
6.2. Вращательное движение твердого тела .....	48
Глава 7. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ.....	50
7.1. Основные понятия.....	50
7.2. Теорема сложения скоростей.....	52
7.3. Теорема сложения ускорений.....	54
Глава 8. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА .....	56
8.1. Основные понятия и теоремы .....	56
8.2. Определение скоростей точек тела.....	58
8.3. Мгновенный центр скоростей .....	59
8.4. Определение ускорений точек тела.....	61
8.5. Мгновенный центр ускорений .....	62
Глава 9. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ.....	63
9.1. Основной закон и задачи динамики материальной точки.....	63
9.2. Интегрирование уравнений движения .....	67
9.3. Теорема моментов для материальной точки.....	70
Глава 10. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ .....	71
10.1. Дифференциальные уравнения движения системы .....	71
10.2. Теорема о движении центра масс системы.....	72
10.3. Теорема моментов для системы.....	73
10.4. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии системы .....	76
10.5. Принцип Даламбера .....	82
Глава 11. ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.....	85
11.1. Классификация механических связей .....	85
11.2. Возможные перемещения. Степени свободы .....	87
11.3. Принцип возможных перемещений .....	88
11.4. Общее уравнение динамики.....	92
11.5. Элементарная теория удара.....	94
<b>Раздел 2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ .....</b>	<b>98</b>
Глава 12. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ .....	98
12.1. Задачи сопротивления материалов .....	98
12.2. Схематизация элементов конструкций.....	99
12.3. Основные типы опорных связей и балок .....	100
12.4. Основные допущения, используемые в курсе	
«Сопротивление материалов» .....	102



12.5. Схематизация внешних нагрузок.....	105
12.6. Метод сечений.....	106
12.7. Понятия о напряжениях, деформациях и перемещениях .....	112
12.8. Дифференциальные зависимости между внутренними усилиями и интенсивностью внешней нагрузки.....	116
12.9. Построение эпюр внутренних силовых факторов.....	119
12.10. Основные особенности при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов .....	137
<b>Глава 13. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ.....</b>	<b>139</b>
13.1. Напряжения и деформации при растяжении и сжатии. Закон Гука.....	139
13.2. Напряжения в сечениях, наклоненных к оси стержня, при растяжении и сжатии .....	143
13.3. Определение перемещений в общем случае растяжения и сжатия.....	145
13.4. Испытание материалов на растяжение и сжатие .....	147
13.5. Методы расчета конструкций на прочность.....	153
13.6. Напряженное состояние в точке.....	156
13.7. Примеры расчета стержней на растяжение—сжатие.....	162
13.8. Учет влияния собственного веса бруса .....	165
13.9. Статически неопределимые системы .....	170
<b>Глава 14. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ.....</b>	<b>183</b>
14.1. Основные понятия .....	183
14.2. Статические моменты инерции и центр тяжести.....	184
14.3. Осевые и центробежные моменты инерции .....	187
14.4. Вычисление моментов инерции при параллельном переносе осей.....	190
14.5. Зависимость между моментами инерции при повороте координатных осей .....	193
14.6. Главные оси и главные моменты инерции .....	196
14.7. Примеры вычисления геометрических характеристик составных сечений.....	197
<b>Глава 15. ПРЯМОЙ ИЗГИБ .....</b>	<b>202</b>
15.1. Классификация видов изгиба. Основные определения .....	202
15.2. Нормальные напряжения при чистом изгибе.....	203
15.3. Моменты сопротивления сечений простейших фигур.....	208
15.4. Расчет балок на прочность по нормальным напряжениям .....	209
15.5. Балки рационального сечения .....	211

15.6. Примеры расчета балок на прочность по нормальным напряжениям .....	212
15.7. Напряжения при поперечном изгибе .....	214
15.8. Прочность балок по касательным напряжениям .....	219
15.9. Величина и роль касательных напряжений при поперечном изгибе.....	220
15.10. Примеры расчета балок на прочность по касательным напряжениям.....	221
15.11. Расчет балок с учетом развития пластических деформаций ...	224
15.12. Расчет балок по нормальным и касательным напряжениям...	228
Глава 16. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ .....	238
16.1. Основные понятия .....	238
16.2. Угловые и линейные перемещения при прямом изгибе .....	239
16.3. Дифференциальное уравнение оси изогнутого бруса .....	241
16.4. Определение перемещений методом Максвелла—Мора.....	245
Глава 17. СДВИГ И КРУЧЕНИЕ.....	256
17.1. Чистый сдвиг.....	256
17.2. Напряжения и перемещения при кручении стержня круглого поперечного сечения.....	259
17.3. Испытания на кручение .....	267
17.4. Статически неопределимые задачи при кручении .....	272
17.5. Кручение стержня некруглого поперечного сечения.....	275
Глава 18. ОСНОВЫ РАСЧЕТА ПРОСТЕЙШИХ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ .....	277
18.1. Статически неопределимые балки.....	277
18.2. Каноническое уравнение метода сил .....	281
18.3. Пример расчета статически неопределимой балки .....	283
18.4. Статически неопределимые рамы.....	287
Глава 19. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ.....	305
19.1. Общие понятия .....	305
19.2. Построение эпюр внутренних усилий для стержня с ломаной осью.....	308
19.3. Косой изгиб.....	312
19.4. Совместное действие изгиба и растяжения или сжатия.....	321
19.5. Внецентренное растяжение и сжатие .....	324
19.6. Теории прочности.....	332
19.7. Изгиб с кручением.....	340
19.8. Общий случай сложного сопротивления .....	341
19.9. Определение перемещений при сложном воздействии .....	344

Глава 20. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ .....	348
20.1. Основные понятия .....	348
20.2. Формула Эйлера для определения критической силы .....	352
20.3. Влияние способа закрепления концов стержня на значение критической силы .....	354
20.4. Пределы применимости формулы Эйлера .....	357
20.5. Формула Ф.С. Ясинского .....	358
20.6. Практические расчеты сжатых стержней на устойчивость .....	360
20.7. Примеры расчета стержней на устойчивость .....	363
Глава 21. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ НА ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ .....	371
21.1. Основные понятия .....	371
21.2. Расчет внецентренно сжатой стойки .....	371
21.3. Определение перемещений при продольно-поперечном изгибе интегрированием дифференциального уравнения прогибов .....	374
21.4. Приближенный способ определения прогиба при продольно-поперечном изгибе балки .....	378
21.5. Примеры расчета стержней на продольно-поперечный изгиб .....	381
Глава 22. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ .....	389
22.1. Понятие о динамическом нагружении .....	389
22.2. Движение тел с постоянным ускорением. Динамический коэффициент .....	390
22.3. Ударное действие нагрузки .....	393
22.4. Колебания упругих систем .....	402
22.5. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы .....	410
Глава 23. ПРОЧНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ .....	415
23.1. Основные понятия об усталости и характеристики цикла .....	415
23.2. Кривая усталости. Предел выносливости .....	419
23.3. Диаграмма предельных амплитуд .....	420
23.4. Факторы, влияющие на снижение предела выносливости .....	422
23.5. Коэффициент запаса усталостной прочности .....	431
Глава 24. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ .....	433
24.1. Основные сведения и понятия .....	433
24.2. Определение усилий в стержнях ферм .....	435
24.3. Понятия о шпренгельных фермах .....	440

<b>Раздел 3. ДЕТАЛИ МАШИН</b> .....	442
Глава 25. ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ДЕТАЛЯМ И УЗЛАМ МАШИН НА СТАДИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И ИЗГОТОВЛЕНИЯ .....	442
25.1. Сведения о механизмах и машинах.....	442
25.2. Основные требования, предъявляемые к машинам .....	444
25.3. Методы оценки прочностной надежности деталей машин .....	447
25.4. Требования, предъявляемые к деталям машин на стадии конструирования.....	449
25.5. Материалы, используемые в транспортном машиностроении.....	450
25.6. Точность изготовления деталей машин .....	457
Глава 26. НЕРАЗЪЕМНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН .....	465
26.1. Сварные соединения.....	465
26.2. Паяные соединения .....	475
26.3. Клеевые соединения .....	480
26.4. Заклепочные соединения .....	482
26.5. Соединения с натягом .....	487
Глава 27. РЕЗЬБОВЫЕ СОЕДИНЕНИЯ .....	491
27.1. Виды резьбовых соединений .....	491
27.2. Крепежные детали, типы соединений и применяемые материалы.....	497
27.3. Особенности работы резьбовых соединений и их расчет.....	503
Глава 28. ШПОНОЧНЫЕ, ШТИФТОВЫЕ, ШЛИЦЕВЫЕ И ПРОФИЛЬНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ.....	510
28.1. Шпоночное соединение .....	510
28.2. Штифтовые соединения .....	516
28.3. Шлицевое соединение .....	517
28.4. Профильные соединения.....	521
Глава 29. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕДАЧАХ .....	522
29.1. Назначение и роль передач.....	522
29.2. Классификация механических передач .....	522
29.3. Основные кинематические и силовые отношения в передачах .....	524

Глава 30. ФРИКЦИОННЫЕ ПЕРЕДАЧИ И ВАРИАТОРЫ .....	527
30.1. Виды механизмов и их назначение .....	527
30.2. Кинематика передач .....	531
30.3. Виды повреждений катков и расчет передач .....	533
Глава 31. РЕМЕННЫЕ ПЕРЕДАЧИ.....	537
31.1. Общие сведения .....	537
31.2. Ремни, шкивы и натяжные устройства .....	539
31.3. Усилия и напряжения в ременных передачах .....	547
31.4. Кинематика и геометрические зависимости передач.....	549
31.5. Критерии работоспособности ременных передач .....	551
31.6. Расчет ременных передач .....	553
31.7. Передачи с зубчатыми ремнями .....	557
Глава 32. ЦЕПНЫЕ ПЕРЕДАЧИ.....	560
32.1. Общие сведения .....	560
32.2. Приводные цепи и звездочки .....	562
32.3. Усилия в ветвях цепи и критерии работоспособности цепной передачи .....	568
32.4. Особенности конструирования и эксплуатации цепных передач.....	572
Глава 33. ПЕРЕДАЧИ ВИНТ—ГАЙКА .....	573
33.1. Общие сведения .....	573
33.2. Материал винтов и КПД винтовой пары .....	576
33.3. Расчет передачи винт—гайка .....	578
Глава 34. ЧЕРВЯЧНЫЕ ПЕРЕДАЧИ .....	580
34.1. Общие сведения .....	580
34.2. Основные параметры червячных передач .....	582
34.3. Особенности работы и КПД червячной передачи .....	586
34.4. Расчет на прочность червячных передач .....	588
34.5. Материалы червячной передачи .....	591
34.6. Тепловой расчет червячной передачи .....	593
Глава 35. ЗУБЧАТЫЕ ПЕРЕДАЧИ.....	594
35.1. Общие сведения и классификация зубчатых передач.....	594
35.2. Сведения о методах изготовления зубчатых колес, их конструкциях и материалах .....	598
35.3. Элементы зубчатой передачи, определения и обозначения .....	600

35.4. Основная теорема зубчатого зацепления.	
Геометрический расчет эвольвентных передач .....	602
35.5. Сведения о корригировании зацеплений.....	607
35.6. Виды разрушений зубьев.....	609
35.7. Цилиндрические прямозубые передачи .....	611
35.8. Цилиндрические косозубые и шевронные зубчатые передачи.....	625
35.9. Конические зубчатые передачи.....	633
35.10. Зубчатые передачи с зацеплением М.Л. Новикова .....	640
35.11. Планетарные зубчатые передачи.....	645
35.12. Волновые зубчатые передачи .....	648
Глава 36. ВАЛЫ И ОСИ .....	651
36.1. Назначение, конструкции и материалы валов и осей .....	651
36.2. Расчет и проектирование валов и осей на прочность.....	654
36.3. Расчет вала (осей) на жесткость .....	657
Глава 37. ПОДШИПНИКИ СКОЛЬЖЕНИЯ .....	659
37.1. Назначение, типы и область применения.....	659
37.2. Виды разрушений и повреждений.....	662
37.3. Расчет подшипников, их КПД и смазочные материалы .....	663
Глава 38. ПОДШИПНИКИ КАЧЕНИЯ.....	667
38.1 Классификация и область применения.....	667
38.2. Виды разрушений подшипников качения и подбор подшипника .....	672
38.3. Смазывание подшипников качения и их КПД.....	678
Глава 39. МУФТЫ .....	680
39.1. Общие сведения .....	680
39.2. Нерасцепляемые муфты .....	680
39.3. Управляемые (сцепные) муфты .....	688
39.4. Самоуправляемые муфты .....	690
39.5. Предохранительные муфты .....	692
39.6. Сведения о выборе и расчете муфт .....	693
Приложение 1 .....	700
Приложение 2 .....	701
Рекомендуемая литература .....	702

*Учебное издание*

Лукиянов Анатолий Михайлович  
Лукиянов Михаил Анатольевич

## ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

*Учебник*

---

Подписано в печать 18.10.2012 г.  
Формат 60×84/16. Печ. л. 44,5. Тираж 1700 экз. Заказ  
ФГБОУ «Учебно-методический центр по образованию  
на железнодорожном транспорте»  
105082, Москва, ул. Бакунинская, д. 71  
Тел.: +7 (495) 739-00-30,  
e-mail: [info@umczdt.ru](mailto:info@umczdt.ru),  
<http://www.umczdt.ru>

---

*Для заметок*